УДК 62-50 : 681.5.01

РОБАСТНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. Б. Филимонов[1], **Н. Б. Филимонов**[2]

[1]*Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники, 119454, Москва, просп. Вернадского, 78*
[2]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1*
E-mail: nbfilimonov@mail.ru

Предлагается двухэтапная процедура решения задач робастного управления динамическими объектами с неопределённостями. Вначале осуществляется робастная коррекция динамики объекта посредством контура управления с большим коэффициентом усиления в соответствии с заданной эталонной моделью. Поскольку модель скорректированного объекта теперь известна, то далее именно к ней применяются стандартные методы решения задачи управления. Данный подход воплощает двухконтурная система управления: внутренний контур обеспечивает робастную коррекцию объекта, а внешний отвечает за достижение цели управления.

Ключевые слова: неопределённый объект, большой коэффициент усиления, робастная коррекция, эталонная динамика, двухконтурная система управления.

Введение. В современной теории управления важное место занимает проблема синтеза робастных систем автоматического управления (САУ) для априорно неопределённых динамических объектов. Существуют различные подходы к её решению [1, 2]: методы на основе частотных критериев устойчивости Михайлова, Найквиста и годографа Цыпкина — Поляка, методы LMI и μ-синтеза, методы функций Ляпунова и на основе интервальных критериев устойчивости Липатова — Соколова и Харитонова, методы LQ- и L_1-оптимизации и оптимизации в пространствах Харди (методы H_2- и H_∞-синтеза) и др.

К классическим методам синтеза робастных САУ относится метод больших коэффициентов усиления [3–12], берущий начало в работах [13, 14] и получивший современное развитие в отечественной литературе [10, п. 10.3; 11; 12, п. 2.4]. В [15] обсуждались ретроспектива и теоретические аспекты данного метода.

Цель представленной работы — развитие концепции применения механизма большого усиления сигналов как средства робастной коррекции динамических систем [16].

Контур динамической коррекции с большим коэффициентом усиления. Рассматривается класс линейных стационарных объектов с одномерными входом u и выходом y, динамика которых описывается дифференциальным уравнением n-го порядка вида

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j^0 u^{(j)}(t),$$

где a_i^0, b_j^0 — вещественные константы, причём $m < n$ и $b_m^0 \equiv \beta_0 > 0$.

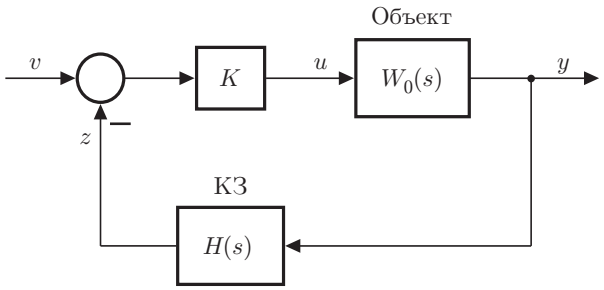

Рис. 1

Передаточная функция (ПФ) объекта

$$W_0(s) = B_0(s)/A_0(s), \tag{1}$$

где s — комплексная частота, а $A_0(s)$ и $B_0(s)$ — многочлены:

$$A_0(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 s^i, \quad B_0(s) = \sum_{j=0}^{m} b_j^0 s^j,$$

старшие коэффициенты (обозначаемые далее lcoef) которых имеют вид

$$\mathrm{lcoef} A_0(s) = 1, \quad \mathrm{lcoef} B_0(s) = \beta_0.$$

Обратимся к схеме коррекции (СК) объекта управления, представленной на рис. 1. Она включает два элемента: усилительное звено с коэффициентом усиления K в прямой цепи и обратную связь с корректирующим звеном (КЗ). Вход СК обозначен через v.

Далее полагаем, что известны выход объекта и его производные до d-й включительно, т. е. измерительную базу составляют переменные

$$y_k = y^{(k-1)}, \quad k = \overline{1, d+1}. \tag{2}$$

Пусть ПФ КЗ является многочленом вида

$$H(s) = \sum_{k=0}^{d} h_k s^k,$$

где h_k — вещественные константы, причём $h_d \equiv \beta_H > 0$.

Согласно схеме на рис. 1 действие КЗ описывается уравнением

$$z(t) = \sum_{k=0}^{d} h_k y^{(k)}(t).$$

Поскольку данное уравнение с учётом (2) принимает вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{d} h_k y_{k+1}(t),$$

то можно заключить, что КЗ физически реализуемо.

Передаточная функция скорректированного объекта (СО)

$$V(K,s) = \frac{KW_0(s)}{1 + KW_0(s)H(s)}$$

и с учётом (1) может быть записана в виде

$$V(K,s) = \frac{KB_0(s)}{\Delta_0(K,s)}. \tag{3}$$

Здесь $\Delta_0(K,s)$ — характеристический многочлен СО:

$$\Delta_0(K,s) = A_0(s) + KA_1(s), \tag{4}$$

причём

$$A_1(s) = B_0(s)H(s), \tag{5}$$

$$\deg\Delta_0(s) = \deg A_0(s) = n; \quad \deg A_1(s) = m + d, \tag{6}$$

$$\beta \equiv \mathrm{lcoef} A_1(s) = \beta_0\beta_H. \tag{7}$$

Исследуем действие СК при больших значениях коэффициентов усиления: $K \gg 1$.

Асимптотика и редуцированная модель скорректированного объекта. Обозначим через $\Lambda(K)$ множество корней характеристического многочлена СО (4). Каждому корню $\lambda \in \Lambda(K)$ отвечает мода — свободное движение вида

$$\varphi(\lambda,t) = C\exp(\lambda t), \quad C = \mathrm{const} \neq 0.$$

У многочлена (4) при $K \to \infty$ имеются инфинитные (уходящие в бесконечность) корни, их число $n_\infty = \deg A_0(s) - \deg A_1(s)$ [16]. Они образуют подмножество $\Lambda_\infty(K) \subset \Lambda(K)$.

Асимптотическая структура множества $\Lambda_\infty(K)$ характеризуется следующими вариантами асимптотического поведения корней $\lambda \in \Lambda_\infty(K)$:

$$1)\ \lim_{K\to\infty} \mathrm{Re}\lambda(K) = -\infty; \quad 2)\ \lim_{K\to\infty} \mathrm{Im}\lambda(K) = \infty; \quad 3)\ \lim_{K\to\infty} \mathrm{Re}\lambda(K) = \infty.$$

Отметим, что варианты 1 и 3 являются взаимоисключающими.

Данные соотношения отражают следующие свойства моды $\exp(\lambda t)$ для случая $K \gg 1$:

1) мода быстро затухает;

2) её частота колебаний неограниченна;

3) она имеет неограниченную степень роста.

При наличии мод со свойствами 2 и 3 система не может быть работоспособной. Следовательно, в модальном составе работоспособной СК не должно быть таких мод, что соблюдается лишь при выполнении условия

$$\deg A_0(s) - \deg A_1(s) = 1,$$

которое с учётом (6) означает, что $d = n - m - 1$. В этом случае справедливо приближение

$$\Delta_0(K, s) \cong K(\tau s + 1)A_1(s). \tag{8}$$

Здесь малая постоянная времени $\tau \ll 1$ определяется формулой (7) и соотношением $\tau = 1/(\beta K)$

Замечание. Согласно (8) и (5) корни числителя $B_0(s)$ передаточной функции объекта становятся корнями характеристического многочлена СО. Это означает, что данная схема коррекции неприменима к неминимально-фазовым объектам, а также в случаях, когда эти корни неудовлетворительны с точки зрения требуемой степени устойчивости синтезируемой системы управления.

Перейдём к анализу асимптотики ПФ СО. Согласно (3), (5) и (8)

$$V(K, s) \cong \frac{B_0(s)}{(\tau s + 1)B_0(s)H(s)}. \tag{9}$$

Сокращая здесь числитель и знаменатель на общий множитель $B_0(s)$, получим

$$V(K, s) \cong \frac{1}{(\tau s + 1)H(s)}. \tag{10}$$

Сократимость дроби (9) означает компенсацию совпадающих передаточных нулей и полюсов СО, что порождает [17] неуправляемую часть системы с характеристическим многочленом $B_0(s)$. В связи с этим полагаем, что многочлен $B_0(s)$ является гурвицевым и его корни расположены не слишком близко к мнимой оси s-плоскости.

Для анализа свойств СО исключим из рассмотрения быстро затухающие моды. Поскольку характер протекания процессов управления определяется областью низких частот ($|\tau s| \ll 1$), то можно пренебречь малой постоянной времени, полагая $\tau = 0$. Но тогда из (10) получаем низкочастотную аппроксимацию ПФ СО:

$$V(K, s) \cong \hat{V}(s) = \frac{1}{H(s)}. \tag{11}$$

Соотношение (11) отражает свойство робастности СК: скорректированная динамика объекта описывается редуцированной динамической моделью порядка d, которая определяется исключительно ПФ КЗ, т. е. результат коррекции инвариантен к параметрам объекта.

В результате коррекции формируется канал управления объектом с желаемой передаточной функцией. Но тогда дальнейший этап решения задачи управления сводится к применению стандартных методов, предполагающих точное знание динамических характеристик объекта управления.

Заметим, что изложенная схема робастной коррекции распространяется на широкий класс приложений, в частности на задачи программного и терминального управления. Его применение к задачам синтеза САУ естественным образом воплощается в двухконтурной схеме управления.

Двухконтурная структура робастных САУ. Обратимся к схеме линейной САУ, представленной на рис. 2. Здесь y^* — уставка, $\varepsilon = y^* - y$ — сигнал рассогласования. Система включает два контура управления: внутренний контур выполняет робастную коррекцию объекта, а внешний — осуществляет отработку уставки y^*.

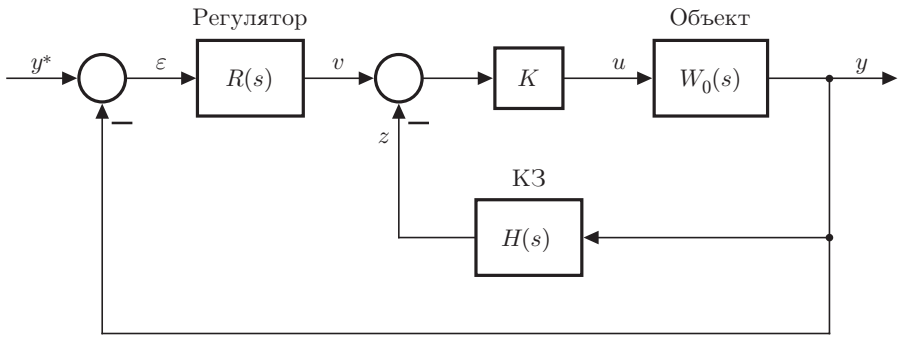

Рис. 2

Пусть ПФ регулятора является несократимой рациональной дробью вида

$$R(s) = \frac{B_R(s)}{s^\rho A_R(s)}, \tag{12}$$

где

$$A_R(s) = \sum_{i=0}^{n_R} a_i^R s^i; \quad B_R(s) = \sum_{j=0}^{m_R} b_j^R s^j;$$

$\rho \geq 1$; $A_R(s)$ — унитарный многочлен: $\mathrm{lcoef} A_R(s) \equiv a_{n_R}^R = 1$.

Условие физической реализуемости ПФ (12) имеет вид

$$m_R \leq \rho + n_R.$$

Передаточная функция замкнутой САУ

$$W(K,s) = \frac{R(s)V(K,s)}{1 + R(s)V(K,s)}.$$

Отсюда с учётом (11) и (12) следует низкочастотное приближение

$$W(K,s) \cong \hat{W}(s) = \frac{B_R(s)}{A(s)}, \tag{13}$$

где

$$A(s) = s^\rho A_R(s) H(s) + B_R(s). \tag{14}$$

Будем полагать, что многочлен $H(s)$ является унитарным: $\mathrm{lcoef} H(s) \equiv \beta_H = 1$.

Введём обозначение $N = \deg A(s)$. Согласно (14)

$$N = \rho + n_R + d. \tag{15}$$

Поскольку ПФ (13) должна быть правильной дробью: $\deg B_R(s) < \deg A(s)$, то из (14) следует, что $m_R \leq \rho + n_R + d - 1$. При этом максимальное значение параметра m_R должно удовлетворять условию

$$m_R \geq \rho + n_R - 1. \tag{16}$$

Соотношения (13), (14) служат основой для синтеза САУ, причём структура регулятора (12) обеспечивает системе астатизм ρ-го порядка по отношению к задающему входу y^*.

Настраиваемыми параметрами САУ, вообще говоря, являются все изменяемые коэффициенты многочленов $H(s)$, $A_R(s)$, $B_R(s)$. Полагая многочлены $A_R(s)$ и $B_R(s)$ унитарными, получим общее число настраиваемых параметров системы

$$\tilde{N} = n_R + m_R + d + 1. \tag{17}$$

Возможны различные постановки задачи синтеза САУ. Ограничимся рассмотрением лишь двух с учётом того, что фиксированы структурные параметры системы ρ и d.

Модальное управление. Посредством настройки параметров замкнутой системы необходимо получить желаемые полюса ПФ (13), т. е. обеспечить выполнение равенства

$$A(s) = A^*(s) \tag{18}$$

для заданного унитарного многочлена $A^*(s)$. Из (14) и (18) следует функциональное уравнение для неизвестных многочленов $A_R(s)$, $B_R(s)$ и $H(s)$:

$$s^\rho A_R(s)H(s) + B_R(s) = A^*(s). \tag{19}$$

Итак, посредством $\tilde{N}$ варьируемых параметров мы должны управлять N коэффициентами многочлена $A^*(s)$. Следовательно, для разрешимости уравнения (19) необходимо соблюдение условия $\tilde{N} \geq N$. Но оно заведомо выполняется, поскольку согласно (15)–(17)

$$\tilde{N} - N = n_R \geq 0.$$

Задача синтеза САУ с желаемой ПФ. Функциональные требования к синтезируемой системе свяжем с низкочастотным приближением (13)

$$\hat{W}(s) = W^*(s). \tag{20}$$

Здесь $W^*(s)$ — желаемая (эталонная) ПФ:

$$W^*(s) = \frac{B^*(s)}{A^*(s)}, \tag{21}$$

$$A^*(s) = s^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i^* s^i; \quad B^*(s) = \sum_{j=0}^{M} b_j^* s^j. \tag{22}$$

Требование астатизма к синтезируемой САУ порождает условие $W^*(0) = 1$, которое с учётом (21) и (22) означает равенство $a_0^* = b_0^*$. Из сравнения (13) и (20) находим

$$A(s) = A^*(s), \quad B_R(s) = B^*(s).$$

Согласно последнему равенству

$$m_R = \deg B_R(s) = \deg B^*(s) = M.$$

Можно показать [16], что желаемая настройка (20) замкнутой САУ возможна лишь при соблюдении условия $\rho = 1$. В этом случае из (14) получаем функциональное уравнение для неизвестных многочленов $A_R(s)$, $B_R(s)$ и $H(s)$:

$$sA_R(s)H(s) + B_R(s) = A^*(s).$$

Пример. Пусть движение управляемого механического объекта описывается уравнением

$$\ddot{y}(t) + a_1^0\dot{y}(t) + a_0^0 y(t) = \beta_0 u(t).$$

Считаем, что измеряются положение и скорость объекта: y и $\dot{y}$, т. е. $d = 1$. Положим

$$\rho = 1, \quad A^*(s) = a_2^* s^2 + a_1^* s + a_0^*, \quad B^*(s) = a_0^*.$$

Тогда

$$H(s) = s + a_1^*, \quad R(s) = \frac{a_0^*}{s}.$$

Заключение. В данной работе развивается новый подход в задачах синтеза САУ с большим коэффициентом усиления. В его основе лежит двухконтурная структура системы: внутренний контур обеспечивает робастную коррекцию объекта как предварительный этап решения задачи управления, а внешний — достижение цели управления. Важнейшее преимущество этого подхода — устранение фактора неопределённости в переформулированной задаче управления скорректированным объектом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
2. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Алгоритмы синтеза робастного управления динамическими системами. Нижний Новгород: ННГУ, 2007. 88 с.
3. **Tsypkin Y. Z., Polyak B. T.** High-gain robust control // European Journ. Control. 1999. **5**, Is. 1. P. 3–9.
4. **Polderman J. W., Mareels I. M. Y.** Robustication of high gain adaptive control // Proc. of the 6th European Control Conference. Porto, Portugal, 2001. P. 2428–2432.
5. **Krishnamurthy P., Khorrami F.** Dynamic high-gain scaling: State and output feedback with application to systems with ISS appended dynamics driven by all states // IEEE Trans. Automat. Contr. 2004. **49**, N 12. P. 2219–2239.
6. **Yamaguchi T., Shimizu K.** Asymptotic stabilization by PID control: Stability analysis based on minimum phase and high-gain feedback // Elec. Eng. Japan. 2006. **156**, Is. 1. P. 44–53.
7. **Ilchmann A., Ryan E.** High-gain control without identification: A survey // GAMM-Mitteilungen. 2008. **31**, N 1. P. 115–125.
8. **Berger T., Ilchmann A., Reis T.** Normal forms, high-gain, and funnel control for linear differential-algebraic systems // Control and Optimization with Differential-Algebraic Constraints /Eds. L. T. Biegler, S. L. Campbell, V. Mehrmann. Philadelphia: SIAM, 2012. Ser. Advances in Design and Control. Vol. 23. P. 127–164.
9. **Рустамов Г. А.** K_∞-робастные системы управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. № 7. С. 435–442.
10. **Востриков А. С., Французова Г. А.** Теория автоматического регулирования. М.: Высш. шк., 2004. 365 с.
11. **Востриков А. С.** Проблема синтеза регуляторов для систем автоматики: состояние и перспективы // Автометрия. 2010. **46**, № 2. С. 3–19.

12. **Крутько П. Д.** Обратные задачи динамики в теории автоматического управления: Цикл лекций. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
13. **Мееров М. В.** О системах авторегулирования, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления // АиТ. 1947. № 4. С. 225–242.
14. **Мееров М. В.** Синтез структур систем автоматического управления высокой точности. М.: Наука, 1967. 424 с.
15. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Метод больших коэффициентов усиления и эффект локализации движений в задачах синтеза систем автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 2. С. 2–10.
16. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Робастная коррекция в системах управления с большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 12. С. 3–10.
17. **Солодовников В. В., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Анализ компенсационного подхода к синтезу систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. 1979. № 2. С. 27–32.

Поступила в редакцию 24 февраля 2015 г.