

УДК 519.245

Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения*

А.Ю. Амбос

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090
E-mail: ambos.andrey@gmail.com

Амбос А.Ю. Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 19–32.

Построены новые алгоритмы статистического моделирования переноса излучения через стохастические однородные изотропные среды различных типов. Для этого разработана специальная геометрическая реализация “метода максимального сечения”, позволяющая учитывать поглощение излучения весовым экспоненциальным множителем. Теоретически и с помощью вычислительных экспериментов изучена зависимость функционалов решения интегрального уравнения переноса, таких как средняя вероятность прохождения, от корреляционной длины и типа поля. Доказана теорема об их сходимости к соответствующим функционалам для осредненного поля при уменьшении корреляционной длины до нуля.

DOI: 10.15372/SJNM20160102

Ключевые слова: пуассоновский ансамбль, случайное поле, корреляционная длина, перенос излучения, метод максимального сечения.

Ambos A.Yu. Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and problems of radiative transfer // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 19–32.

The new algorithms of statistical modeling of radiative transfer through different types of stochastic homogeneous isotropic media have been created. To this end a special geometric implementation of “the maximum cross-section method” has been developed. This implementation allows one to take into account the radiation absorption by the exponential multiplier factor. The dependence of a certain class of solution functionals of the radiative transfer equation on the correlation length and the field type is studied theoretically and by means of numerical experiments. The theorem about the convergence of these functionals to the corresponding functionals for an average field with decreasing the correlation length up to zero has been proved.

Keywords: Poisson ensemble, random field, correlation function, radiative transfer, maximum cross-section method.

1. Формулировка задач

Целью настоящей работы является детальное исследование переноса частиц (квантов излучения) с рассеянием через стохастические среды. В качестве моделей сред рассматриваются два типа случайных полей: мозаичные случайные поля Вороного и Пуассона (см. далее пункт 2). Распределение “свободного пробега” частицы между столкновениями

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00746, № 15-01-00894А), Гранта № НШ-5111.2014.1, Программы фундаментальных исследований РАН № 43.

связано с его оптической длиной $\tau(l) = \int_0^l \sigma(\mathbf{r}(t)) dt$, где $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{u}$, а \mathbf{u} — направление пробега (см. пункт 3), поэтому имеет место гипотеза о том, что среднее значение для таких функционалов, как вероятность прохождения частицы, в значительной степени определяется “корреляционной длиной”, т. е. одномерным интегралом от корреляционной функции среды. В связи с этим были проведены различные тестовые контрольные расчеты методом Монте-Карло с целью изучить зависимость средних значений функционалов и их флуктуаций от типа поля, типа источника частиц и корреляционной длины (см. пункт 3).

В расчетах методом Монте-Карло траектории квантов необходимо строить в геометрически сложных реализациях случайных сред. С этой целью в работе использован так называемый “метод максимального сечения”, требующий здесь идентификации элемента разбиения (ячейки), в котором происходит столкновение частицы, для определения реализации случайной плотности среды. Для этого были разработаны специальные алгоритмы для моделирования двух типов мозаичных случайных полей, алгоритмы идентификации элемента разбиения и алгоритмы для вычисления “оптической длины поглощения” $\tau_c(t, \mathbf{L})$ (см. пункт 3).

В работе также доказана теорема о пределе при уменьшении корреляционной длины до нуля для достаточно широкого класса функционалов решения интегрального уравнения переноса для плотности столкновений частиц (см. пункт 5). Отметим, что похожая задача решалась для уравнения диффузии (см., например, [9]).

2. Вычислительные модели однородных изотропных случайных полей

Наиболее естественными для исследования проблем, связанных с каким-либо хаосом, представляются модели, в некотором смысле основанные на пуассоновских случайных точечных потоках (пуассоновских точечных полях). В данной работе будут рассмотрены две модели мозаичных случайных полей (см. рис. 1). Мозаичные случайные поля строятся на основе некоторого разбиения пространства на ячейки с определением значения поля в каждой ячейке согласно некоторому распределению независимо от остальных ячеек.

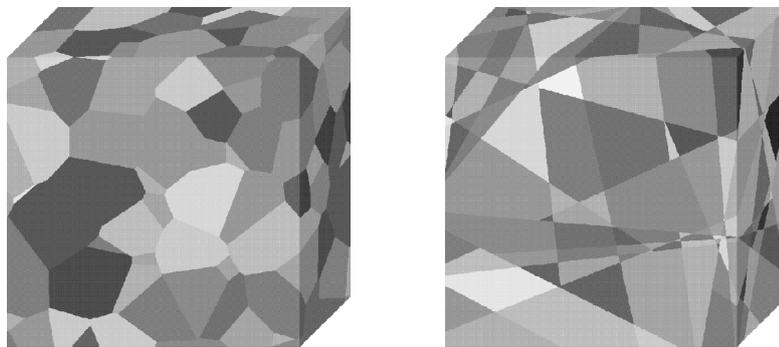


Рис. 1. Реализации мозаичного поля Вороного (слева) и мозаичного поля Пуассона (справа)

Первая рассматриваемая модель, которая будет далее называться мозаичным полем Вороного, строится на основе пуассоновского точечного потока, который определяет раз-

биение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек наиболее близких к одной из точек пуассоновского точечного потока (диаграмма Вороного). В качестве метрики используется обычное евклидово расстояние.

Во второй модели, называемой далее мозаичным полем Пуассона, пространство разбивается на ячейки ансамблем базовых гиперплоскостей, в котором гиперплоскость определяется точкой пуассоновского точечного потока во вспомогательном параметрическом пространстве. Точка этого пространства объединяет расстояние h от заданного центра до базовой гиперплоскости и направление ее “внешней”, т. е. направленной от центра, нормали \mathbf{n} к базовой гиперплоскости.

Геометрические свойства таких разбиений для обеих моделей детально изучены в [14] (см. также [10, 13, 15]). Отметим, что для обеих моделей ячейки являются выпуклыми многогранниками.

В работе [15] (см. также [8]) рассматривается вторая модель мозаичного поля и строится кусочно-постоянное двумерное случайное поле с экспоненциальной корреляционной функцией. В работе [10] рассматривается обобщение этого поля и строится l -мерное кусочно-постоянное экспоненциально коррелированное случайное поле, а также показывается его однородность и изотропность в узком смысле для $l \geq 2$.

Обозначим: $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ — мозаичное поле Вороного, $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$ — мозаичное поле Пуассона, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Для реализации поля $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ строится пуассоновский точечный поток в пространстве \mathbb{R}^3 с параметром λ_v , а для $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$ — точечный поток в пространстве $\mathbb{R}^+ \times S^{(3)}$ с параметром λ_p , где $S^{(3)}$ — единичная сфера в \mathbb{R}^3 с центром в начале координат. Затем для обоих полей пространство \mathbb{R}^3 разбивается на ячейки, как указано выше, и для каждой ячейки независимо выбирается случайное значение поля $\sigma(\mathbf{r})$ согласно некоторому распределению со средним значением $E\sigma$ и дисперсией $D\sigma$. Отметим, что для второй модели каждая подобласть полностью определяется (идентифицируется) набором

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots), \quad \gamma_k = \text{sign}(F_k(\mathbf{r})), \quad (2.1)$$

где $F_k(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}_k, [h_k \mathbf{n}_k - \mathbf{r}]) = 0$ — уравнение соответствующей плоскости Γ_k , а \mathbf{r} — произвольная точка подобласти.

Особую роль в прикладных исследованиях играет корреляционная длина $\rho = \int_0^\infty K(r) dr$, где $K(r)$ — корреляционная функция, определяемая по формуле

$$K(r) = \frac{1}{D\sigma} \left(E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')] - (E\sigma)^2 \right), \quad r = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|.$$

Для мозаичных случайных полей, если через A_r обозначить событие, состоящее в том, что точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' находятся в одной ячейке, где r — расстояние между точками, то

$$\begin{aligned} E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}')] &= E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') | A_r] P(A_r) + E[\sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') | \bar{A}_r] P(\bar{A}_r) \\ &= E\sigma^2 P(A_r) + (E\sigma)^2 (1 - P(A_r)) = D\sigma P(A_r) + (E\sigma)^2, \end{aligned}$$

и следовательно, $K(r) = P(A_r)$.

В работе [13] для мозаичного поля Вороного аналитически найдена вероятность $P(A_r)$:

$$P(A_r) = \lambda \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\lambda V(R,u)r^3} 6\pi \sin(u) R^2 dR du,$$

где $V(R, u)$ — объем объединения двух шаров с центрами на расстоянии 1 с радиусами R и $\sqrt{R^2 + 1 - 2R \cos(u)}$. С помощью этой формулы в [13] найдена величина

$\int_0^\infty P(A_r) 2 dr = 2\rho_v$ — средняя длина отрезка прямой в ячейке

$$2\rho_v = \lambda_v^{-1/3} 4\pi\Gamma(4/3) \int_0^\pi \int_0^\infty V(R, u)^{-4/3} \sin(u) R^2 dR du \approx 0.919 \lambda_v^{-1/3}.$$

Отсюда для мозаичного поля Вороного корреляционная длина $\rho_v \approx 0.459 \lambda_v^{-1/3}$.

Для мозаичного поля Пуассона $P(A_r) = e^{-\pi\lambda_p r}$ (см., например, [10, 14]), т. е. корреляционная функция является экспоненциальной. Следовательно, $\rho_p = 1/(\pi\lambda_p)$.

Хотя корреляционная функция мозаичного поля Вороного не является экспоненциальной, однако расчеты показывают, что она близка к ней (см. пункт 4, табл. 1).

3. Алгоритмы моделирования траекторий в случайной среде

1. Построенные в п. 2 случайные поля можно использовать для решения задач радиационного баланса в стохастических средах с полным коэффициентом ослабления излучения $\sigma(\mathbf{r})$ методом Монте-Карло [4].

Длина χ свободного пробега кванта из точки \mathbf{r}' в направлении \mathbf{u} распределена “неравномерно экспоненциально” с плотностью

$$f_\chi(t; \mathbf{r}', \mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{r}' + t\mathbf{u}) \exp(-T(t; \mathbf{r}', \mathbf{u})), \quad (3.1)$$

где $T(t; \mathbf{r}', \mathbf{u}) = \int_0^t \sigma(\mathbf{r}' + t'\mathbf{u}) dt'$. Соответствующая этой плотности функция распределения определяется выражением $F_\chi(t; \mathbf{r}', \mathbf{u}) = 1 - e^{-T(t; \mathbf{r}', \mathbf{u})}$. Предполагается, что $T(+\infty; \mathbf{r}', \mathbf{u}) = +\infty$; для этого среда дополняется до R^3 абсолютным поглотителем. Стандартная моделирующая формула $l = F_\chi^{-1}(\alpha)$, сводящаяся к решению уравнения $T(l; \mathbf{r}', \mathbf{u}) = -\ln \alpha$, для мозаичных полей $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ и $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$ затруднена тем, что требует вычисления и анализа расстояний от \mathbf{r}' в направлении \mathbf{u} до плоскостей, разделяющих ячейки. Однако достаточно эффективным может оказаться “метод максимального сечения” [12], реализация которого строится в предположении $\sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_m$.

Для модифицированной среды длина пробега моделируется по формуле $l = -\ln \alpha / \sigma_m$. В полученной таким образом точке “столкновения” с вероятностью $\sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$ моделируется “физическое” столкновение, а с вероятностью $1 - \sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$ фиксируется “дельта-рассеяние”, т. е. далее строится новый пробег в том же направлении. Заметим, что метод максимального сечения непосредственно вытекает из того известного факта, что “проживание” с вероятностью $1 - \sigma(\mathbf{r})/\sigma_m$ пуассоновского точечного потока интенсивности σ_m дает пуассоновский поток интенсивности $\sigma(\mathbf{r})$, “время ожидания” для которого распределено с плотностью (3.1) (см., например, [1]).

Среднее число фиктивных столкновений на траектории ограничено, например если $\sigma(\mathbf{r})/\sigma_m \geq \varepsilon > 0$ и вероятность “выживания” кванта (в точке физического столкновения) $q(\mathbf{r}) \leq q_0 < 1$. При таком способе моделирования траекторий в алгоритме двойной рандомизации $\sigma(\mathbf{r})$ достаточно выбирать лишь для тех подобластей, в которых происходят столкновения. Ясно, что для мозаичных полей это может радикально сократить трудоемкость моделирования сравнительно с полным построением реализации $\sigma(\mathbf{r})$.

Метод максимального сечения обычно реализуется следующим образом:

- (1) $t := 0$; $\alpha := \text{rand}$;
- (2) пока $\alpha \geq (\sigma(\mathbf{r}(t))/\sigma_m)$ делаем $\{t := t - (\ln(\text{rand})/\sigma_m)$; $\alpha := \text{rand}\}$;
- (3) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}' + t\mathbf{u}$.

Здесь `rand` — процедура, которая при обращении к ней вычисляет новое псевдослучайное число α . Как указано в [1], количество используемых значений α здесь можно сократить, используя тот факт, что случайное число циклов процедуры (3.2) имеет неоднородное геометрическое распределение с вероятностью p_t , которая после перехода $t' \mapsto t$ рекуррентно перевычисляется по формуле $p_t = p_{t'} \left(\frac{\sigma(\mathbf{r}(t))}{\sigma(\mathbf{r}(t'))} \right) \left(1 - \frac{\sigma(\mathbf{r}(t'))}{\sigma_m} \right)$, причем начальное значение вероятности равно $\sigma(\mathbf{r}(t))/\sigma_m$. Соответствующее распределение можно моделировать стандартным методом, который реализуется здесь алгоритмом [1]:

- (1) $t := 0$; $\alpha := \text{rand}$; $p := 1 - \sigma(\mathbf{r}(t))/\sigma_m$;
- (2) пока $\alpha \leq p$ делать $\{t := t - \ln(\text{rand})/\sigma_m$; $p := p(1 - \sigma(\mathbf{r}(t))/\sigma_m)\}$;
- (3) $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}' + \mathbf{u}t$.

Такой алгоритм расширяет возможности коррелирования оценок для различных вариантов задачи (см. [11]).

2. Рассмотрим теперь алгоритм статистического моделирования переноса частиц, в котором поглощение учитывается экспоненциальным весовым множителем (см., например, [6]). Предполагается, что $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_c(\mathbf{r})$, где $\sigma_s(\mathbf{r})$ — коэффициент рассеяния, а $\sigma_c(\mathbf{r})$ — коэффициент поглощения. В рассматриваемом алгоритме траектория $\mathbf{L} : \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t)$, $t > 0$, строится для $\sigma_c \equiv 0$ (т. е. при $\sigma \equiv \sigma_s$) и вычисляется вспомогательный вес

$$J(t; \mathbf{L}) = e^{-\tau_c(t; \mathbf{L})}, \quad \tau_c(t; \mathbf{L}) = \int_0^t \sigma_c(\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(s)) ds. \quad (3.3)$$

Учитывая вклад траектории с весом (3.3), получаем несмещенные оценки изучаемых функционалов. Такие оценки могут быть сравнительно эффективными. Это видно из того, что в случае “дельта рассеяния” при мононаправленном точечном источнике соответствующая оценка вероятности прохождения имеет нулевую дисперсию. Экспоненциальный учет поглощения особенно полезен для оценки влияния малого изменения толщины слоя среды на вероятность прохождения.

Для среды с кусочно-постоянным коэффициентом $\sigma_c(\mathbf{r})$ справедливо равенство $\tau_c(t; \mathbf{L}) = \sum_i \sigma_{c,i} l_i$, где l_i — длина участка траектории в подобласти с коэффициентом $\sigma_{c,i}$. Таким образом, возникает задача вычисления длин $\{l_i\}$ при использовании “метода максимального сечения”.

3. Рассмотрим теперь геометрические алгоритмы моделирования траектории частицы в слое вещества $0 \leq x \leq H_2$, $-H_1 \leq y, z \leq H_1$ для мозаичных полей Вороного и Пуассона.

Построить реализацию мозаичного поля Вороного можно достаточно легко следующим алгоритмом:

- (1) моделируется пуассоновское число k точек случайного пуассоновского потока $\{\mathbf{r}^{(i)}\}$ согласно параметру $\lambda_v H_1^2 H_2$;
- (2) моделируется k векторов вида (x, y, z, σ) по формулам: $x := \text{rand} H_2$, $y := (1 - 2 \text{rand}) H_1$, $z := (1 - 2 \text{rand}) H_1$, $\sigma := F_\sigma^{-1}(\text{rand})$, где F_σ^{-1} — обратная функция для функции распределения F_σ значений поля в ячейках.

Значение поля σ в точке \mathbf{r} определяется номером ячейки $\arg \min_{i=1, \dots, k} \|\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}\|$.

Такой алгоритм может быть достаточно трудоемким, поэтому значения σ целесообразно моделировать по мере необходимости. Поскольку при моделировании пуассоновского потока точек в ограниченной области мозаичное поле Вороного не является однородным и изотропным, то пуассоновский поток точек следует моделировать в области

большого размера, чтобы мозаичное поле в искомом слое было близко к однородному и изотропному.

Построить реализацию мозаичного поля Пуассона несколько сложнее. Базовые плоскости поля, т. е. точки $\{h_i \mathbf{n}_i\}$, моделируются следующим алгоритмом:

- (1) моделируется пуассоновское число k базовых плоскостей согласно параметру $\Lambda(\Omega) = 4\pi d$, где Ω — достаточно большой шар радиуса d , содержащий искомую область, а Λ — его мера в параметрическом пространстве $\mathbb{R}^+ \times S^{(3)}$ (см. [10]);
- (2) моделируется k векторов вида (h, n_1, n_2, n_3) по формулам: $h := d \text{rand}$, $n_1 := 1 - 2 \text{rand}$, $\alpha := \text{rand}$, $n_2 = \sqrt{1 - n_1^2} \cos(2\pi\alpha)$, $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2} \sin(2\pi\alpha)$.

Значение поля σ в точке \mathbf{r} определяется последовательностью $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ из (2.1). Хранить значения поля для всех вариантов последовательностей практически неэффективно, поэтому их можно хранить в виде “дерева” — связанного ациклического графа, где ветвления строятся и выбираются в зависимости от знаков $\{\gamma_i\}$.

Соответствующий алгоритм можно реализовать следующим образом (описание алгоритма дается частично в терминах C++). Граф строится из объектов “Node” с параметрами “Node.Sigma” — значение поля σ , и “Node.NextNode1”, “Node.NextNode2” — указателей на следующие узлы. И при создании нового такого объекта полагается

$$\text{Node.NextNode1} := \text{NULL}, \quad \text{Node.NextNode2} := \text{NULL},$$

где NULL — это нулевой указатель.

Параметр “Sigma” не задается при создании нового объекта, так как он имеет смысл только для узлов-листьев, т. е. только для небольшой части всех узлов.

В начале программы создается корневой узел “StartNode” и указатель на текущий узел “CurrentNode”. Тогда алгоритм, который выдает значение σ в точке \mathbf{r} , будет выглядеть так.

- (1) Найти набор $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$, соответствующий точке \mathbf{r} .
- (2) $\text{CurrentNode} := \text{*StartNode}$, где “*StartNode” — указатель на объект “StartNode”.
- (3) Для i от 1 до k делать
 - (3.1) Если $\gamma_i < 0$, то
 - (3.1.1) Если $\text{CurrentNode.NextNode1} = \text{NULL}$, то
 - (3.1.1.1) создать новый узел NewNode .
 - (3.1.1.2) Если $i = k$, то $\text{NewNode.Sigma} := F_\sigma^{-1}(\text{rand})$,
 - (3.1.1.3) $\text{CurrentNode.NextNode1} := \text{*NewNode}$.
 - (3.1.2) $\text{CurrentNode} := \text{CurrentNode.NextNode1}$.
 - (3.2) Иначе
 - (3.2.1) Если $\text{CurrentNode.NextNode2} = \text{NULL}$, то
 - (3.2.1.1) создать новый узел NewNode .
 - (3.2.1.2) Если $i = k$, то $\text{NewNode.Sigma} := F_\sigma^{-1}(\text{rand})$,
 - (3.2.1.3) $\text{CurrentNode.NextNode2} := \text{*NewNode}$.
 - (3.2.2) $\text{CurrentNode} := \text{CurrentNode.NextNode2}$.

Когда алгоритм закончит работу, значение параметра “CurrentNode.Sigma” и будет искомым.

Заметим, что узлы, соответствующие заданной последовательности $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$, строятся не более одного раза и потому значение “Node.Sigma” соответствующего узла-листа вычисляется только один раз для каждой реализации поля (нет перебора).

4. После каждого моделирования свободного пробега из точки \mathbf{x} в точку \mathbf{y} используются следующие рекуррентные алгоритмы $F_\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вычисления соответствующего вклада τ_c^+ в $\tau_c(t; \mathbf{L}) = \int_0^t \sigma_c(\mathbf{r}_L(s)) ds$.

Для мозаичного поля Вороного:

(1) Найти номера ячеек, содержащих \mathbf{x} и \mathbf{y} , и соответствующие точки пуассоновского потока \mathbf{X} и \mathbf{Y} , определяющие эти ячейки.

(2.1) Если $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, то $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x})$.

(2.2) Иначе

(2.2.1) Найти точку пересечения плоскости, разделяющей ячейки, соответствующие \mathbf{X} и \mathbf{Y} , и отрезка $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ по формуле $\mathbf{z} := \mathbf{x} + \frac{0.5(\mathbf{Y} - \mathbf{X})(\mathbf{X} + \mathbf{Y} - 2\mathbf{x})}{(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{Y} - \mathbf{X})}(\mathbf{y} - \mathbf{x})$.

(2.2.2.1) Если \mathbf{z} принадлежит ячейке, соответствующей \mathbf{X} или \mathbf{Y} , то $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|\sigma(\mathbf{y})$.

(2.2.2.2) Иначе запустить $F_\tau^{(v)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и $F_\tau^{(v)}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Для мозаичного поля Пуассона:

(1) Найти число n базовых плоскостей, разделяющих \mathbf{x} и \mathbf{y} (плоскость Γ_i разделяет эти точки, если значение γ_i для них разное).

(2.1) Если $n = 0$, то $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x})$.

(2.2) Если $n = 1$, то вычислить точку пересечения \mathbf{z} отрезка и плоскости по формуле $\mathbf{z} := \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})\frac{p + n\mathbf{x}}{n(\mathbf{y} - \mathbf{x})}$ и $\tau_c^+ := \tau_c^+ + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|\sigma(\mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|\sigma(\mathbf{y})$.

(2.3) Если $n \geq 2$, то запустить $F_\tau^{(p)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}\right)$, $F_\tau^{(p)}\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}, \mathbf{y}\right)$.

4. Вычислительные эксперименты

Рассматривается перенос частиц через плоский слой вещества $0 < x < 20$; $-100 < y, z < 100$ с коэффициентом ослабления $\sigma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, причем $\sigma(\mathbf{r})$ — мозаичное случайное поле Вороного или Пуассона (см. пункт 2). Предполагается, что $\sigma_s(\mathbf{r}) = 0.9\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma_c(\mathbf{r}) = 0.1\sigma(\mathbf{r})$, где σ_c — коэффициент поглощения, а σ_s — коэффициент рассеяния с заданной индикатрисой $g(\mu)$ такой, что величина $\mu_0 = \int_{-1}^1 \mu g(\mu) d\mu$ не сильно отличается от единицы, т. е. рассеяние существенно анизотропно. В качестве функционала рассматривается вероятность $P(\sigma)$ прохождения частицы через слой; требуется оценить среднюю (по распределению σ) вероятность $P_0 = EP(\sigma)$.

В качестве распределения для значений поля рассматривается “бернуллевское” одномерное распределение:

$$P(\sigma = 0) = \frac{16}{116} \approx 0.138, \quad P(\sigma = 1.16) \approx 0.862, \quad E\sigma = 1, \quad D\sigma = 0.16, \quad (4.1)$$

т. е. мозаичные поля рассматриваются в качестве моделей “разорванной облачности” (см., например, [2]).

Во всех вариантах расчета рассеяние моделировалось согласно индикатрисе Хенни-Гринштейна для $\mu_0 = 0.9$, как в [5].

Далее везде в п. 4 через N будет обозначено число реализаций случайных сред. Во всех таблицах среднеквадратическая погрешность вычисления (“одна сигма”) имеет порядок последнего приведенного знака.

В табл. 1 и на рис. 2 для различных значений r приведены оценки корреляционной функции $K^{(v)}(r)$ мозаичного поля Вороного $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ и точные значения $K^{(p)}(r)$ для мозаичного поля Пуассона $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$, вычисленные по формуле $K^{(p)}(r) = e^{-\pi\lambda_p r}$.

Таблица 1. Оценки $K^{(v)}(r)$ и точные значения $K^{(p)}(r)$, $N = 10^6$, $\rho = 3.6$

r	$K^{(v)}(r)$	$K^{(p)}(r)$
2	0.6718	0.5737
4	0.3955	0.3291
6	0.1953	0.1888
8	0.0748	0.1083
10	0.0203	0.0621

Таблица 2. Зависимость средней вероятности прохождения P_0 от ρ

ρ	$P_0^{(v)}$	$P_0^{(p)}$	отн. разн.
1/4	—	0.025	—
1	—	0.027	—
2	0.0317	0.0321	−1.3%
3.6	0.0413	0.0424	−2.6%
5	0.0514	0.0516	−0.4%

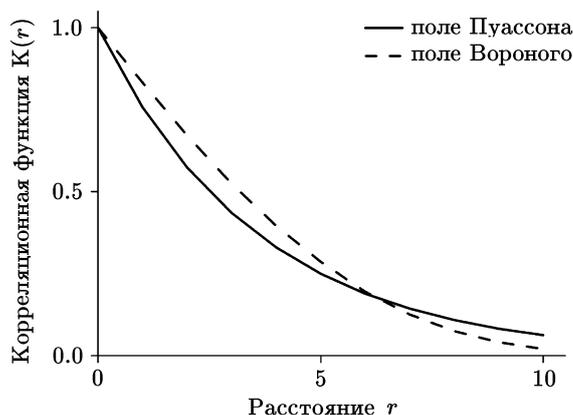


Рис. 2. Графики корреляционных функций $K^{(v)}(r)$ и $K^{(p)}(r)$

Параметры полей λ_v и λ_p были выбраны так, что для обоих полей корреляционная длина $\rho = 3.6$. Расчеты показывают, что корреляционные функции двух полей довольно близки.

В табл. 2 приведены оценки средней вероятности прохождения P_0 в зависимости от корреляционной длины ρ для мозаичных полей Вороного $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ и Пуассона $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$.

Для оценок использовался стандартный алгоритм двойной рандомизации (см. [7], подпункт 4.7), и для каждой реализации случайной среды моделировались две условно

независимые траектории частицы, что позволяет оценивать $EP(\sigma)$ и $EP^2(\sigma)$. При этом была использована оценка вида (3.3), т. е. траектории моделировались для рассеивательной радиационной модели $\sigma \equiv \sigma_s$. Для $\rho = 2, 3.6, 5$ расчеты были проведены для обоих типов полей с $N = 10^6$, а для $\rho = 1/4, 1$ расчеты проводились только для мозаичного поля Пуассона с $N = 10^4$, так как моделирование переноса излучения для поля Вороного для малых ρ слишком трудоемко (см. табл. 4).

Как показывают расчеты, разница между вероятностями P_0 для двух моделей относительно невелика. Это подтверждает гипотезу о том, что для средних значений функционалов решения уравнения переноса излучения в мозаичном случайном поле существенным является значение параметра ρ и распределение значений поля в ячейках, а геометрия поля на траекторию частицы влияет мало. Это позволяет сделать вывод, что для изучения переноса частиц в однородном изотропном случайном поле целесообразно ограничиться мозаичным полем Пуассона, так как перенос излучения для него моделируется сравнительно быстро.

Расчеты из табл. 2 также показывают, что для обоих полей вероятность P_0 сходится к вероятности $P_0^{(d)} \approx 0.0239$ прохождения для детерминированного слоя с $\sigma^{(d)}(\mathbf{r}) \equiv p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2 = 1.0$, что согласуется с утверждением доказанной в п. 5 теоремы.

Для полей $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ и $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$ были также оценены значения $\sqrt{DP(\sigma)}$ для источников частиц, равномерно распределенных в квадратах $x = 0; -H < y, z < H$ для различных значений H . Они приведены в табл. 3.

Таблица 3. Зависимость $\sqrt{DP(\sigma)}$ от H , $N = 10^6, \rho = 3.6$

H	$\sqrt{DP(\sigma^{(v)})}$	$\sqrt{DP(\sigma^{(p)})}$
0	0.0599	0.0717
20	0.0130	0.0224
40	0.0076	0.0140

Таблица 4. Зависимость времени моделирования t от $\rho, N = 10^4$

ρ	$t^{(v)}$	$t^{(p)}$
2	506.4	11.2
3.6	80.7	5.1
5	28.2	3.5

Величины $DP(\sigma)$ определяют практически важные флуктуации величины $P(\sigma)$, соответствующие флуктуациям случайного поля. Для оценки $\sqrt{DP(\sigma)}$ для каждой реализации среды моделировались две условно независимые траектории и осреднялось соответствующее произведение случайных оценок (см. [7, п. 4.7]).

Расчеты из табл. 3 подтверждают естественное предположение (эргодического типа) о том, что в случае бесконечно протяженного по (y, z) слоя для распределенного на площади S источника с вероятностью 1 выполняется соотношение $P(\sigma)/P_0 \rightarrow 1$ при $S \rightarrow +\infty$. Отметим, что величину P_0 целесообразно оценивать для локализованного источника, так как при этом можно моделировать мозаичное поле для сравнительно неширокого по (y, z) слоя.

В табл. 4 приведено время в секундах, необходимое для реализации 10^4 пар траекторий частиц для случайно выбранных реализаций среды в зависимости от корреляционной длины ρ для полей Вороного $\sigma^{(v)}(\mathbf{r})$ и Пуассона $\sigma^{(p)}(\mathbf{r})$.

Как видно из таблицы, перенос излучения для мозаичного поля Пуассона моделируется существенно быстрее, чем для мозаичного поля Вороного, и при уменьшении ρ разница времени моделирования увеличивается. По всей видимости, это связано с тем, что число точек пуассоновского потока для мозаичного поля Вороного возрастает пропорционально $\lambda_v \approx (0.459/\rho_v)^3$, а для мозаичного поля Пуассона — пропорционально $\lambda_p = 1/(\pi\rho_p)$.

5. Предельные соотношения для мозаичных случайных полей

Поскольку рассматриваемые мозаичные поля являются однородными и изотропными, то для одномерного интеграла $\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int_0^l \sigma(\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t)) dt$ по произвольному отрезку $\mathbf{L} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}]$ длины l : $\mathbf{r}_{\mathbf{L}}(t)$, $t \in [0, l]$, выполняется оценка (см., например, [3, формула (18.3.1)]):

$$D\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \leq 2l\rho D\sigma.$$

Следовательно,

$$D\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

и

$$\text{l.i.m.}_{\rho \rightarrow 0} \tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = lE\sigma, \quad (5.1)$$

где l.i.m. обозначает сходимость в среднеквадратичном.

Поскольку параметр λ для мозаичных полей Вороного и Пуассона является по сути параметром масштаба (см., например, [14]), то при $\rho \rightarrow 0$ диаметры клеток по вероятности стремятся к нулю. Следовательно, если зафиксировать точку \mathbf{r} и число $\delta > 0$, то для диаметров $d_{\mathbf{r}}$ клеток, содержащих \mathbf{r} , выполняется соотношение

$$P(d_{\mathbf{r}} > \delta) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \quad (5.2)$$

Как и в п. 4, рассмотрим задачу переноса излучения через плоский ограниченный слой D толщины H с коэффициентом ослабления $\sigma(\mathbf{r})$. Пусть $f(\mathbf{x})$ — нормированная (возможно обобщенная) плотность источника столкновений в $X = D \times S^{(3)}$, т. е. $f \in N(X)$, где $N(X)$ — пространство обобщенных плотностей мер ограниченной вариации. Пусть, кроме того, рассматривается функционал $I_{\sigma} = (\varphi_{\sigma}, h_{\sigma})$, где φ_{σ} — решение интегрального уравнения переноса для плотности столкновений частиц $\varphi_{\sigma} = K_{\sigma}\varphi_{\sigma} + f$ с ядром

$$k_{\sigma}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{r}) \exp(-\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r})) q \frac{g((\mathbf{u}', \mathbf{u}))}{2\pi} \delta\left(\mathbf{u}' - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right) |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2},$$

причем $\|K_{\sigma}\| \leq q$, где $q \equiv \sigma_s(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r})$ — вероятность выживания частицы после столкновения, $h_{\sigma} \in C(X)$. Тогда для мозаичных случайных полей $\sigma(\mathbf{r})$ с указанными выше свойствами можно сформулировать теорему.

Теорема. Пусть $\sigma(\mathbf{r})$ — однородное изотропное мозаичное случайное поле со свойствами (5.1), (5.2) и $0 \leq \sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_{\max} < \infty$, $E\sigma = a$. Пусть, кроме того, для почти всех \mathbf{x} имеет место сходимость по вероятности $h_{\sigma}(\mathbf{x}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x})$. Тогда

$$\text{l.i.m.}_{\rho \rightarrow 0} I_{\sigma} = I_{\sigma^{(d)}},$$

где $\sigma^{(d)}(\mathbf{r})$ — детерминированное поле $\sigma^{(d)}(\mathbf{r}) \equiv a$.

Доказательство. Поскольку решение φ_{σ} представимо в виде ряда Неймана $\varphi_{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} K_{\sigma}^n f$, то $I_{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{\sigma}^n f, h_{\sigma})$ и последний ряд мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \|h_{\sigma}\|_{C(X)}$. Следовательно, достаточно доказать сходимость в среднеквадратичном для одного слагаемого суммы.

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} D(K_\sigma^n f, h_\sigma) &= E(K_\sigma^n f, h_\sigma)^2 - (E(K_\sigma^n f, h_\sigma))^2 \\ &= \int_{X^n} \int_{X^n} \left(E \left[f(\mathbf{x}_0) h_\sigma(\mathbf{x}_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) f(\mathbf{x}'_0) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}'_{k+1}) \right] - \right. \\ &\quad E \left[f(\mathbf{x}_0) h_\sigma(\mathbf{x}_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \right] \times \\ &\quad \left. E \left[f(\mathbf{x}'_0) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) \prod_{k=0}^{n-1} k_\sigma(\mathbf{x}'_k, \mathbf{x}'_{k+1}) \right] \right) d\mathbf{x}_0 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{x}'_0 \dots d\mathbf{x}'_n. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для фиксированных наборов $(\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_n)$ и $(\mathbf{x}'_0 \dots \mathbf{x}'_n)$ зависящая от случайного поля $\sigma(\mathbf{r})$ часть подинтегрального выражения определяется значениями σ в точках ломаных L и L' с вершинами $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n$ и $\mathbf{r}'_0, \dots, \mathbf{r}'_n$ соответственно. Следовательно, достаточно рассмотреть следующее выражение:

$$\begin{aligned} E \left[h_\sigma(\mathbf{x}_n) h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L)} e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \sigma(\mathbf{r}'_k) \right] - \\ E \left[h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \right] E \left[h_\sigma(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}'_k) \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\tau(L) = \int_0^{|L|} \sigma(\mathbf{r}_L(t)) dt$, а $|L|$ — длина ломаной L .

Рассмотрим отдельно выражение $h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k)$. Пусть

$$d_{\min} = \min_{0 \leq i < j \leq n} \text{dist}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$$

есть минимум расстояний между парами вершин ломаной L . Если через A_σ обозначить событие, состоящее в том, что в каждой ячейке находится не более одной точки \mathbf{r}_k , $k = 0, \dots, n$, то $P(A_\sigma) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 1$, так как по условию для мозаичного случайного поля σ выполняется свойство (5.2) и

$$P(\bar{A}_\sigma) \leq \sum_{k=0}^n P\left(d_{r_k} > \frac{d_{\min}}{2}\right) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Следовательно,

$$E \left[\prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \right] = P(A_\sigma) \prod_{k=1}^n E \left[\sigma(\mathbf{r}_k) \mid A_\sigma \right] + P(\bar{A}_\sigma) E \left[\prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \mid \bar{A}_\sigma \right] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} a^n, \quad (5.5)$$

так как σ ограничено.

Поскольку для мозаичного случайного поля выполняется свойство (5.1), то $\text{l.i.m.}_{\rho \rightarrow 0} \tau(L) = |L|a$. Следовательно,

$$h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} h_{\sigma^{(a)}}(\mathbf{x}_n) e^{-|L|a}. \quad (5.6)$$

Поскольку σ ограничено, то из (5.5) и (5.6) следует, что

$$E \left[h_\sigma(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \right] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} h_{\sigma^{(a)}}(\mathbf{x}_n) e^{-|L|a} a^n.$$

Это можно показать по аналогии с (5.5), рассматривая

$$A_{\sigma, \varepsilon} = \left\{ \left| h_{\sigma}(\mathbf{x}_n) e^{-\tau(L)} - h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) e^{-a|L|} \right| < \varepsilon \right\}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathbb{E} \left[h_{\sigma}(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}'_k) \right] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}'_n) e^{-|L'|a} a^n$$

и

$$\mathbb{E} \left[h_{\sigma}(\mathbf{x}_n) h_{\sigma}(\mathbf{x}'_n) e^{-\tau(L)} e^{-\tau(L')} \prod_{k=1}^n \sigma(\mathbf{r}_k) \sigma(\mathbf{r}'_k) \right] \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}_n) h_{\sigma^{(d)}}(\mathbf{x}'_n) e^{-|L|a - |L'|a} a^{2n}.$$

Следовательно, выражение (5.4) стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Таким образом мы получили для подинтегрального выражения в (5.3) сходимость к нулю почти всюду, а так как найдется интегрируемая мажоранта, то, следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$D(K_{\sigma}^n f, h_{\sigma}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

и

$$\text{l.i.m.}_{\rho \rightarrow 0} (K_{\sigma}^n f, h_{\sigma}) = (K_{\sigma^{(d)}}^n f, h_{\sigma^{(d)}}),$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание. Утверждение теоремы выполняется для таких основных функционалов как вероятность прохождения $P(\sigma)$, вероятность альбеда и вероятность поглощения. Например, для $P(\sigma)$ соответствующую функцию h_{σ} можно представить в виде

$$h_{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\int_0^{\theta(\mathbf{x})} \sigma(\mathbf{r}+t\mathbf{u}) dt}, & u^z > 0, \\ 0, & u^z \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta(\mathbf{x}) = \frac{H - r^z}{u^z}$ — расстояние от \mathbf{r} до верхней границы слоя вещества в направлении \mathbf{u} . Хотя h_{σ} и является кусочно-непрерывной функцией, теорема для нее все равно выполняется, если рассматривать обычные точечные или распределенные источники, так как непрерывность h_{σ} требуется, чтобы соответствующий функционал был определен для всех $f \in N$.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю Г.А. Михайлову за постановку задачи и помощь при подготовке научной статьи.

Литература

1. **Аверина Т.А., Михайлов Г.А.** Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016. — (Averina T.A., Mikhailov G.A. Algorithms for exact and approximate statistical simulation of Poisson ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, № 6. — P. 951–962.)
2. **Зуев В.Е., Титов Г.А.** Оптика атмосферы и климат. Т. 9. — Томск: Изд-во “Спектр” ИОА СО РАН, 1996.

3. **Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.** Независимые и стационарно связанные величины. — М.: Наука, 1965.
4. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.** Методы Монте-Карло в атмосферной оптике. — Новосибирск: Наука, 1976.
5. **Михайлов Г.А.** Асимптотические оценки средней вероятности прохождения излучения через экспоненциально коррелированную стохастическую среду // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. — 2012. — Т. 48, № 6. — С. 691–697. — (Mikhailov G.A. Asymptotic estimates of the mean probability of radiative transfer through an exponentially correlated stochastic medium // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2012. — Vol. 48, № 6. — P. 618–624.)
6. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-карло. — М.: Наука, 1987. — (Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1992.)
7. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Изд-во “Академия”, 2006.
8. **Пригарин С.М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2005.
9. **Юринский В.В.** Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журнал. — 1982. — Т. 23, № 2. — С. 176–188.
10. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical simulation of an exponentially correlated many-dimensional random field // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 263–273.
11. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** New algorithms of numerical–statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2014. — Vol. 29, № 6. — P. 331–339.
12. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems // Nuclear Science and Engineering (NSE). — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
13. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. — 1962. — Vol. 33, № 3. — P. 958–972.
14. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic Press inc., 1982.
15. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36. — P. 1859–1863.

*Поступила в редакцию 26 февраля 2015 г.,
в окончательном варианте 31 марта 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Averina T.A., Mikhaylov G.A.** Algoritmy tochnogo i priblizhennogo statisticheskogo modelirovaniya puassonovskikh ansambley // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016. — (Averina T.A., Mikhaylov G.A. Algorithms for exact and approximate statistical simulation of Poisson ensembles // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 50, № 6. — P. 951–962.)
2. **Zuev V.E., Titov G.A.** Optika atmosfery i klimat. Т. 9. — Tomsk: Izd-vo “Spektr” IOA SO RAN, 1996.
3. **Ibragimov I.A., Linnik Yu.V.** Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny. — М.: Nauka, 1965.

4. **Marchuk G.I., Mikhaylov G.A., Nazaraliev M.A. i dr.** Metody Monte-Karlo v atmosfernoj optike. — Novosibirsk: Nauka, 1976.
5. **Mikhaylov G.A.** Asimptoticheskie otsenki sredney veroyatnosti prokhozheniya izlucheniya cherez eksponentsial'no korrelirovannuyu stokhasticheskuyu sredu // Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana. — 2012. — T. 48, № 6. — S. 691–697. — (Mikhailov G.A. Asymptotic estimates of the mean probability of radiative transfer through an exponentially correlated stochastic medium // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. — 2012. — Vol. 48, №. 6. — P. 618–624.)
6. **Mikhaylov G.A.** Optimizatsiya vesovykh metodov Monte-karlo. — M.: Nauka, 1987. — (Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1992.)
7. **Mikhaylov G.A., Voytishchek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — M.: Izd-vo “Akademiya”, 2006.
8. **Prigarin S.M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchaynykh protsessov i poley. — Novosibirsk: Izd-vo IVMiMG SO RAN, 2005.
9. **Yurinskiy V.V.** Ob usrednenii nedivergentnykh uravneniy vtorogo poryadka so sluchaynymi koeffitsientami // Sib. mat. zhurnal. — 1982. — T. 23, № 2. — S. 176–188.
10. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** Statistical simulation of an exponentially correlated many-dimensional random field // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 3. — P. 263–273.
11. **Ambos A.Yu., Mikhailov G.A.** New algorithms of numerical–statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2014. — Vol. 29, № 6. — P. 331–339.
12. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems // Nuclear Science and Engineering (NSE). — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
13. **Gilbert E.N.** Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. — 1962. — Vol. 33, № 3. — P. 958–972.
14. **Serra J.** Image Analysis and Mathematical Morphology. — London: Academic Press inc., 1982.
15. **Switzer P.** A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. — 1965. — Vol. 36. — P. 1859–1863.