

6. Деревич И. В. Расчет характеристик частиц в неоднородных турбулентных потоках // ИФЖ.— 1992.— Т. 62, № 4.— С. 539—545.
7. Kallio G. A., Reeks M. W. A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers // Int. J. Multiphase Flow.— 1989.— V. 15, N 3.— P. 143—146.
8. Abuzeid S., Busnaina A. A., Ahmadi G. Wall deposition of aerosol particles in a turbulent channel flow // J. Aerosol Sci.— 1991.— V. 22, N 1.— P. 43—62.
9. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Граничные условия для уравнений тепло- и массопереноса грубодисперсных аэрозолей в турбулентном потоке // ИФЖ.— 1991.— Т. 61, № 4.— С. 546—553.
10. Ерошенко В. М., Ершов А. В., Зайчик Л. И. Расчет развитого турбулентного течения в трубе со вдувом и отсосом // ТВТ.— 1981.— Т. 19, № 1.— С. 102—108.
11. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Моделирование нелокального массопереноса дисперсной примеси в турбулентных потоках газозвеси // ИФЖ.— 1990.— Т. 59, № 3.— С. 453—466.
12. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1969.
13. Young J. B., Hanratty T. J. Optical studies on the turbulent motion of solid particles in a pipe flow // J. Fluid Mech.— 1991.— V. 231.— P. 665—688.
14. Liu B. J., Agarwal J. K. Experimental observation of aerosol deposition in turbulent flow // J. Aerosol Sci.— 1974.— V. 5.— P. 145—155.
15. Ganie E. N., Mastanaiah K. Investigation of droplet deposition from a turbulent gas stream // Int. J. Multiphase Flow.— 1981.— V. 7.— P. 401—422.
16. Andreussi P. Droplet transfer in two-phase annular flow // Int. J. Multiphase Flow.— 1983.— V. 9.— P. 697—713.
17. Hagiwara Y., Sato T. An experimental investigation on liquid droplets diffusion in annular-mist flow // Multiphase Transport/Ed. T. N. Verziroglu.— N. Y., 1979.— P. 27—34.

г. Москва

Поступила 12/X 1992 г.,  
в окончательном варианте — 30/XI 1992 г.

УДК 624.131.22:533.9...15:625.7/8

А. Л. Бурка, В. Н. Ефименко

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО НАГРЕВА ГРАНУЛ СВЯЗНОГО ГРУНТА В ПОТОКАХ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

Одним из путей сохранения темпов строительства автомобильных дорог в регионах, не имеющих месторождений каменных материалов, является применение термоукрепленных грунтов в слоях земляного полотна и дорожных одежд [1]. В условиях линейного строительства автомобильных дорог в районах, где недостаточно развиты транспортные коммуникации, характерны разбросанность и удаленность производственных баз, экономически оправдана технология, связанная с укреплением предварительно гранулированных и просушенных местных связных грунтов в реакторах, оборудованных электродуговыми плазмотронами [2].

На стадии проработки технологических аспектов производства искусственного материала в электроплазменных установках представлялось важным определить оптимальные размеры частиц грунта, подаваемых в реактор, а также температурный режим, обеспечивающий преобразование состава и свойств сырья в сжатые сроки термического укрепления. Расчеты конвективного теплопереноса в частицах связного грунта, учитывающие распределение температуры по радиусу сферы, выполнены численным методом, изложенным в [3]. Анализ результатов расчетов позволил установить оптимальные условия для технологии термоукрепления грунтов, выра-

© А. Л. Бурка, В. Н. Ефименко, 1993

ботать концепцию проектирования электроплазменной установки для многотоннажной переработки грубодисперсного сырья. Однако высокотемпературные процессы обработки гранул в потоках газа, генерируемых электродуговыми плазмотронами, возможны в условиях комплексного воздействия радиационного и конвективного теплообмена. Поэтому в настоящей работе сделана попытка учесть радиационно-конвективный теплообмен при нагреве сферической частицы грунта в потоке низкотемпературной плазмы.

В этом случае краевая задача, описывающая теплообмен между высокотемпературным газовым потоком и сферической частицей, в безразмерном представлении имеет вид

$$(1) \quad \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \lambda(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) = R^2 \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t}, \quad 0 < \eta < 1, \quad t > 0;$$

$$(2) \quad \Theta(\eta, 0) = \Theta_0(\eta), \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0;$$

$$(3) \quad \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + R\alpha(\Theta - \Theta_f) + R\sigma T_*^3(\Theta^4 - \Theta_f^4) = 0, \quad \eta = 1.$$

Здесь  $\eta = r/R$ ;  $\Theta = T/T_*$ ;  $\Theta_0 = T_0/T_*$ ;  $\Theta_f = T_f/T_*$ ;  $T, T_0$  — текущая и начальная температуры частицы;  $T_f$  — температура газовой среды;  $r, R$  — радиусы частицы.

Введем функцию теплопроводности  $u(\Theta) = \int_{\Theta}^{\Theta_0} \lambda(z) dz$  и вычтем из обеих сторон уравнения (4)  $u(\Theta)$ , тогда дифференциальный оператор в левой части уравнения (1) становится линейным и задача (1) — (3) запишется в форме

$$(4) \quad \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - u = - \frac{R^2 \rho c}{\lambda(\Theta)} \frac{\partial u}{\partial t} - u, \quad 0 < \eta < 1, \quad t > 0;$$

$$(5) \quad u(\eta, 0) = \int_{\Theta}^{\Theta_0} \lambda(z) dz, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = q(\Theta), \quad \eta = 1$$

$$(q(\Theta) = -R\alpha(\Theta - \Theta_f) - R\epsilon\sigma T_*^3(\Theta^4 - \Theta_f^4)).$$

Для построения функции Грина  $G(\eta, z)$  краевую задачу (4), (5) можно записать в сопряженной форме. При этом однородная краевая задача, из которой определяется функция Грина, примет вид

$$(6) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{2}{\eta} G \right) - G = \delta(\eta, z);$$

$$(7) \quad \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{2}{\eta} G \right)_{\eta=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{2}{\eta} G \right)_{\eta=1} = 0.$$

С помощью фундаментальных решений  $y_1 = \eta \operatorname{sh} \eta$ ,  $y_2 = \eta e^\eta$  уравнения (6), каждое из которых удовлетворяет соответствующему граничному условию (7), можно построить формальное выражение

$$G(\eta, z) = \begin{cases} a(\eta) y_1(z), & z \leq \eta, \\ b(\eta) y_2(z), & z \geq \eta \end{cases}$$

для функции Грина [4]. При этом  $a(\eta) = e^\eta/\eta$ ,  $b(\eta) = \operatorname{sh} \eta/\eta$  являются решениями системы уравнений

$$a(\eta) y_1(\eta) - b(\eta) y_2(\eta) = 0, \quad a(\eta) y_1'(\eta) - b(\eta) y_2'(\eta) = -1,$$

характеризующей непрерывность и скачок производной при  $z = \eta$  для функции Грина, явное выражение которой представим как

$$(8) \quad G(\eta, z) = \begin{cases} -z \operatorname{sh} ze^\eta/\eta, & 0 < z \leq \eta, \\ -ze^z \operatorname{sh} \eta/\eta, & \eta \leq z \leq 1. \end{cases}$$

С помощью функции Грина (8) краевую задачу (4), (5) сведем к интегральному уравнению относительно функции  $u(\Theta)$ , умножив (4) на  $G(\eta, z)$  и проинтегрировав по частям в интервале  $(0, 1)$ :

$$(9) \quad \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2}{z} G \right) - G \right\} u(z) dz + G \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0^1 - \\ - u(z) \left( \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{2}{z} G \right) \Big|_0^1 = \int_0^1 G(\eta, z) F(\Theta) dz.$$

Выражение в фигурных скобках в (9) есть  $\delta(\eta, z)$ -функция, поэтому

$$\int_0^1 \delta(\eta, z) u(z) dz = u(\eta).$$

С учетом граничных условий (7) выражение в круглых скобках обращается в нуль, после чего имеем уравнение

$$u(\eta, t) = \int_0^1 G(\eta, z) F(\Theta) dz - G(\eta, 1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=1},$$

подставляя в которое значения  $G(\eta, 1)$  из (8) и  $\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=1}$  из (5), получим нелинейное интегральное уравнение относительно искомой температуры  $\Theta(\eta, t)$ :

$$(10) \quad u(\Theta) = -G(\eta, 1) q(\Theta) + \int_0^1 G(\eta, z) F(\Theta) dz \\ \left( F(\Theta) = \frac{R^2 \rho c}{\lambda(\Theta)} \frac{\partial u}{\partial t} - u(\Theta) \right).$$

С учетом выражения для  $u(\Theta)$  и  $q(\Theta)$  формула (10) примет вид

$$(11) \quad \int_{\omega}^{\Theta} \lambda(z) dz - G(\eta, 1) \{ R\alpha(\Theta - \Theta_f) + R\epsilon\sigma T_*^3(\Theta^4 - \Theta_f^4) \} = \\ = \int_0^1 G(\eta, z) \left\{ R^2 \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \int_{\omega}^{\Theta} \lambda(y) dy \right\} dz.$$

Решение нелинейного интегрального уравнения (11) дает возможность получить температурное распределение  $\Theta(\eta, t)$  по радиусу сферической частицы для любого момента времени с начала тепловой обработки.

Зависимость коэффициента теплопроводности грунта от температуры в диапазоне 20—1200 °С определена экспериментально и аппроксимирована по методу наименьших квадратов полиномом второй степени относительно безразмерной температуры  $\Theta(\eta, t)$ :

$$(12) \quad \lambda(\Theta) = a_0(\Theta - \omega)^2 - b_0(\Theta - \omega) + c_0 \\ (a_0 = 0,985 \cdot 10^{-3}, \quad b_0 = 1,178, \quad c_0 = 0,692, \quad \omega = 0,219).$$

После подстановки выражения для  $\lambda(\Theta)$  из (12) в (11) получим

$$(13) \quad \Lambda(\Theta) + q(\Theta) G(\eta, 1) = \int_0^1 G(\eta, z) \left\{ R^2 \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Lambda(\Theta) \right\} dz \\ (\Lambda(\Theta) = \frac{a_0}{3}(\Theta - \omega)^3 - \frac{b_0}{2}(\Theta - \omega)^2 + c_0(\Theta - \omega)).$$

Для численного решения нелинейного интегрального уравнения (13) использован итерационный метод, описанный в [5]. При этом производная

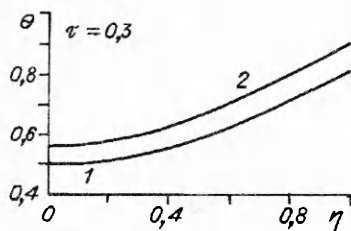


Рис. 1

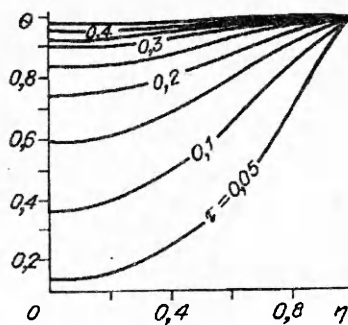


Рис. 2

по времени  $d\Theta/dt$  аппроксимировалась конечно-разностным отношением, а интеграл вычислялся по квадратуре Гаусса с двенадцатью узлами. Температурный профиль по радиусу сферической частицы грунта рассчитывался после умножения левой и правой частей уравнения (13) на  $1/\lambda_*$ :

$$(14) \quad \Lambda(\Theta) - w(\Theta) G(\eta, 1) = \int_0^1 G(\eta, z) \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Lambda(\Theta) \right\} dz.$$

Здесь  $w(\Theta) = Bi(\Theta(1, \tau) - \Theta_f) + \epsilon Sk(\Theta^4(1, \tau) - \Theta_f^4)$ ;  $\Lambda = \Lambda/\lambda_*$ ;  $Bi = \alpha R/\lambda_*$ ;  $\tau = t/(R^2 \rho c)$ ;  $Sk = \sigma RT_*^3/\lambda_*$ ;  $\lambda_*$  — характерная теплопроводность.

Результаты численного решения уравнения (14), представленные на рис. 1 и 2, получены при следующих исходных теплотехнических и оптических характеристиках: коэффициент теплопроводности обрабатываемого грунта  $\lambda_* = 0,69$  Вт/мК, температура газовой среды  $T_* = 3000$  К, степень черноты грунта  $\epsilon = 0,95$ , число Био  $Bi = 0,94$ , температура излучателя  $\Theta_f = 0,9$ . Расчеты отражают радиальное распределение безразмерной температуры  $\Theta$  для безразмерных координаты и времени  $\tau$ . Как следует из рис. 1, несмотря на существенное отличие в значениях радиусов (кривые 1, 2 соответствуют  $R = 20 \cdot 10^{-3}$  и  $5 \cdot 10^{-3}$  м), перемещение теплового импульса от поверхности к центру сферической частицы грунта протекает примерно с одинаковой скоростью  $R/\tau$ . Это не противоречит теории теплопроводности [6], согласно которой для сферической частицы, имеющей минимальную поверхность на единицу объема, интенсивность нагрева или охлаждения тем больше, чем больше ее радиус. Отметим, что результаты расчетов свидетельствуют о значительной роли лучистого теплообмена в совместном радиационно-конвективном нагреве частиц грунта.

На рис. 2 показан расчетный график неустановившегося теплового режима для частицы грунта диаметром  $15 \cdot 10^{-3}$  м. Подобные графики, построенные с учетом конкретного размера укрепляемых частиц грунта, позволяют проследить динамику распределения теплового импульса от периферии к центральной точке сферы ( $r = 0$ ) при определенных значениях их начальной температуры и температуры газовой среды, а также проанализировать другие стороны теплового процесса.

В заключение отметим, что интенсивность нагрева частиц грунта в значительной мере зависит от их начальной температуры и температуры газа в рабочей зоне реактора. В то же время в условиях радиационно-конвективного теплообмена роль размера укрепляемых частиц в процессе их нагрева в потоках низкотемпературной плазмы достаточно низка. Дальнейший анализ результатов моделирования с учетом данных экспериментов позволит уточнить оптимальное условие технологии термоукрепления гранул связанного грунта.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ефименко В. Н., Чарыков Ю. М. Термический метод укрепления связных грунтов // Автомобильные дороги. — 1991. — № 4.
2. Ефименко В. Н. Оценка эффективности применения термоукрепленных грунтов в качестве материала дополнительного слоя дорожных одежд в условиях Томской

области // Повышение эффективности строительства и эксплуатации зданий и транспортных сооружений в условиях сурового климата.— Чита: Чит. политехн. ин-т, 1992.

3. Zinoviev A. P., Solonenko O. P. An effective method of numerical investigation of aggregate of particles under plasma treatment of dispersed materials // Plasma jets in the development of new materials technology.— VSP, the Netherlands, 1990.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1980.
5. Конторович Л. В. О методе Ньютона // Тр. Матем. ин-та АН СССР.— 1949.— Т. 28.
6. Пехович А. И., Жидких В. М. Расчеты теплового режима твердых тел.— Л.: Энергия, 1976.

г. Новосибирск,  
г. Томск

Поступила 30/XI 1992 г.,  
в окончательном варианте — 18/I 1993 г.

УДК 539.37

А. Ф. Ревуженко

### НЕЛОКАЛЬНЫЕ МЕРЫ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

**Введение.** Пусть есть некоторое тело. Зададим на его границе перемещения, силы или какие-либо другие условия нагружения. В результате каждая точка тела сместится в новое положение. Здесь есть две принципиально разные возможности: 1) поле перемещений будет таким, что тело испытает только жесткий поворот и перенос, 2) наряду с перемещением тела как жесткого целого произойдет искажение его формы, а в общем случае — изменение объема, т. е. в теле произойдут определенные деформации.

Проблема описания деформаций является одной из основных в механике твердого тела. В настоящее время используются различные определения самого понятия деформаций, их меры и соответствующие механические интерпретации. Все они носят локальный характер. Например, определение нелинейного тензора деформаций Коши — Грина связано с анализом изменения расстояний между парами бесконечно близких точек. Причем эти пары принадлежат окрестности заданной точки. Именно к этой точке и относится соответствующий тензор. Другие определения также носят локальный характер и опираются на исследование кинематики бесконечно малых материальных объемов тела [1, 2]. Если сопоставить теоретические построения с экспериментами, то можно сказать, что в теории все «измерения» деформаций проводятся на бесконечно малой базе.

В некоторых случаях представляет интерес более общая трактовка этого понятия, а именно: под деформациями будем понимать любые количественные характеристики, которые описывают отличие действительного поля смещений точек тела от множества полей смещений того же тела как жесткого целого. Такой подход допускает нелокальные определения, когда деформации «измеряются» на конечной базе и их количественные характеристики относятся не к точкам, а ко всему телу в целом.

Идея такого подхода появилась при анализе одной конкретной задачи [3]. Пусть деформирование тела осуществляется в плоской радиальной матрице. На рис. 1, а, б соответственно показаны начальная конфигурация тела и конечная. Как оценить деформацию, которую испытало тело в целом при переходе из начальной конфигурации в конечную? Это можно сделать таким образом. Пусть параметр нагружения — смещение нижней границы тела  $h$  (рис. 1). Представим теперь тело абсолютно жестким и дадим ему виртуальное смещение вниз на величину  $h$ . Такое смещение приведет к тому, что конфигурация тела форме матрицы соответствовать уже не будет. Степень этого несоответствия можно оценить через объем областей несовме-