

**МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ
ДЛЯ ЗАДАЧ ГРАВИТАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ*****В. А. Вшивков, Г. Г. Лазарева, И. М. Куликов***Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: kulikov@ssd.ssc.ru*

Рассмотрена численная реализация модели нестационарных трехмерных процессов в гравитирующих газовых системах с самосогласованным полем в декартовых координатах. Эволюция газовой компоненты диска описывается системой уравнений газовой динамики с учетом уравнения для температуры и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. Рассмотрена модификация метода крупных частиц для численной реализации системы уравнений газовой динамики, обладающая свойством инвариантности относительно вращения. Приведены результаты применения созданной численной модели в пространственном случае.

Введение. В предлагаемой работе описаны особенности численной реализации, возникающие во время моделирования процессов, которые происходят в газовой среде, составляющей наряду с твердофазными частицами и плазменной компонентой протогалактические (протозвездные, протопланетные) облака. Описание таких процессов происходит с помощью вычислительной газовой динамики при использовании возможностей современной вычислительной техники [1–3]. В рамках этой задачи разработан алгоритм и создана программа для моделирования вращающегося газового облака в самосогласованном гравитационном поле с учетом температуры газа в трехмерной постановке в декартовых координатах. Реализованная численная модель основана на решении уравнения Пуассона для гравитационного поля и газодинамических уравнений. Газодинамическая часть представлена уравнениями для плотности, вектора скорости и температуры в трехмерной декартовой системе координат. Уравнение для температуры, полученное как следствие закона сохранения внутренней энергии [4], решается с целью дальнейшего введения расчета химических реакций.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00048, № 08-01-00615), программы президиума РАН «Происхождение и эволюция биосферы» (№ 18-2 (2006)), программы Рособразования «Развитие научного потенциала ВШ» (проекты РНП.2.2.1.1.3653, РНП.2.2.1.1969).

В данной работе рассмотрено решение проблемы методического характера, которая возникла во время численной реализации модели. Эта проблема заключается в необходимости разработки численного метода, удовлетворяющего строгим требованиям к экономичности и при этом хорошо воспроизводящего процессы на границе газа и вакуума. В гравитационных задачах особенно ярко проявляется проблема неинвариантности разностных схем относительно вращения. Практика расчетов показывает, что неинвариантность приводит к нежелательным счетным эффектам, существенно искажающим картину изучаемого физического явления. Поэтому необходимо, чтобы искомый численный метод давал осесимметричные решения независимо от выбора системы координат. В качестве решения этой проблемы в работе предложена модификация метода Белоцерковского – Давыдова, обладающая всеми требуемыми свойствами.

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в безразмерном виде, дополненную уравнением Пуассона для гравитационного потенциала:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) = -\operatorname{grad}(p) - \rho \operatorname{grad} \Phi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\operatorname{grad} T, \mathbf{v}) + (\gamma - 1) T \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad p = \rho T, \quad \Delta \Phi = 4\pi \rho,$$

где p – давление, ρ – плотность, \mathbf{v} – скорость, Φ – гравитационный потенциал, T – температура, $\gamma = 1,4$ – показатель адиабаты.

Для перехода к безразмерным переменным в качестве основных параметров выбраны: расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, масса Солнца $M_0 = 2 \cdot 10^{30}$ кг, гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м² · кг⁻². Характерные величины для скорости частиц v_0 , времени t_0 , потенциала Φ_0 и плотности ρ_0 : $v_0 = \sqrt{GM_0/R_0} = 30$ км/с, $t_0 = R_0/v_0 = 1/6$ года, $\Phi_0 = v_0^2 = GM_0/R_0$, $\rho_0 = M_0/R_0^3$.

Так как исходная задача неустойчива и ее постановка некорректна [5], вопрос о контроле правильности решения численной реализации задачи стоит особенно остро. В первую очередь необходимо быть уверенным как в правильности решения системы уравнений газовой динамики без учета влияния гравитационного поля, так и в правильности решения уравнения Пуассона. Решение этих уравнений протестировано на аналитических решениях. Для контроля правильности решения используются законы сохранения массы, импульса, полной и внутренней энергии. Помимо законов сохранения используется теорема вириала [6].

На границах расчетной области для газодинамических величин поставлены однородные краевые условия второго рода, а для гравитационного потенциала граничные условия задаются с помощью мультипольного разложения с использованием инерциальных моментов системы [4].

В расчетной области в начальный момент времени задается нулевое распределение плотности и скоростей. В центре определяется область эллипсоидальной формы, в которой задано распределение плотности, температуры, скоростей и гравитационного потенциала. С течением времени газовое обла-

ко в вакууме разлетается, коллапсирует или остается неподвижным в зависимости от задания начальных данных.

Метод расчета. Для решения системы уравнений газовой динамики выбран метод Белоцерковского – Давыдова [7]. Этот метод обеспечивает автоматическое выполнение законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Метод Белоцерковского – Давыдова состоит из двух этапов: эйлерова этапа, на котором отбрасываются члены конвективного переноса, и лагранжева, на котором происходит конвективный перенос газодинамических величин. Как известно, метод Белоцерковского – Давыдова слабоустойчив, но в силу неустойчивости физического решения задачи такое свойство метода не имеет решающего значения. Однако практика тестовых расчетов показывает, что перенос частиц с использованием оригинальной схемы Белоцерковского – Давыдова с первым и со вторым порядком аппроксимации не позволяет получать осесимметричные решения в задачах гравитационной газовой динамики.

Для реализации первого этапа применялась конечно-разностная схема с использованием операторного подхода [8]. Такой выбор схемы был обусловлен особым требованием к инвариантности метода решения относительно вращения для задач гравитационной газовой динамики. Несмотря на выполнение этого требования, предложенный подход имеет один существенный недостаток: для его реализации необходимо постоянное обращение к функциям осреднения и вычисления разностных аналогов дифференциальных операторов. Трехмерность модели и нестационарность задачи выдвигают строгие требования к экономичности применяемых методов решения как в плане использования ресурсов вычислительной системы, так и в плане не критичного ограничения на отношение шага по времени к шагу по пространству. Поэтому предлагается следующий более экономичный подход к реализации эйлерова и лагранжева этапов метода Белоцерковского – Давыдова, обладающий всеми необходимыми свойствами.

В трехмерной области решения введена равномерная кубическая сетка, вектор скорости определен в узлах, а плотность, давление, потенциал и импульс – в ячейках. Используемая на эйлеровом этапе схема является явной и имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени. При соответствующих граничных условиях она сохраняет полный импульс и полную энергию. Используемая на лагранжевом этапе схема имеет первый порядок точности. На этом этапе осуществляется перенос частиц с так называемой схемной скоростью. Такая скорость не соответствует искомой скорости газа, которую возможно определить только после завершения лагранжева этапа как результирующую итоговых значений импульса и плотности.

Рассмотрим принципы модификации вычисления схемной скорости переноса на двумерном примере. Используем задачу переноса вещества на плоскости в заданном поле скоростей $V = (u, v)$ (рис. 1, *a*). Вектор скорости имеет радиальное направление от центра расчетной области. Выбор длины вектора скорости переноса будем определять так, чтобы численное решение совпадало с заданным решением.

Результат переноса частиц с использованием классической схемы Белоцерковского – Давыдова представлен на рис. 1, *b*. Анализ изолиний плотности показывает, что оригинальный метод не позволяет получать осесимметричные решения. Вдоль осей координат возникают ярко выраженные волны плотности (на рисунке они образуют крест). Такие особенности решения задач гравитационной газовой динамики вдоль координатных линий развива-

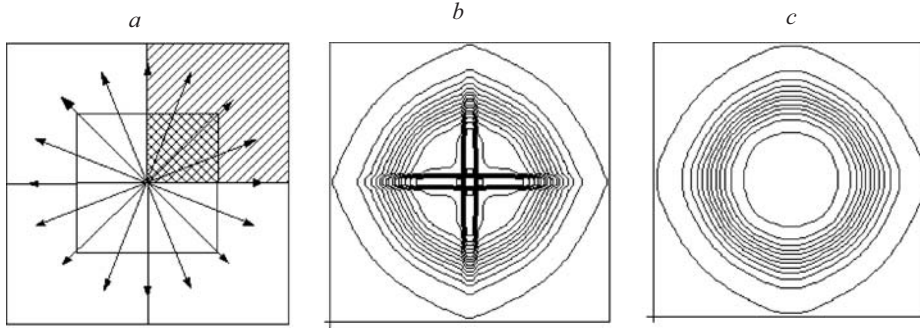


Рис. 1. Область вычислений: поле скоростей (a) и изолинии плотности (b, c)

ются и с течением времени сильно искажают искомое распределение плотности. Для решения этой проблемы разработана модификация метода, заключающаяся в уточненном расчете скоростей переноса на лагранжевом этапе.

Рассмотрим две ячейки в первой четверти расчетной области (рис. 2). Начнем нумерацию узлов по осям OX и OY из центра области. Определим значения заданных скоростей для узла сетки с номером (i, k) :

$$V_{i,k} = \{u_{i,k}, v_{i,k}\} = \{(i-1)c_x h_x, (k-1)c_y h_y\}.$$

Здесь h_x, h_y – шаги сетки; c_x, c_y – постоянные угловые коэффициенты координатных скоростей. Пусть в момент времени t_0 плотность газа в ячейке I равна ρ^n (рис. 2, a). Соответственно масса газа в этой ячейке в этот момент времени $M^n = \rho^n h_x h_y$. По прошествии времени τ газ будет занимать область Ω (рис. 2, b). В этом случае площадь ячейки

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= (h_x + u_{21}\tau)(h_y + v_{12}\tau) = \\ &= (h_x + c_x \tau h_x)(h_y + c_y \tau h_y) = h_x h_y (1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau), \end{aligned}$$

где u_{21} – x -компонента скорости в узле (2, 1); v_{12} – y -компонента скорости в узле (1, 2).

Из закона сохранения массы плотность в области Ω

$$\rho^{n+1} = \frac{M^n}{S^{n+1}} = \frac{\rho^n h_x h_y}{h_x h_y (1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} = \frac{\rho^n}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)}.$$

Масса газа в ячейке I в момент времени $t_0 + \tau$ по определению

$$M^{n+1} = \rho^{n+1} h_x h_y = \frac{\rho^n h_x h_y}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} = \frac{M^n}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} \quad (1)$$

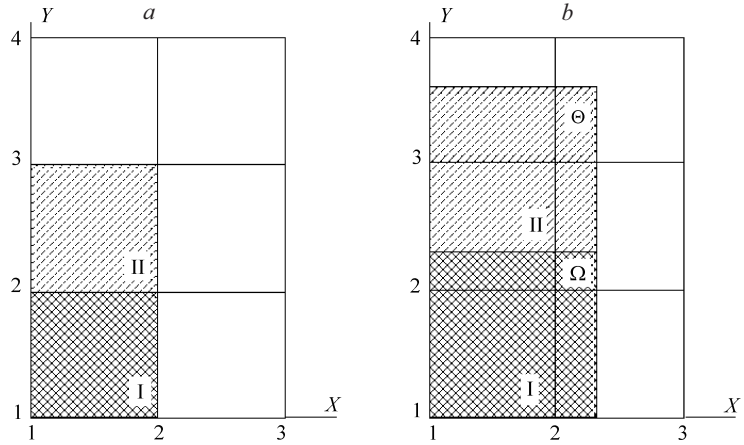


Рис. 2. Схема ячеек расчетной области: в момент времени t_0 (a) и $t_0 + \tau$ (b)

и как оставшаяся масса после переноса

$$M^{n+1} = M^n \left(1 - \frac{u\tau}{h_x} \right) \left(1 - \frac{v\tau}{h_y} \right). \quad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), перейдем к двум независимым уравнениям:

$$\left(1 - \frac{u\tau}{h_x} \right) (1 + c_x \tau) = 1; \quad \left(1 - \frac{v\tau}{h_y} \right) (1 + c_y \tau) = 1. \quad (3)$$

Вычислив из (3) компоненты скорости u и v , получим следующие формулы для выражения скорости переноса:

$$u = c_x h_x / (1 + c_x \tau), \quad (4)$$

$$v = c_y h_y / (1 + c_y \tau). \quad (5)$$

Такой вид формул скорости переноса не дает определения числителя и слагаемого в знаменателе. В качестве $c_x h_x$ и $c_y \tau$ могут выступать как скорости, так и разности скоростей (см. рис. 2). Для разрешения этой неопределенности рассмотрим область II в момент времени $t_0 + \tau$. За промежуток времени τ газ не только переносится из ячейки II, но и поступает в нее из ячейки I. После выхода из ячейки II газ займет площадь

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= (h_x + u_{22}\tau)(h_y + v_{13}\tau - v_{12}\tau) = \\ &= (h_x + c_x \tau h_x)(h_y + 2c_y \tau h_y - c_y \tau h_y) = h_x h_y (1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau), \end{aligned}$$

тогда плотность из закона сохранения массы

$$\rho^{n+1} = \frac{M^n}{S^{n+1}} = \frac{\rho^n h_x h_y}{h_x h_y (1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} = \frac{\rho^n}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)}.$$

Площадь, занятая оставшимся в ячейке газом, и остаточная масса в ячейке II имеют вид

$$S_{II}^{n+1} = h_x(h_y - v_{12}\tau) = h_x h_y (1 - c_y \tau); \quad (6)$$

$$M_{II} = \rho^{n+1} S_{II} = \frac{\rho^n h_x h_y (1 - c_y \tau)}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} = \frac{M^n (1 - c_y \tau)}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)}.$$

Массу газа, которая переместилась за время τ из ячейки I, можно найти по формуле

$$M_I = \rho^{n+1} S_I = \rho^{n+1} h_x v_{12} \tau = \rho^{n+1} h_x h_y c_y \tau = \frac{M^n c_y \tau}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)}.$$

Полная масса ячейки II, складывающаяся из остатков газа в момент времени t_0 и перемещенного газа из ячейки I, есть

$$M^{n+1} = M_I + M_{II} = \frac{M^n (1 - c_y \tau)}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} + \frac{M^n c_y \tau}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)} = \frac{M^n}{(1 + c_x \tau)(1 + c_y \tau)}.$$

Определим массу M_{II} как полученную после переноса:

$$M_{II} = M^n (1 - u\tau/h_x)(1 - v\tau/h_y). \quad (7)$$

Приравняв выражения (6) и (7), найдем два независимых уравнения:

$$1 - v\tau/h_y = (1 - c_y \tau)/(1 + c_y \tau), \quad (8)$$

$$1 - u\tau/h_x = 1/(1 + c_x \tau). \quad (9)$$

Из уравнения (8) получаем выражение для компоненты скорости

$$v = (2c_y h_y)/(1 + c_y \tau). \quad (10)$$

Анализ выражения (10) и формулы скорости переноса (5) позволяют сделать вывод, что в числителе $2c_y h_y$ – скорость, а в знаменателе $c_y \tau$ – разность скоростей. Таким образом, компоненты скорости следует выбирать из соотношения

$$v = \frac{V_1}{1 + (\tau/h)(V_1 - V_2)},$$

где V_1, V_2 – скорости через границы ячейки (рис. 3), имеющие одно направление с соответствующей компонентой скорости; h – шаг сетки по соответствующему направлению.

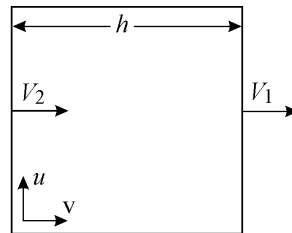


Рис. 3. Схема расположения вектора скорости в ячейке

Используя описанные выше принципы, обобщим предлагаемый способ вычисления схемной скорости на остальные ячейки (i, k) расчетной области:

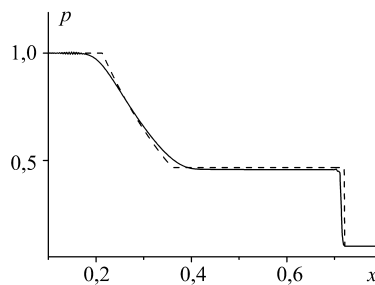
$$V_{i,k} = \left\{ \frac{\frac{u_{i+1,k} + u_{i+1,k+1}}{2}}{1 + \frac{\tau}{h_x} \left(\frac{u_{i+1,k} + u_{i+1,k+1}}{2} - \frac{u_{i,k} + u_{i,k+1}}{2} \right)}, \right. \\ \left. \frac{\frac{v_{i,k+1} + v_{i+1,k+1}}{2}}{1 + \frac{\tau}{h_y} \left(\frac{v_{i,k+1} + v_{i+1,k+1}}{2} - \frac{v_{i,k} + v_{i+1,k}}{2} \right)} \right\}$$

Результат расчетов с использованием предложенной модификации определения схемных скоростей на лагранжевом этапе приведен на рис. 1, с.

Применение модифицированного метода крупных частиц к численной реализации трехмерной модели. В процессе создания комплекса программ проводилась верификация численной модели на идейно простых задачах, которые, однако, являются камнем преткновения для многих алгоритмов [9, 10]. На рис. 4 приведен результат тестирования полученного алгоритма с использованием решения первого теста Годунова в квазиодномерной постановке [9] (на отрезке $[0; 2]$ заданы $V(x)=0, T(x)=1$; при $0 < x < 1$ $\rho(x)=2, p(x)=2$; при $1 < x < 2$ $\rho(x)=1, p(x)=1$).

С целью определения влияния счетных эффектов на решение был использован еще один квазиодномерный тест, имеющий аналитическое стационарное решение. В начальный момент времени внутри шара ($0 \leq r \leq 1$) заданы функции распределения плотности $\rho(r)$, температуры $T(r)$ и гравитационного потенциала $\Phi(r)$ при нулевых значениях импульса $v(r)=0$, где r – радиус шара. Вне шара все газодинамические величины равны нулю, гравитационный потенциал получен как фундаментальное решение уравнения Лапласа. В соответствии с точным решением с течением времени профили плотности и температуры не должны изменяться, скорость газа остается нулевой. Накопление погрешности счета приводит к тому, что на больших временах газовый шар начинает распадаться либо схлapyваться в окружающем его вакууме.

Результаты тестирования программы представлены на рис. 5, а, б. Для тестирования предлагаемого численного алгоритма заданы начальные условия в виде аналитических распределений плотности и температуры, а значения гравитационного потенциала получены численно, в ходе решения уравнения Пуассона. Для сравнения рассмотрим дополни-



Для сравнения рассмотрим дополни-

Рис. 4. Распределение давления при $t = 0,3$ (сплошная линия – результат расчета, пунктирная – точное решение)

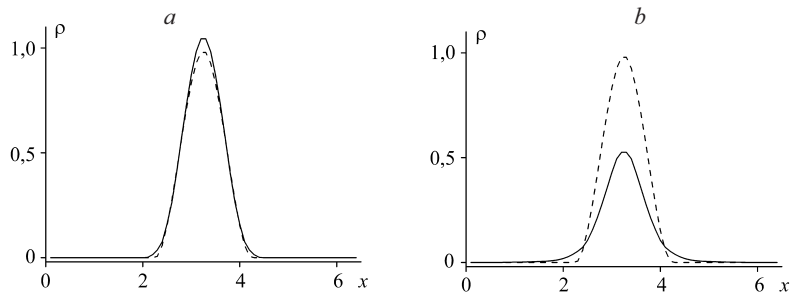


Рис. 5. Распределение плотности: при начальном стационарном (а) и нестационарном (b) задании параметров газа (сплошная линия – $t = 1$, пунктирная – $t = 0$)

тельный тест с нестационарным решением. В качестве начальных условий зададим аналитическое распределение плотности, а распределение температуры – постоянным:

$$T(r) = \begin{cases} \pi/7, & 0 < r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Расчеты проведены с использованием сетки $256 \times 256 \times 256$ узлов, шаг по времени $\tau = 0,001$. Как видно из графиков, распределение плотности, полученное в ходе первого теста (см. рис. 5, а) в момент времени, равный единице, от-

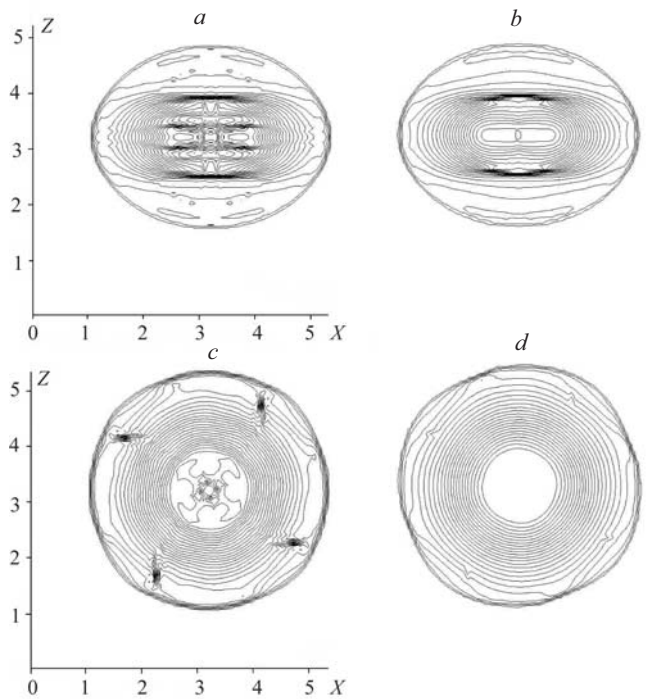


Рис. 6. Изолинии плотности: в меридиональной (а, b) и экваториальной (с, d) плоскостях

лично от начального распределения примерно на 3 % в точке максимума в центре шара. Для сравнения приведено решение (см. рис. 5, *b*), полученное в ходе второго теста в тот же момент времени. Распределение плотности отклоняется в центре шара от начального более чем на 60 %. Таким образом, можно сделать вывод о незначительности погрешности предлагаемого численного метода.

Для демонстрации работы трехмерной численной модели на рис. 6 представлены результаты расчетов тестовой задачи разлета газового шара единичной плотности в вакуум в момент времени, равный единице. Расчеты проведены с использованием сетки $256 \times 256 \times 256$ узлов. Начальные значения параметров газа: $R = 1$, $\rho = 1$, $p = 1$, $V_\varphi = 1$. Численная модель включает в себя описанный выше эйлеров этап схемы крупных частиц второго порядка точности и два варианта лагранжева этапа. На рис. 6, *a, c* предлагаются результаты расчетов с использованием оригинального определения схемных скоростей, а на рис. 6, *b, d* – с использованием специального метода расчета.

Рис. 6 иллюстрирует такое необходимое и актуальное свойство для задач гравитационной физики, как инвариантность метода относительно поворота. Из рисунка следует, что изолинии плотности, описывающие разлет шара в вакуум, не имеют особенностей на осях координат.

Заключение. В данной работе рассматривается модификация метода крупных частиц, предложенного Белоцерковским, в котором процесс газодинамического движения предполагает наличие двух этапов: эйлерового и лагранжевого. Расчет первого этапа производится без учета эффектов, связанных с перемещением среды, и реализован с использованием явной разностной схемы со вторым порядком аппроксимации по пространству. Суть модификации заключается в специальном определении схемных скоростей на лагранжевом этапе. Такой подход дает экономичный метод, который позволяет получить осесимметричные решения для задач гравитационной газовой динамики.

В качестве тестов для численной модели задачи разлета самогравитирующего газового шара в вакууме были использованы классические тестовые задачи распада разрыва. Приведенные в работе результаты тестов позволяют сделать вывод о правомерности применения предлагаемого метода решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Снытников В. Н., Пармон В. Н. Жизнь создает планеты? // Наука из первых рук. 2004. № 0. С. 20.
2. Снытников В. Н., Вшивков В. А., Дудникова Г. И. и др. Численное моделирование гравитационных систем многих тел с газом // Вычисл. технологии. 2002. 7, № 3. С. 72.
3. Тарнавский Г. А., Аульченко С. М., Вшивков В. А. Математическое моделирование нестационарных трехмерных процессов в космической газодинамике // Вычислительные методы и программирование. 2003. 4, № 2. С. 127.
4. Куликов И. М. Численное моделирование вращения газа в гравитационном поле // Тр. XLIII Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2005. С. 207.
5. Поляченко В. Л., Фридман А. М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.

6. **Bertin G.** Dynamics of Galaxies. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
7. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
8. **Вшивков В. А., Лазарева Г. Г., Куликов И. М.** Операторный подход для численного моделирования гравитационных задач газовой динамики // Вычисл. технологии. 2006. **11**, № 3. С. 27.
9. **Toro E. F.** A linearised Riemann Solver for the time dependent Euler equations of gas dynamics // Proc. Royal Society London. Ser. A. Math. and. Phys. Sci. 1991. Vol. 434, N 1892. P. 683.
10. **Годунов С. К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. **47**, вып. 3.

Поступила в редакцию 28 ноября 2006 г.
