ПМТФ, № 2, 1974

УДК 532.517.4 + 532.72

ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В ВЯЗКОМ ПОДСЛОЕ

П. И. Гешев

(Новосибирск)

Рассмотрены нестационарные уравнения для продольной (по потоку) пульсации скорости и пульсации концентрации в области вязкого подслоя. Оценки, основанные на экспериментальных данных, позволяют пренебречь вкладом некоторых членов этих уравнений в турбулентный перенос. В таком приближении получены выражения для турбулентных коэффициентов вязкости и диффузии. Отмечается различное поведение этих коэффициентов в случае больших чисел Шмидта (Прандтля). Анализируется поведение турбулентного числа Шмидта в области вязкого подслоя.

1. Из опытов [1,2] следует, что продольная компонента пульсационной скорости u меняется в вязком подслое линейно с расстоянием от стенки ($u \sim y$). Эта зависимость справедлива и для тангенциальной пульсации скорости ($w \sim y$). Для перпендикулярной к стенке компоненты получаем из уравнения неразрывности

$$v = -\int\limits_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dy \sim y^2 \tag{1.1}$$

для турбулентных напряжений Рейнольдса имеем $\langle uv \rangle \sim y^3$ и для турбулентной вязкости

$$\nu_T = -\langle uv \rangle (dU/dy)^{-1} \sim y^3 \tag{1.2}$$

где $U(y)$ — средняя скорость потока. Здесь и ниже угловые скобки означают усреднение по времени (либо по статистическому ансамблю).

Ландау и Левич из качественных соображений предложили для турбулентной вязкости в области вязкого подслоя выражение

$$\nu_T = \langle v^2 \rangle T \sim y^4 \tag{1.3}$$

где T — средний период пульсаций скорости,— величина не зависящая от y в силу линейности уравнений движения в вязком подслое [3]. Иногда указывают, что в (1.2) не учитывается возможность изменения корреляционного коэффициента с расстоянием от стенки, т. е. полагают, что

$$K_{uv} = \langle uv \rangle / \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle v^2 \rangle} \sim y$$

Отметим, что для случая двумерной турбулентности, зависящей только от x и y, в предположении однородности по x существует точное доказательство того, что $K_{uv} = 0$ при $y = 0$.

Из уравнения неразрывности (1.1), ограничиваясь первыми неисчезающими членами, имеем

$$v = -\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{y^2}{2}, \quad u' = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\langle uv \rangle = -\left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x}\right\rangle \frac{y^3}{2} = -\frac{\partial}{\partial x}\langle u'^2 \rangle \frac{y^3}{4}$$

В силу статистической однородности по x величина $\langle u'^2 \rangle$ не зависит от x, поэтому коэффициент при третьей степени в разложении рейнольдсовых напряжений по степеням y равен нулю, и разложение начинается с члена, пропорционального y^4.

Как показали эксперименты [4], турбулентность в вязком подслое существенно трехмерна, поэтому доказательство, основанное на двумерности, не проходит и вопрос о справедливости формул (1.2), (1.3) остается открытым. Предпринимались попытки установить показатель степени затухания турбулентного обмена, используя данные по массоотдаче при больших числах Шмидта ($S = \nu / D \gg 1$, где ν — вязкость, D — коэффициент диффузии), когда диффузионный слой полностью «затоплен» в вязком подслое и решающую роль в массопереносе играют турбулентные пульсации. Точность этих экспериментов недостаточна, так как они допускают интерпретацию как в пользу третьей [5–7], так и четвертой [8–10] степени затухания.

В перечисленных работах [3, 5–10] предполагается, что поведение турбулентных коэффициентов вязкости и диффузии одинаково. Это равносильно утверждению, что турбулентное число Шмидта постоянно по толщине вязкого подслоя ($S_T = \nu_T / D_T = \text{const}$). Но при $S \gg 1$ это предположение не выполняется. На это указано в [11], где предложена схема, согласно которой $\nu_T \sim y^3$, $D_T \sim y^4$ в вязком подслое и, следовательно, турбулентное число Шмидта

$$S_T \sim y^{-1} \tag{1.4}$$

В данной работе эта формула получена в пределе при $S \to \infty$.

2. Рассмотрим турбулентный поток несжимаемой жидкости, текущий в направлении оси x над плоской поверхностью ($y = 0$). $U(y)$ — средняя скорость потока, u, v, w — компоненты пульсационной скорости в направлениях x, y, z, p — пульсации давления. Все переменные, зависимые и независимые обезразмерены при помощи вязкости ν и динамической скорости $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$, где τ_w — трение на стенке, ρ — плотность жидкости. Турбулентность предполагается однородной в направлениях x и z и стационарной во времени.

В безразмерной форме уравнение для u имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -v \frac{dU}{dy} - Q \tag{2.1}$$

$$Q = U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv - \langle uv \rangle) + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Рассматривая правую часть в уравнении (2.1) как неоднородность, можно переписать его в интегральном виде, учитывающем граничное условие «прилипания» $(u)_{y=0} = 0$

$$u(\mathbf{x}, t) = -\iiint\limits_{y' \geqslant 0} d\mathbf{x}' \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \left[v(\mathbf{x}', t') \frac{dU(y')}{dy'} + Q(\mathbf{x}', t') \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') \tag{2.2}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t')$ — функция Грина уравнения теплопроводности

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \exp\left(-\frac{(x - x')^2 + (z - z')^2}{4(t - t')}\right) [4\pi (t - t')]^{-3/2} \times \tag{2.3}$$

$$\times \left[\exp\left(-\frac{(y - y')^2}{4(t - t')}\right) - \exp\left(-\frac{(y + y')^2}{4(t - t')}\right) \right]$$

В выражении (2.2) сделаем замену переменной интегрирования $t' = t - \tau$, после чего умножим (2.2) на v ($\mathbf{x}$, t) и усредним. Получаем напряжения Рейнольдса

$$\langle uv\rangle = -\iiint\limits_{y'\geqslant 0} d\mathbf{x}' \int\limits_0^\infty d\tau \left(\langle vv'\rangle \frac{dU'}{dy'} + \langle vQ'\rangle\right) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \tau) \tag{2.4}$$

где штрих при функциях, стоящих в скобках, означает их зависимость от переменных интегрирования $\mathbf{x}'$ и τ.

Можно пренебречь членом $\langle vQ'\rangle$ в подынтегральном выражении по сравнению с первым членом в круглых скобках. Для этого имеются следующие основания:

1) нелинейные члены, входящие в Q, малы в области вязкого подслоя и дают в напряжениях Рейнольдса (2.4) тройные корреляционные функции от пульсаций скорости, которые много меньше второй корреляции $\langle vv'\rangle$;

2) эксперименты [4] по визуализации течения в вязком подслое показали, что пристенные вихри сильно вытянуты вдоль по потоку; это можно объяснить действием градиента средней скорости dU / dy. Средний размер вихрей в z-направлении $\Delta z \sim 10^2$, размер по оси x в среднем на порядок больше ($\Delta x \sim 10^3$) [12, 13, 4], поэтому тремя членами в Q, содержащими производные по x, можно пренебречь, так как амплитуды пульсаций скорости имеют порядок единицы во всей турбулентной области, а в области подслоя уменьшаются как соответствующие степени y;

3) при $y \to 0$ справа в уравнении (2.1) к нулю стремятся все члены, кроме $\partial p / \partial x$; амплитуда пульсаций давления невелика ($\sqrt{\langle p^2\rangle} \sim 1$) [14], а масштаб вихрей по x велик ($\Delta x \sim 10^3$). Поэтому слой, в котором $|\partial p / \partial x| > |v| \, dU / dy$, тонок и дает пренебрежимо малый вклад в напряжения Рейнольдса.

Таким образом, член, пропорциональный градиенту средней скорости, дает основной вклад в напряжения Рейнольдса.

В силу однородности и стационарности корреляция $\langle vv'\rangle$ зависит только от y, y', $x - x'$, $z - z'$ и $\tau = t - t'$. Средний период пульсаций вязкого подслоя определен экспериментально в [13] ($T \sim 20$). Если функция $\langle vv'\rangle$ быстро убывает при $\tau = t - t' > 20$, то, как показывает анализ выражений (2.3), (2.4), в ней можно пренебречь зависимостью от медленно меняющихся аргументов $x - x'$ и $z - z'$ (учитывая, что $\Delta x \sim 10^3$, $\Delta z \sim 10^2$). Это соответствует пренебрежению вторыми производными по x и z в лапласиане уравнения (2.1) (приближение пограничного слоя). Проинтегрировав по x' и z' в (2.4), получаем

(2.5)

$$\langle uv\rangle = -\int\limits_0^\infty dy' \int\limits_0^\infty d\tau \, \langle v(y, t) \, v(y', t-\tau)\rangle \, G(y, y'; \tau) \frac{dU(y')}{dy'} = -\nu_T \frac{dU}{dy}$$

где градиент средней скорости вынесен за знак интеграла как слабо меняющаяся в вязком подслое функция. Для турбулентной вязкости из (2.5) получаем

(2.6)

$$\nu_T(y) = \int dy' \int\limits_0^\infty d\tau R(y, y'; \tau) \, G(y, y'; \tau), \quad R(y, y'; \tau) = \langle v(y, t) \, v(y', t-\tau)\rangle$$

где $G(y,\ y';\ \tau)$ — функция Грина уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой

$$G(y, y'; \tau) = (4\pi\tau)^{-1/2}\left[\exp\left(-\frac{(y-y')^2}{4\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(y+y')^2}{4\tau}\right)\right] \tag{2.7}$$

Так как $G \sim y$ и $R \sim y^2$ при $y \to 0$, из (2.6) следует закон третьей степени затухания: $\nu_T \sim y^3$.

3. В безразмерной форме уравнение для пульсации концентрации c имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{S}\Delta c = -v\frac{dC}{dy} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial uc}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(vc - \langle vc\rangle) - \frac{\partial wc}{\partial z} \tag{3.1}$$

где $C\ (y)$ — средняя концентрация.

Граничное условие для уравнения (3.1) такое же, как и в предыдущем случае ($(c)_{y=0} = 0$). Задача полностью аналогична случаю, изложенному в п. 2. Проведенное там приближение справедливо и здесь, причем в данном случае оно имеет больше оснований, так как в (3.1) не входит градиент давления. В случае, когда число Шмидта $S \gg 1$, можно показать (пользуясь теорией возмущений), что отбрасываемые последние четыре члена в (3.1) дают в турбулентный поток массы $\langle vc\rangle$ вклад, пропорциональный более высоким степеням y, чем сохраняемый член $v\ dC\ /\ dy$.

Опуская выкладки, приведем выражение для турбулентного коэффициента диффузии

$$D_T\ (y) = \int\limits_0^\infty dy' \int\limits_0^\infty d\tau R\,(y, y'; \tau)\, G\,(y, y'; \tau\,/\,S) \tag{3.2}$$

совпадающее с формулой (2.6) за исключением временного аргумента в функции Грина (2.7), который делится в данном случае на S.

Анализ формулы (3.2) показывает, что при больших, но конечных S имеется узкая область $y < S^{-1/2}$, где $D_T \sim y^3$. Если устремить $S \to \infty$ и воспользоваться свойством функции Грина

$$\lim_{\alpha\to 0} G\,(y,\ \ y';\ \ \alpha) = \delta\ (y - y')$$

где $\delta\ (y - y')$ — дельта-функция Дирака, то получаем формулу Ландау — Левича (1.3), которая оказывается справедливой только для турбулентной диффузии при $S \gg 1$, но не для турбулентной вязкости

$$D_T\ (y) = \int\limits_0^\infty \langle v\,(y, t)\, v\,(y, t-\tau)\rangle\ d\tau = \langle v^2\rangle\, T \sim y^4$$

где средний период пульсаций T есть лагранжев масштаб времени

$$T = \int\limits_0^\infty R\,(y, y; \tau)\, d\tau\,/\,R\,(y, y; 0)$$

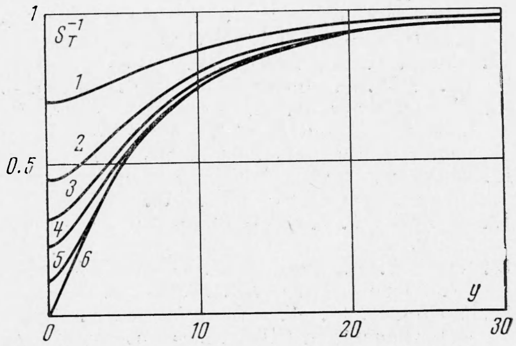
4. Для корреляционной функции R в вязком подслое можно предложить следующую аппроксимацию:

$$R\,(y, y'; \tau) = Ay^2y'^2e^{-\tau/T}$$

где A и T — постоянные. Тогда интегралы в формулах (2.6) и (3.2) берутся в элементарных функциях; разделив (2.6) на (3.2), получаем турбулентное число Шмидта

$$S_T = S\,\frac{1-\exp(-y/\sqrt{T})+y^2/2T}{1-\exp(-y\sqrt{S/T})+y^2S/2T} \tag{4.1}$$

Из (4.1) видно, что $S_T \equiv 1$ при $S = 1$. Это можно заключить и из формул (2.6) и (3.2). При $S \gg 1$ имеется три области с различным поведением S_T: при $y < \sqrt{T/S}$ $S_T \sim \sqrt{S}$; в области $\sqrt{T} > y > \sqrt{T/S}$ $S_T \sim \sim y^{-1}$; для $y > \sqrt{T}$ турбулентное число Шмидта близко к единице, и в пределе ($y \to \infty$) имеем $S_T = 1$. На фигуре показано поведение турбулентного числа Шмидта (S_T^{-1}) при $T = 20$ и значениях $S = 2, 5, 10, 20$, 80, ∞ (кривые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* соответственно).



Данные о турбулентном числе Шмидта весьма противоречивы, но не вызывает сомнения то, что при удалении от стенки оно перестает зависеть от молекулярных эффектов (от S) и выходит на константу. В данном случае $S_T \to 1$ при $y \to \infty$. Это следствие принятого приближения (отброшены конвективные члены и $\partial p / \partial x$), которое несправедливо вне вязкого подслоя.

5. Если вблизи стенки происходит движение жидкости с характерным временем T, то размеры областей, в которых ощущается влияние вязкости и диффузии (из соображений размерности)

$$y_1 \sim \sqrt{\nu T}, \quad y_2 \sim \sqrt{DT} \tag{5.1}$$

где все величины размерные.

При $\nu \gg D$ имеется область $y_1 \gg y \gg y_2$, в которой можно пренебрегать действием молекулярной диффузии на турбулентный (молярный) перенос массы, но нельзя пренебрегать действием вязкости на пульсации скорости и, следовательно, на турбулентный перенос импульса. Пренебрежение молекулярными эффектами приводит к формуле (1.3). Выражение (5.1) в безразмерном виде дает те значения координаты y, при которых в формуле (4.1) меняется поведение S_T.

Если тепло рассматривается как пассивная примесь, то все результаты справедливы для процессов теплопереноса; нужно только заменить концентрацию на температуру и число Шмидта на число Прандтля Pr.

Таким образом, можно полагать, что в вязком подслое имеет место закон турбулентного трения (1.2) и предельное значение турбулентного числа Шмидта (Прандтля) определяется формулой

$$\lim_{S,\,\mathrm{Pr}\to\infty} (S_T, \mathrm{Pr}_T) \sim y^{-1} \tag{1.4}$$

Следовательно, в экспериментах по массоотдаче при больших числах Шмидта можно определить только поведение $D_T(y)$, которое должно быть тем ближе к закону четвертой степени затухания, чем больше S. Определить поведение $\nu_T(y)$ из этих опытов нельзя.

Автор признателен С. С. Кутателадзе, В. Е. Накорякову, М. А. Гольдштику и В. Н. Штерну за обсуждение результатов работы.

Поступила 12 X 1973