

УДК 517.944+533

ТЕЧЕНИЯ ГАЗА СО СПИРАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ УРОВНЯ

С. В. Хабиров

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450000 Уфа

Замечен ряд свойств инвариантной подмодели ранга два газовой динамики со спиральными поверхностями уровня. Рассмотрены инвариантные и изобарические решения подмодели.

1. Уравнения подмодели. Уравнения газовой динамики допускают двумерную подалгебру, которая в цилиндрической системе координат $(t, x, r, \theta$ — независимые переменные; U, V, W — координаты скорости) задается базисом операторов $\{\alpha t \partial_x + \partial_\theta + \alpha \partial_U, t \partial_t + (\beta t + x) \partial_x + r \partial_r + \beta \partial_U\}$, где α, β — параметры. Эта подалгебра взята из оптимальной системы подалгебр для уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния [1, табл. 6].

Выбирается следующее представление инвариантного решения:

$$U = xt^{-1} + q(q^2 + \alpha^2)^{-1}[q(u + \beta) + \alpha w], \quad V = v + q, \quad W = q(q^2 + \alpha^2)^{-1}[qw - \alpha(u + \beta)]; \quad (1.1)$$

$$q = rt^{-1}, \quad s = xt^{-1} - \alpha\theta - \beta \ln t, \quad (1.2)$$

где u, v, w — инвариантные скорости, являющиеся функциями инвариантов q, s — новых независимых переменных.

Подстановка представления (1.1), (1.2) в уравнения газовой динамики приводит к уравнениям инвариантной подмодели

$$\begin{aligned} \rho a^2 Du + p_s &= q\rho(q^2 + \alpha^2)^{-2}[2\alpha qw - (q(q^2 + \alpha^2) + 2\alpha^2)(u + \beta)], \\ \rho Dv + p_q &= -v\rho + q\rho(q^2 + \alpha^2)^{-2}(qw - \alpha u - \alpha\beta)^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$Dw = -w(1 + q^{-1}v), \quad A^{-1}Dp + u_s + v_q = -q^{-1}v - 3, \quad DS = 0,$$

где p и ρ — инвариантные давление и плотность, являющиеся функциями инвариантов q, s ; $a^2 = q^2(q^2 + \alpha^2)^{-1}$; $A = \rho c^2 = \rho f_\rho$; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; S — энтропия; $D = u\partial_s + v\partial_q$. Вместо последнего уравнения можно взять уравнение для плотности

$$D\rho + \rho(u_s + v_q + q^{-1}v + 3) = 0. \quad (1.4)$$

Система (1.3) имеет симметрический вид, так как при производных от вектора неизвестных u, v, w, p, S матрицы симметричны. Если одна из них положительно определена, то система (1.3) является симметрической гиперболической [2, с. 51].

Пусть $h(s, q) = 0$ — уравнение i -характеристик. Имеется трехкратная контактная i -характеристика $C_0 : uh_s + vh_q = 0$. Возможные две другие действительные i -характеристики удовлетворяют уравнению

$$C_\pm : (a^2 u^2 - c^2)h_s^2 + 2a^2 uvh_s h_q + a^2(v^2 - c^2)h_q^2 = 0. \quad (1.5)$$

Условие гиперболичности системы (1.3) есть условие неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения (1.5) относительно $h_s h_q^{-1}$, оно задает i -область гиперболичности на данном i -решении:

$$a^2 u^2 + v^2 \geq c^2. \tag{1.6}$$

Условие (1.6) в физических переменных принимает вид

$$(V - rt^{-1})^2 + r^2(r^2 + \alpha^2 t^2)^{-1}(U - \alpha tr^{-1}W - xt^{-1} - \beta)^2 \geq c^2.$$

При $r \rightarrow 0$ оно становится условием сверхзвукового течения для проекции на плоскость, перпендикулярную оси x .

Для инвариантной подмодели (1.3), (1.4) могут быть введены величины и определения, аналогичные величинам и определениям двумерных стационарных течений: i -линия тока $u^{-1}ds = v^{-1}dq$, являющаяся бихарактеристикой i -характеристики C_0 ; i -функция тока $\psi(s, q)$, для которой $u = -(3/2)qr\psi_q$, $v = (3/2)qr\psi_s$, $\rho = \varphi_\psi \varphi_s^{-1}$, $q = \varphi_s(s, \psi)$; i -интеграл энтропии $S = S(\psi)$; i -интеграл закрутки $w = D(\psi)\varphi_\psi^{2/3}\varphi_s^{-1}$.

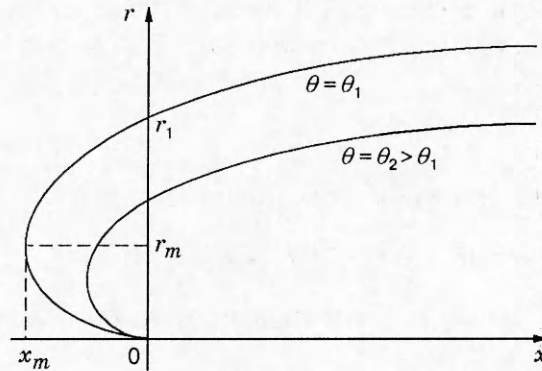
2. Групповое свойство. Система уравнений (1.3), где вместо последнего уравнения взято (1.4), допускает следующие преобразования эквивалентности: $\rho' = a_1\rho$, $p' = a_1p + a_2$, $A' = a_1A$ при $\alpha \neq 0$; $(s', q', u', v', w', \beta') = a_3(s, q, u, v, w, \beta)$, $p' = a_3^2 p$ при $\alpha = 0$; преобразование инвариантных переменных не выписывается. С точностью до преобразований эквивалентности проводится групповая классификация уравнений подмодели по произвольным элементам A , α , β . Результат групповой классификации приведен в таблице, где введены обозначения $Y_\gamma = s\partial_s + q\partial_q + u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w - 2\rho\partial_\rho + 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}p\partial_p$, $X_\chi(p) = \chi'\rho\partial_\rho + \chi\partial_p$; χ , g — произвольные функции. Ядро допускаемых алгебр одномерно $\{\partial_s\}$. Расширение ядра указано в последней колонке таблицы при соответствующих спецификациях произвольных элементов.

A	α, β	Операторы
$pg(p\rho^{-1})$	$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$	X_p
$g(\rho)$		X_1
ρ		X_1, X_p
0		$X_{\chi(p)}$
$pg(p\rho^{-\gamma}), \gamma \neq 1$	$\alpha = \beta = 0$	Y_γ
$pg(\rho)$		$Y_0 + 2X_p$
γp		X_p, Y_0
$g(\rho e^p)$		$Y_0 + 2X_1$
$\rho^\gamma, \gamma \neq 1$		Y_γ, X_1
0	$Y_0, X_{\chi(p)}$	

3. Поверхности уровня инвариантных функций и область однолиственности.

Точке (s, q) инвариантной подмодели (1.3) соответствует двумерная поверхность в физическом пространстве $R^4(x, r, \theta, t)$. Сечение гиперплоскостью $t = \text{const}$ дает кривую в $R^3(x, r, \theta)$. При различных значениях t проекции кривых в пространство $R^3(x, r, \theta)$ образуют поверхность, представляющую собой спиральную поверхность уровня инвариантных функций, значения которых вычислены в одной точке. Уравнение поверхности уровня получается из формул (1.2) после исключения t :

$$x = rq^{-1}(\alpha\theta + s - \beta \ln q + \beta \ln r). \tag{3.1}$$



Сечение поверхности (3.1) полуплоскостью $\theta = \text{const}$ — кривая, имеющая два нуля функции $x(r)$ в точках $r_0 = 0$, $r_1 = q \exp(-\beta^{-1}(s + \alpha\theta))$ и один минимум $er_m = r_1$, $ex_m = -\beta r_1$. При увеличении угла θ величины r_1 , $|x_m|$ уменьшаются (см. рисунок).

Сечение поверхности (3.1) плоскостью $x = x_0$ представляет собой спираль при $x_0 \geq 0$ или две спирали, соединенные в точке $\alpha\theta_0 + s = \beta(\ln \beta - 1 - \ln |x_0|)$, $\beta r_0 = -qx_0$, согласно уравнению $\alpha\theta = x_0 q r^{-1} - s + \beta \ln q - \beta \ln r$ при $x_0 < 0$.

При $\alpha = 0$ поверхности уровня являются цилиндрическими поверхностями, образованными вращением кривой (3.1) вокруг оси x .

Пусть $\omega \subset R^2(s, q)$ — область в полуплоскости $q > 0$. При фиксированном t точкам области ω соответствуют линии в $\tilde{R}^3(x, r, \theta)$, покрывающие область Ω . Пусть Ω_{θ_0} — сечение области полуплоскостью $\theta = \theta_0$. Имеется взаимно однозначное соответствие между ω и Ω_{θ_0} по формулам (1.2). При изменении θ_0 на $2\pi k$, т. е. при $\theta = \theta_0 + 2\pi k$ (k — целое), образ Ω_{θ_0} сдвигается вдоль оси x на $2\pi k \alpha t$ и оба образа находятся в одной и той же полуплоскости. Для однолистности образов необходимо и достаточно, чтобы ширина ω вдоль s , т. е. длина сечения ω прямой $q = q_0$, не превышала величины $2\pi\alpha$. Например, для этого можно взять ω из полуполосы $\{q \geq 0, |s| \leq \pi\alpha\}$.

Если при некотором значении $q = q_0$ ширина ω вдоль s равняется $2\pi\alpha$, то в физическом пространстве для фиксированного t могут получиться разрывы физических величин U , V , W , ρ , p на винтовой линии $s = s_0$, $q = q_0$. Для непрерывности требуется периодичность инвариантных функций по s с периодом $2\pi\alpha$.

Итак, непрерывное инвариантное течение во всем пространстве возможно, если существует периодическое решение подмодели (1.3) в области шириной $2\pi\alpha$ по s , $q \geq 0$.

Если значения инвариантных функций в точках $q = q_0$, $s_1 = s_0$, $s_2 = s_0 + 2\pi\alpha$ различны, то какими они должны быть, чтобы винтовая поверхность разрыва стала контактным разрывом, ударной волной, стенкой?

Предложение 1. *Физические траектории лежат на поверхностях, соответствующих i -линиям тока подмодели.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения для расчета траекторий по формулам (1.1) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{q^2(u + \beta) + \alpha q w}{q^2 + \alpha^2}, \quad \frac{dr}{dt} = v + q, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{q^2 w - \alpha q(u + \beta)}{q^2 + \alpha^2}. \quad (3.2)$$

Из (1.2), (3.2) следуют равенства $dq/dt = v/t$, $ds/dt = u/t$. Отсюда получается уравнение для i -линии тока $u^{-1} ds = v^{-1} dq$.

Следствие. Если область ω определения решения подмодели (1.3) ограничена i -линиями тока и ее ширина по s не превышает $2\pi\alpha$, то в физическом пространстве границе области ω соответствует движущаяся стенка или контактный разрыв. В частности,

криволинейной полуполосе $q \geq 0$ ширины $2\pi\alpha$ по s , ограниченной i -линиями тока, соответствует течение, в котором движется винтообразная стенка нулевой толщины. Если на поверхности давление непрерывно, то получается контактный разрыв.

4. Уравнения сильного разрыва. Инвариантная поверхность задается равенством

$$F(x, r, \theta, t) = q - h(s) = 0. \quad (4.1)$$

Нормаль в физическом пространстве и скорость движения поверхности в направлении нормали вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= |\nabla F|^{-1} \nabla F = (1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2)^{-1/2} (-h_s, 1, \alpha q^{-1} h_s), \\ D &= -|\nabla F|^{-1} F_t = (q - (\beta + xt^{-1}) h_s) (1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2)^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_r, r^{-1} \partial_\theta)$.

Вектор скорости раскладывается на нормальную и касательную составляющие $\mathbf{u} = (U, V, W) = u_n \mathbf{n} + \mathbf{u}_\sigma$, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$.

Относительная скорость и условия на поверхности сильного разрыва [2, с. 39] записываются через инварианты:

$$\omega = u_n - D = (v - u h_s) (1 + (1 + \alpha^2 q^{-2}) h_s^2)^{-1/2}. \quad (4.2)$$

Для контактного разрыва $[p] = p_2 - p_1 = 0$, $v_j - u_j h_s = 0$, где индекс $j = 1, 2$ определяет значение величин по разные стороны разрыва.

Для ударной волны

$$\omega_1^2 = \rho_2 \rho_1^{-1} [p][\rho]^{-1}, \quad \omega_2^2 = \rho_1 \rho_2^{-1} [p][\rho]^{-1}, \quad (4.3)$$

условие Гюгонио имеет вид $H(\rho_2, p_2; \rho_1, p_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - (1/2)(p_2 + p_1)(\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}) = 0$, где $\varepsilon_j = \varepsilon(\rho_j, p_j)$ — значение внутренней энергии с i -й стороны ударной волны, $[\mathbf{u}_\sigma] = 0$.

Из последнего условия следует альтернатива:

1) i -прямой скачок ($h_s = 0$)

$$[u] = [w] = 0, \quad [v] = [\omega]; \quad (4.4)$$

2) i -косой скачок ($h_s \neq 0$)

$$[u] = -(\alpha^2 h^{-2} + 1) h_s [v], \quad [w] = 0, \quad [\omega] = [v] (1 + (1 + \alpha^2 h^{-2}) h_s^2)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Предложение 2. По заданным параметрам течения перед ударной волной при условии гиперболичности (1.6) в случае i -косого скачка и одному из параметров течения за фронтом ударной волны $\rho_2, p_2, h(s)$ определяются остальные параметры течения из условий ударного перехода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы $\rho_1, p_1, u_1, v_1, w_1$ и, например, $\rho_2 > \rho_1$. Тогда из условия Гюгонио определяется p_2 . Из (4.3) вычисляются ω_1, ω_2 . В случае i -прямого скачка из (4.4) находятся u_2, w_2, v_2 .

Для i -косого скачка уравнение его поверхности (4.1) определяется из (4.2) со стороны заданных параметров: $(u_1^2 - \omega_1^2 (1 + \alpha^2 h^{-2})) h_s^2 - 2v_1 u_1 h_s + v_1^2 - \omega_1^2 = 0$.

Действительные решения возможны при условии неотрицательности дискриминанта этого квадратного уравнения относительно h_s :

$$v_1^2 + h^2 (h^2 + \alpha^2)^{-1} u_1^2 \geq \omega_1^2 = \rho_2 \rho_1 [p][\rho]^{-1} \geq c_1^2.$$

Данное неравенство совпадает с (1.6) со стороны заданных параметров. После того как $h(s)$ определено, из (4.5) находятся w_2, v_2, u_2 .

Если задано p_2 вместо ρ_2 , то ρ_2 определяется из условия Гюгонио.

Если задано $h(s)$, то по (4.3) вычисляется ω_1 , а условие Гюгонио и первое равенство (4.5) задают ρ_2, p_2 в случае нормального газа [2, с. 23, 50].

Если задано v_2 , т. е. $[v]$, то из (4.2), (4.3), (4.5) в случае i -косого скачка определяются $p_2 = p_1 - \rho_1[v](v_1 - u_1 h_s)$, $\rho_2^{-1} = \rho_1^{-1}(1 + [v](v_1 - u_1 h_s)^{-1}(1 + (1 + \alpha^2 h^{-2})h_s^2))$. Подстановка этих выражений в условие Гюгонио дает дифференциальное уравнение для определения $h(s)$. Аналогично разрешается i -косой скачок в случае задания u_2 .

5. Инвариантное решение. На ядре допускаемых подмоделью алгебр строится инвариантное ∂_s -решение. Это решение системы (1.3), не зависящее от s . Поскольку $v \neq 0$, то течение изэнтропическое: $S = S_0$. Справедлив интеграл

$$D^3 \rho v = q^2 w^3. \quad (5.1)$$

После замены $\lambda = qw - \alpha(u + \beta)$ и подстановки интегралов получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\lambda_q}{\lambda} + \frac{1}{v} \left(1 + \frac{2\alpha^2}{q(q^2 + \alpha^2)} \right) = 0, \quad (5.2)$$

$$vv_q + v + \rho^{-1} c^2(\rho) \rho_q = q(q^2 + \alpha^2)^{-2} \lambda^2, \quad \frac{\rho_q}{\rho} + \frac{v_q}{v} + \frac{1}{q} + \frac{3}{v} = 0.$$

При $\alpha = 0$ имеется еще один интеграл $u + \beta = Cqw$. Интеграл типа Бернулли в рассматриваемой подмодели отсутствует.

Уравнение состояния газа можно подобрать так, чтобы получить заданную скорость v . Например, для $v = -q$ из (5.1), (5.2) следует $\rho = \rho_0 q$, $w = -D\rho_0^{1/3}$, $u = -\beta - \alpha^{-1} D\rho_0^{1/3} + (\alpha^{-1} q + \alpha q^{-1})c(\rho_0 q)$, $c(\rho) = c_0 \rho^2 (\rho^2 + \alpha^2 \rho_0^2)^{-1} \exp[-2\rho_0 \rho^{-1} - 2\alpha^{-1} \arctg(\rho \alpha^{-1} \rho_0^{-1})]$. Данное решение определено для $q > 0$ и описывает течение вдоль оси x с закруткой без растекания. При $q = 0$ наступает вакуум.

6. Изобарические течения. Общее решение уравнений газовой динамики при постоянном давлении $p = p_0$ найдено в [3]. Для инвариантных подмоделей требуется изучение совместности. Общее решение выписывается в лагранжевых переменных: $r = R$, $\theta = \vartheta$, $x = \xi$ при $t = 1$.

Удобно использовать полярные координаты, связанные с цилиндрическими формулами: $V = Q \cos \varphi$, $W = Q \sin \varphi$; $\varphi = \psi - \theta$. Уравнения изобарических течений принимают вид

$$U_\xi + (Q_R - R^{-1} Q \psi_\vartheta) \cos \varphi + (R^{-1} Q_\vartheta - Q \psi_R) \sin \varphi = 0,$$

$$V_\xi^2 - R^{-1} Q (Q_R \psi_\vartheta - \psi_R Q_\vartheta) = (Q U_R \psi_\xi - R^{-1} U_\vartheta Q_\xi) \sin \varphi - (U_R Q_\xi - R^{-1} Q U_\vartheta \psi_\xi) \cos \varphi,$$

$$|\dot{M}| = \frac{\partial(U, Q, \psi)}{\partial(\xi, R, \vartheta)} = 0.$$

Изобарические решения классифицируются по рангу матрицы M [3]. Рангу нуль отвечает постоянное решение

$$U = u_0, \quad V = v_0 \cos \vartheta + w \sin \vartheta, \quad W = -v_0 \sin \vartheta + w_0 \cos \vartheta.$$

Рангу один соответствует представление решений в виде

$$F(p, R \cos(\mu - \psi + \vartheta), \xi(Q'^2 + Q^2 \psi'^2)^{1/2} - R U' \sin(\mu - \psi + \vartheta)) = 0,$$

где $\operatorname{tg} \mu = Q'(Q\psi')^{-1}$; ψ, Q, U — произвольные функции параметра $p(\xi, R, \vartheta)$; F — произвольная функция.

Рангу два матрицы M соответствует представление

$$f(U, Q, \psi) = 0, \quad \xi f_U + R \cos(\psi - \vartheta) F_Q - R Q^{-1} \sin(\psi - \vartheta) F_\psi = g(U, Q, \psi),$$

$$\begin{aligned} & \xi^2 f_{UU} + R^2 \cos^2(\psi - \vartheta) F_{QQ} + R^2 Q^{-2} \sin^2(\psi - \vartheta) f_{\psi\psi} + 2\xi R \cos(\psi - \vartheta) f_{UQ} - \\ & - 2\xi R Q^{-1} \sin(\psi - \vartheta) f_{U\psi} - R^2 Q^{-1} \sin 2(\psi - \vartheta) f_{Q\psi} + R^2 Q^{-1} \sin^2(\psi - \vartheta) f_Q + \\ & + R^2 Q^{-2} \sin 2(\psi - \vartheta) f_\psi - 2\xi g_U - 2R \cos(\psi - \vartheta) g_Q + 2R Q^{-1} \sin(\psi - \vartheta) g_\psi = h(U, Q, \vartheta), \end{aligned}$$

где f, g, h — произвольные функции.

Для инвариантного решения (1.1) справедливы формулы

$$Q^2 = (v + R)^2 + R^2(R^2 + \alpha^2)^{-2}(Rw - \alpha(u + \beta))^2,$$

$$\psi = \vartheta + \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = R(Rw - \alpha(u + \beta))(R^2 + \alpha^2)^{-1}(v + R)^{-1}, \quad \xi = s + \alpha\vartheta.$$

Инвариантные решения с рангом матрицы M , равным двум, имеют вид

$$U = \alpha\psi + f(Q), \quad s - \alpha\varphi + \alpha R Q^{-1} \sin \varphi - R f' \cos \varphi = g(Q),$$

$$-f'' R^2 \cos^2 \varphi + 2\alpha R Q^{-1}(1 - R \cos \varphi) \sin \varphi - R^2 Q^{-1} f' \sin^2 \varphi - 2R g' \cos \varphi = h(Q)$$

с тремя произвольными функциями f, g, h .

Постоянные инвариантные решения отсутствуют.

Имеется два инвариантных решения с рангом матрицы M , равным единице, причем только при $\beta = 0$:

$$\alpha \neq 0, \quad u = -s, \quad v = -q, \quad w = -\alpha q^{-1}s;$$

$$\alpha = 0, \quad u = -s, \quad v = -q + Bq^{-1}(B + Cs), \quad w = Bq^{-1}(q^2 - (B + Cs)^2)^{1/2},$$

где B, C — постоянные.

Первому решению в физических переменных соответствует центрированная волна $U = xt^{-1}, V = W = 0$. Во втором случае в физических переменных получается решение $U = 0, V^2 + W^2 = B^2, V = Br^{-1}(Bt + Cx)$.

Мировые линии частиц имеют следующий вид:

$$x = \xi, \quad r^2 = R^2 + B(t - 1)(B(t + 1) + 2C\xi),$$

$$\operatorname{tg}(\theta - \vartheta) = B(t - 1)(R^2 - (C\xi + B)^2)^{1/2}(R^2 + B(t - 1)(C\xi + B))^{-1}.$$

Траектории частиц $x = \xi, r \cos(\theta - \vartheta - \arctg(b^2 - 1)^{-1/2}) = (C\xi + B)(b^2 - 1)^{1/2}, b = R(C\xi + B)^{-1}$ являются полупрямыми, касательными к окружности $r = (C\xi + B)(b^2 - 1)^{1/2}$, и представляют истечение газа из объемного источника с постоянным модулем скорости и закруткой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. Овсянников Л. В. Лекции по газовой динамике. М.: Наука, 1981.
3. Овсянников Л. В. Изобарические движения газа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.

Поступила в редакцию 3/VI 1998 г.