

6. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
7. Дынин Е. А. О распространении импульсов сжатия в конденсированных средах. — Труды ВНИИФТРИ. Физика импульсных давлений, 1979, вып. 44(74).
8. Борисов А. А., Вахгельт А. Ф., Накоряков В. Е. Распространение длинноволновых возмущений конечной амплитуды в газовзвесах. — ПМТФ, 1980, № 5.

УДК 534.011

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ НИТИ, ПАРАМЕТРЫ КОТОРОЙ ИЗМЕНЯЮТСЯ ПО ЗАКОНУ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

А. И. Весницкий, А. Ф. Ляхов  
(Горький)

В связи с непрерывным возрастанием требований к быстродействию машин, приборов и аппаратов при решении проблем повышения надежности и долговечности их работы все чаще оказывается существенно необходимо учитывать волновой характер динамических процессов в упругих элементах и, в частности, возможность возникновения параметрической неустойчивости. К настоящему времени достаточно подробно исследованы распределенные системы, параметры ( $P$ ) которых изменяются со временем однородно во всем пространстве [1, 2] ( $P = P_1(t)P_2(r)$ , где  $t$  — время,  $r$  — радиус-вектор). Класс распределенных систем, параметры которых изменяются неоднородно (например, системы с подвижными границами, с изменяющимися свойствами границ, с бегущей, стоячей волной параметров и т. д.), хотя и гораздо шире первого, изучен очень мало. До сих пор остается невыявленным полный набор явлений и обусловленных ими эффектов, возможных в таких системах.

Одной из характерных особенностей систем с неоднородно изменяющимися параметрами является возможность возбуждения в них импульсных колебаний с широким спектром частот [3]. В связи с этим в данной работе на примере простейшей одномерной системы типа нити (струны), параметры которой изменяются по закону бегущей волны, исследуются особенности проявления параметрической неустойчивости, выражающиеся в трансформации начальных возмущений в существенно не гармонические волны, имеющие формы импульсов. Такие исследования представляют не только теоретический, но и практический интерес, поскольку эффект формирования импульсных колебаний может являться одной из причин потери динамической устойчивости ветвей передач с гибкими связями [4], а также нарушения технологических процессов прядения и ткачества.

1. Параметрическая неустойчивость колебательного процесса в линейной системе как физическое явление выражается в неограниченном нарастании энергии колебаний  $E$  с течением времени. Исходя из этого, устойчивость и неустойчивость линейной параметрической системы определим соответствующим образом.

**О п р е д е л е н и е 1.** Распределенная линейная ограниченная система с изменяющимися во времени и пространстве параметрами будет устойчива, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что если в начальный момент времени  $t = 0$  полная энергия колебаний системы  $E(0, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(0)) < \delta$ , то для любого  $t > 0$   $E(t, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(t)) < \varepsilon$ , где  $u_n(x, y, z)$  — обобщенные координаты, описывающие данную распределенную систему;  $x, y, z$  — пространственные координаты;  $l_i(t)$  — параметры, характеризующие размеры системы.

**О п р е д е л е н и е 2.** Распределенная линейная ограниченная система с изменяющимися во времени и пространстве параметрами будет неустойчивой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $t_0(\varepsilon)$  такое, что если при  $t = 0$  полная энергия колебаний  $E(0, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(0)) \neq 0$ , то для  $t > t_0(\varepsilon)$   $E(t, x, y, z, u_n, u_{nt}, u_{nx}, u_{ny}, u_{nz}, l_i(t)) > \varepsilon$ .

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях гибкой нити с изменяющимися во времени и пространстве распределенными параметрами:

$$(1.1) \quad (\rho u_t)_t = (T u_x)_x;$$

$$(1.2) \quad u(0, t) = u(l, t) = 0;$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Здесь  $u(x, t)$  — поперечное смещение;  $\rho(x, t)$  — погонная плотность;  $T(x, t)$  — натяжение нити. Умножая (1.1) на  $u_t$  и складывая с тождеством  $T u_x (u_{xt} - u_{tx}) = 0$  после

соответствующей группировки, получим теорему Умова — Пойтинга с учетом нестационарности параметров \*

$$(1.4) \quad \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial t} = -\rho_t \frac{u_t^2}{2} + T_t \frac{u_x^2}{2},$$

где  $W = (\rho u_t^2 + T u_x^2)/2$  — плотность энергии;  $S = -T u_x u_t$  — поток волновой энергии (вектор Пойтинга).

В интегральной форме с учетом того, что поток энергии через границы системы равен нулю, теорема (1.4) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} E = \int_0^l \left( T_t \frac{u_x^2}{2} - \rho_t \frac{u_t^2}{2} \right) dx,$$

где  $E = \int_0^l W dx$  — полная механическая энергия нити.

С помощью (1.4) можно получить ряд известных результатов, а также выявить некоторые новые проявления параметрической неустойчивости в распределенных системах.

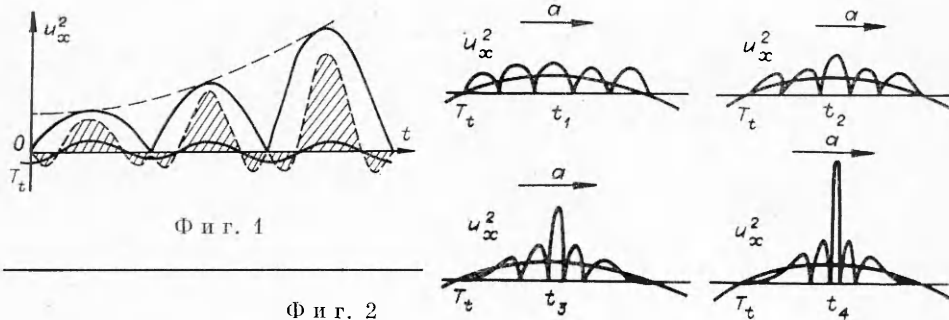
По определению 2 параметрическая неустойчивость нити будет наблюдаться, если работа внешних сил, передаваемая системе при изменении параметров, положительна. Из (1.4) следует, что это возможно, если плотность нити уменьшается ( $\rho_t < 0$ ), а натяжение нити увеличивается ( $T_t > 0$ ). В реальных системах значения натяжения и плотности всегда ограничены, поэтому за счет монотонного изменения параметров нельзя добиться параметрической неустойчивости колебаний.

Рассмотрим случай, когда параметры нити периодически изменяются по всей ее длине. Полагая для простоты нить нерастяжимой ( $\rho_t = 0$ ) и  $T = T_0(1 - m \sin 2\Omega t)$  ( $m, T_0$  и  $\Omega$  — постоянные величины, где  $m < 1$ ), из (1.4) видим, что стоячие волны в нити будут неограниченно усиливаться, если их частота  $\omega = \Omega$  (фиг. 1, где энергия, вносимая в систему посредством изменения натяжения, помечена штриховкой). В рассматриваемом случае увеличение энергии колебаний, очевидно, возможно лишь в результате нарастания амплитуды колебаний, подобно тому как это имеет место в сосредоточенных системах [6].

Параметрическую неустойчивость, которая сопровождается неограниченным нарастанием амплитуды колебаний без трансформации их формы, условимся называть параметрической неустойчивостью 1-го рода.

Параметрическая неустойчивость системы возможна и в случае, когда параметры изменяются неодновременно по всей ее длине. Рассмотрим распространение ограниченного в пространстве возмущения в бесконечной нити, параметры которой изменяются по закону бегущей волны (например,  $\rho = \text{const}$ ,  $T = T_0(1 + m \sin \Omega(t - x/a))$ ). Если скорость распространения поперечной волны  $c(x, t) = \sqrt{T/\rho}$  близка к скорости распространения волны параметра  $a$ , то начальное возмущение может сколь угодно долго находиться в области, где  $T_t > 0$  (фиг. 2). При этом энергия начального возмущения в соответствии с (1.4) по мере его распространения будет неограниченно возрастать, а профиль за счет неоднородности коэффициента усиления ( $\sim T_t$ ) и скорости распространения  $c(x, t)$  будет непрерывно трансформироваться в импульс (фиг. 2,  $t_1, t_2, t_3, t_4$  — различные моменты времени, в которые рассматривается возмущение).

Параметрическую неустойчивость, которая сопровождается непрерывным сжатием профиля распространяющихся волн, условимся называть параметрической неустойчивостью 2-го рода.



Ф и г. 1

Ф и г. 2

\* Теорема Умова — Пойтинга для систем с нестационарными параметрами ранее была сформулирована лишь применительно к электродинамическим задачам [5].

2. Рассмотрим непрерывное усиление распространяющихся волн в бесконечной нити, сопровождающееся неограниченным укручением их профиля. С этой целью запишем уравнение (1.1) в виде системы

$$V_x = \rho u_t, \quad V_t = Tu_x.$$

Отсюда, переходя к инвариантам Римана  $r_1 = u - V/\sqrt{T\rho}$ ,  $r_2 = u + V/\sqrt{T\rho}$ , получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= \frac{r_1 - r_2}{2} \sqrt{T\rho} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{T\rho}} + \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{T\rho}} \right), \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} - \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial r_2}{\partial x} &= \frac{r_2 - r_1}{2} \sqrt{T\rho} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{T\rho}} - \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{T\rho}} \right). \end{aligned}$$

Если  $T\rho = \text{const}$  (т. е. волновое сопротивление постоянно), то  $r_1 = f_1(\xi_1)$ ,  $r_2 = f_2(\xi_2)$ , где  $\xi_1(x, t)$ ,  $\xi_2(x, t)$  — характеристики системы (2.1).

При образовании бесконечно крутых профилей волн, распространяющихся в положительном или отрицательном направлении вдоль  $x$ , производные по пространственной координате соответственно от  $r_1$  или  $r_2$ :

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{df_1}{d\xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{df_2}{d\xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x},$$

должны стремиться к бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ .

Полагая начальные условия (1.3), из которых определяются функции  $f_1$  и  $f_2$ , дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими производными, получим условие непрерывного укручения профиля одной из волн

$$(2.2) \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2),$$

которое также будет условием непрерывного сближения кривых семейства характеристик на плоскости  $x, t$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если параметры системы изменяются по закону бегущей волны  $T = T(t - x/a)$ ,  $\rho = \rho(t - x/a)$ , то характеристики  $\xi_1$  и  $\xi_2$  можно записать в явном виде

$$(2.3) \quad \xi_1 = x - \int_0^\eta \left( \frac{1}{c(\eta)} - \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta, \quad \xi_2 = x + \int_0^\eta \left( \frac{1}{c(\eta)} + \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta,$$

где  $\eta = t - x/a$ . Отсюда находим

$$(2.4) \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_1} = (1 - c(\eta)/a), \quad \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = (1 + c(\eta)/a).$$

Так как скорость распространения волн, будучи характеристикой среды, всегда строго положительна ( $c(\eta) > 0$ ), из (2.2), (2.4) следует, что неограниченно сближаться могут характеристики только первого семейства (2.3).

В качестве примера рассмотрим случай, когда параметры изменяются так, что

$$(2.5) \quad c(\eta) = c_0(1 + m \cos \Omega\eta)^{-1}, \quad m < 1.$$

В зависимости от того, как близки скорости распространения поперечной волны и волн параметров, можно выделить два случая: 1)  $|1 - c_0/a| < m$ , когда эти волны «синхронны»; 2)  $|1 - c_0/a| > m$ , когда они «асинхронны». Для «синхронных» волн из (2.3) имеем

$$(2.6) \quad \xi_1 = x - c_0\Omega^{-1} [m^2 - (1 - \beta)^2]^{-1/2} \ln \left| \frac{\text{tg} \frac{\Omega\eta}{2} + \gamma_0}{\text{tg} \frac{\Omega\eta}{2} - \gamma_0} \right|,$$

а для «асинхронных»

$$\xi_1 = x - 2c_0\Omega^{-1} [(1 - \beta)^2 - m^2]^{-1/2} \text{arctg} \left( \sqrt{\frac{1 - \beta - m}{1 - \beta + m}} \text{tg} \frac{\Omega\eta}{2} \right),$$

где  $\beta = c_0/a$ ;  $\gamma_0 = \sqrt{(m + 1 - \beta)/(m - 1 + \beta)}$ . Второе же семейство характеристик для обоих случаев одинаково:

$$\xi_2 = x + 2c_0\Omega^{-1} [(1 + \beta)^2 - m^2]^{-1/2} \text{arctg} \left( \sqrt{\frac{1 + \beta - m}{1 + \beta + m}} \text{tg} \frac{\Omega\eta}{2} \right).$$

Отсюда видно, что условие сближения характеристик (2.2) выполняется только в случае «синхронных» волн и лишь для первого семейства (2.6).

Укручение профиля распространяющихся волн сопровождается ростом «мгновенной частоты» последних [7], т. е. переносом энергии вверх по спектру. Чтобы убе-

даться в этом, рассмотрим задачу о колебаниях полубесконечной нити, на границе которой расположен источник  $u(0, t) = \sin(\omega_0 t + \theta_0)$ . Тогда, следуя методу характеристик для волны, распространяющейся в  $+x$  направлении, можно записать  $u(0, t) = \sin(\omega_0 t(\xi_1) + \theta_0)$ , где  $\xi_1 = \xi_1(0, t)$ . Выражая  $t = t(\xi_1)$  в явном виде из уравнения характеристик (2.6) и заменяя  $\xi_1$  на  $\xi_1$ , получим

$$u(x, t) = \sin(\omega_0 t(\xi_1) + \theta_0),$$

$$t(\xi_1) =$$

$$= 2\Omega^{-1} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega \eta}{2} \left(1 + e^{-\Omega \sqrt{m^2 - (1-\beta)^2 x/c_0}}\right) - \gamma_0 \left(1 - e^{-\Omega \sqrt{m^2 - (1-\beta)^2 x/c_0}}\right)}{\gamma_0 \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta}{2} \left(1 - e^{-\Omega \sqrt{m^2 - (1-\beta)^2 x/c_0}}\right) - \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta}{2} \left(1 + e^{-\Omega \sqrt{m^2 - (1-\beta)^2 x/c_0}}\right)} \right].$$

Определяя «мгновенную частоту» как частную производную от фазы  $\theta = \omega_0 t(\xi_1) + \theta_0$  по времени, находим, что на расстоянии  $x_0 = \text{const}$

$$\omega = \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_{x_0} = \omega_0 \frac{\partial t(\xi_1)}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \Big|_{x_0}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial t(\xi_1)}{\partial \xi_1} = - \left( \frac{1}{c(t(\xi_1))} - \frac{1}{a} \right), \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = - \left( \frac{1}{c(\eta)} - \frac{1}{a} \right)^{-1},$$

получим

$$(2.7) \quad \omega = \omega_0 \frac{\frac{1}{c(t(\xi_1))} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c(\eta)} - \frac{1}{a}} \Big|_{x_0} = \omega_0 \frac{1 - a/c(t(\xi_1))}{1 - a/c(\eta)} \Big|_{x_0}.$$

Выражение (2.7), очевидно, описывает распределенный эффект Доплера при прохождении волн через движущуюся неоднородность параметров среды [8]. Подставляя в (2.7) значение  $c(t(\xi_1))$  и  $c(\eta)$ , получим

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \beta + m \cos \Omega t(\xi_1)}{1 - \beta + m \cos \Omega \eta} \Big|_{x_0}.$$

Можно показать, что когда  $\cos \Omega \eta \rightarrow -(1 - \beta)/m$ ,

$$\omega \rightarrow \omega_0 \exp(+\sqrt{m^2 - (1 - \beta)^2} \Omega x/c_0),$$

т. е. по мере распространения вдоль  $x$  «мгновенная частота», соответствующая участку увеличивающейся энергии ( $T_t > 0$ ), неограниченно возрастает. Плотность энергии волны изменяется по закону

$$W = \rho \omega_0^2 \left( \frac{1 - a/c(t(\xi_1))}{1 - a/c(\eta)} \right)^2 \cos^2(\omega_0 t(\xi_1) + \theta_0) \Big|_{x_0},$$

Для  $W$  имеет место инвариант

$$\bar{W}/\omega^2 = I,$$

где  $\bar{W}$  — усредненная по периоду плотность энергии. Инвариант  $I$  совпадает по форме с инвариантом, полученным в работе [9] для волн, взаимодействующей с движущейся границей. Полагая  $\omega_0 = \Omega$ ,  $\beta = 1$ ,  $\theta_0 = 0$ , из (2.7) имеем

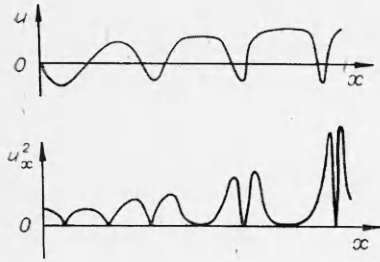
$$u(x, t) = \frac{\operatorname{th} \Omega m x/c_0 - \sin \Omega(t - x/a)}{1 - \operatorname{th} \Omega x/c_0 \sin \Omega(t - x/a)}.$$

Из полученного выражения следует, что по мере распространения волны в нити происходит непрерывная трансформация ее профиля в последовательность бегущих импульсов. Зависимость  $u(x, t)$  и  $W \sim u_x^2$  от координаты  $x$  в фиксированный момент времени  $t$  показана на фиг. 3.

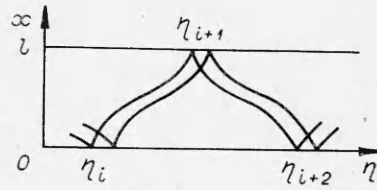
3. Наибольший практический интерес представляет рассмотрение процессов параметрической неустойчивости 2-го рода в системах ограниченной длины. Полагая  $T_p = \text{const}$ , решение задачи (1.1) — (1.3) запишем в форме

$$u(x, t) = f_1(\xi_1) + f_2(\xi_2),$$

где  $\xi_1(x, t)$ ,  $\xi_2(x, t)$  — характеристики уравнения (1.1), а  $f_1, f_2$  определяются из условий (1.2), (1.3).



Ф и г. 3



Ф и г. 4

Как показано выше, трансформация волн в последовательность импульсов сопровождается непрерывным сближением характеристик на плоскости  $x, t$ . Рассмотрим, как изменяется расстояние между двумя характеристиками за одно переотражение от границ (фиг. 4). Используя (2.3), находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_i)}\right)^{-1} d\eta_i &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_{i+1})}\right)^{-1} d\eta_{i+1}, \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_{i+1})}\right)^{-1} d\eta_{i+1} = \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_{i+2})}\right)^{-1} d\eta_{i+2}. \end{aligned}$$

Отсюда  $d\eta_{i+2}/d\eta_i = D_{i+1}^+ D_i^-$ ,

$$D_{i+1}^+ = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_{i+2})}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_{i+1})}\right)^{-1}, D_i^- = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_{i+1})}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_i)}\right)^{-1}.$$

Для  $n$ -переотражений получим

$$\frac{d\eta_{2n}}{d\eta_0} = \prod_{i=0}^{2(n-1)} D_{i+1}^+ D_i^-,$$

и, следовательно, условие пересечения ломаных, составленных из отрезков характеристик, при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид

$$(3.1) \quad \left( \prod_{i=0}^{2(n-1)} D_{i+1}^+ D_i^- \right)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Изменение плотности энергии происходит за счет сжатия профиля распространяющихся в нити волн и работы внешних сил, изменяющих параметры системы. Энергия же колебаний изменяется при этом пропорционально частоте, т. е. полное число квантов остается неизменным ( $E/\omega = \text{const}$ ). Следовательно, критерий (3.1) является критерием неустойчивости 2-го рода.

По своей форме он аналогичен критерию, который получен для системы с движущимися границами [10–12]. Сравнивая (3.1) с (2.7), а также с выражением эффекта Дошлера на прохождение, можно видеть, что первая составляющая под знаком произведения (3.1) характеризует изменение частоты волны при прохождении движущейся неоднородности параметров среды в  $-x$  направлении, а второй сомножитель — в  $+x$  направлении.

Исследование (3.1) в общем случае связано с математическими трудностями, но если ломаная, составленная из отрезков характеристик и проходящая через точки  $(0, \eta_i)$ ,  $(l, \eta_{i+1})$ ,  $(0, \eta_{i+2})$ , периодическая ( $\eta_{i+2} = \eta_i + \tau$ ,  $\tau$  — период ломаной), то критерий (3.1) будет выполняться, если

$$(3.2) \quad \left| \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_i)} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_{i+1})}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c(\eta_{i+1})} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{c(\eta_i)}} \right| < 1.$$

В такой постановке отыскание условий проявления параметрической неустойчивости 2-го рода распадается на два этапа: 1) нахождение условия существования периодической ломаной; 2) нахождение условия сближения ломаных.

1. Используя (2.3), запишем систему уравнений, определяющих периодическую ломаную (см. фиг. 4):

$$\xi_1 = x_0 - \int_0^{\eta_0} \left( \frac{1}{c(\eta)} - \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta, \quad \xi_1 = x_1 - \int_0^{\eta_1} \left( \frac{1}{c(\eta)} - \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta,$$

$$\xi_2 = x_1 + \int_0^{\eta_1} \left( \frac{1}{c(\eta)} + \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta, \quad \xi_2 = x_2 + \int_0^{\eta_2} \left( \frac{1}{c(\eta)} + \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta,$$

$$x_2 = x_0 = 0, \quad x_1 = l, \quad \eta_2 = \eta_0 + \tau.$$

Отсюда следует

$$(3.3) \quad l = \int_{\eta_0}^{\eta_1} \left( \frac{1}{c(\eta)} + \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_0 + \tau} \left( \frac{1}{c(\eta)} + \frac{1}{a} \right)^{-1} d\eta.$$

Периодическая ломаная существует, если (3.3) имеет действительное решение относительно  $\eta_0$  и  $\eta_1$ .

Для примера возьмем прежний закон изменения параметра (2.5) и вновь рассмотрим случай «синхронных» и «асинхронных» волн. В случае «синхронных» волн ( $|1 - \beta| < m$ ) из (3.3) получим

$$(3.4) \quad \operatorname{th} \alpha_1 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}}{1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{1}{\delta} \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}}{1 + \frac{1}{\delta^2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}},$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{m^2 - (1 - \beta)^2}, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{(1 + \beta)^2 - m^2},$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1 + \beta + m}{1 + \beta - m}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{1 - \beta + m}{m - 1 + \beta}},$$

$\tau = 2\pi N/\Omega$ ,  $N = 1, 2, \dots$ ,  $\omega = \pi c_0/l$  — наименьшая собственная частота системы с постоянными параметрами. Решение (3.4) будет действительным, если

$$(3.5) \quad (\delta^2 + \gamma_1^2)^2 \operatorname{th}^2 \alpha_1 \operatorname{tg}^2 \beta_1 + 4\gamma_1 \delta (\delta \operatorname{tg} \beta_1 + \gamma_1 \operatorname{th} \alpha_1) (\delta \operatorname{th} \alpha_1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \beta_1) \geq 0.$$

Вид области существования периодической ломаной в этом случае при  $\beta = 1$  показан на фиг. 5.

Для «асинхронных» волн ( $|1 - \beta| > m$ ) из (3.3) имеем

$$(3.6) \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}}{1 + \frac{1}{\gamma_2^2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2}},$$

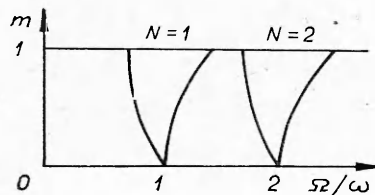
$$\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{1}{\delta} \frac{\operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2} - \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2}}{1 + \frac{1}{\delta^2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_0}{2} \operatorname{tg} \frac{\Omega \eta_1}{2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{1 - \beta + m}{1 - \beta - m}}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\omega} \sqrt{(1 - \beta)^2 - m^2}.$$

Условие существования действительных  $\eta_0$ ,  $\eta_1$ , удовлетворяющих (3.6), имеет вид

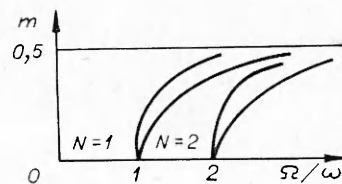
$$(3.7) \quad (\delta^2 - \gamma_2^2)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \operatorname{tg}^2 \beta_1 - 4\gamma_2 \delta (\delta \operatorname{tg} \beta_1 + \gamma_2 \operatorname{tg} \alpha_2) (\gamma_2 \operatorname{tg} \beta_1 + \delta \operatorname{tg} \alpha_2) \geq 0.$$

Область существования периодической ломаной в плоскости параметров  $m$ ,  $\Omega/\omega$  при  $\beta = 0,5$  показана на фиг. 6.

Как в случае «синхронных», так и «асинхронных» волн (фиг. 5, 6) области существования периодических ломаных представляют набор непересекающихся зон. Сравнение размеров областей, определяемых (3.5), (3.7), показывает, что в случае «синхронных» волн ширина зон примерно в 5 раз больше, чем в случае «асинхронных».



Ф и г. 5



Ф и г. 6

2. Рассмотрим условие сближения семейства ломаных к периодической. Из (3.2) имеем

$$(3.8) \quad \left| \frac{a + c(\eta_0)}{a + c(\eta_1)} \frac{a - c(\eta_1)}{a - c(\eta_0)} \right| < 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega \eta_0}{2} < \operatorname{tg}^2 \frac{\Omega \eta_1}{2}.$$

Оказывается, что это условие выполняется всюду, где и (3.5), (3.7), за исключением границ, на которых имеет место равенство  $|\operatorname{tg}(\Omega \eta_0/2)| = |\operatorname{tg}(\Omega \eta_1/2)|$ . Таким образом, видим, что в случае «синхронных» волн область неустойчивости определяется (3.5), а в случае «асинхронных» — (3.7).

В реальных системах всегда существуют некоторые потери механической энергии. Предположим, что они сосредоточены на границах ( $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_b$  — коэффициенты отражения волн от границ). Тогда вместо (3.8) будем иметь

$$\left| \frac{a + c(\eta_0)}{a + c(\eta_1)} \frac{a - c(\eta_1)}{a - c(\eta_0)} \right| < \Gamma_a \Gamma_b.$$

Из этого неравенства следует, что области неустойчивости с учетом потерь будут уже. Порог неустойчивости

$$\omega_{\text{п}} = \frac{1 - \Gamma_a \Gamma_b}{1 + \Gamma_a \Gamma_b} \frac{1 - \beta}{2\beta}$$

не зависит от номера зоны  $N$ , что указывает на принципиальную необходимость учета высших зон неустойчивости.

Проведенный анализ показал, что для параметрической неустойчивости 2-го рода характерен перенос энергии вверх по спектру, т. е. возникновение колебаний все более и более высоких частот. Энергия же высокочастотных колебаний, как известно [13], наиболее интенсивно поглощается материалом, реализуясь в его нагреве и разрушении микроструктуры. Амплитуда колебаний при этом может оставаться в пределах технических допусков, однако следует ожидать, что долговечность работы элементов в таких режимах будет резко снижаться. В этом смысле представляется важным не только изучение неустойчивости 2-го рода, но и исследование переходных процессов, когда эта неустойчивость имеет место непродолжительное время.

Поступила 10 III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1967.
2. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978.
3. Весницкий А. И., Крысов С. В., Потапов А. И. Экспериментальное исследование параметрического возбуждения импульсных колебаний в одномерных механических системах. — ПМ, 1980, т. 16, № 12.
4. Светлицкий В. А. Передачи с гибкой связью. М.: Машиностроение, 1967.
5. Аверков С. И., Островский Л. А. Распространение колебаний в системах с параметрами, зависящими от времени. — Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика, 1958, т. 1, № 4.
6. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
7. Аверков С. И., Степанов Н. С. Распространение волн в системах с бегущим параметром. — Изв. высш. учеб. заведений. Радиофизика, 1959, т. 2, № 2.
8. Сорокин Ю. М., Степанов Н. С. Применение вариационных методов к исследованию распространения волн в системах с бегущими параметрами. — ПМТФ, 1972, № 1.
9. Весницкий А. И., Потапов А. И. О некоторых общих свойствах волновых процессов в одномерных механических системах переменной длины. — ПМ, 1975, т. 2, № 4.
10. Весницкий А. И., Крысов С. В., Потапов А. И. Неустойчивость крутильных волн в стержнях с подвижными закреплениями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 6.
11. Весницкий А. И., Крысов С. В. Генерация импульсов в распределенных системах с подвижными границами. — Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, № 19.
12. Весницкий А. И., Островский Л. А. и др. Импульсная параметрическая генерация в распределенных системах. — Письма в ЖЭТФ, 1969, № 5.
13. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1975.