

с $t = -15^\circ\text{C}$, что, по-видимому, связано с нарушением зависимости температуры кристаллизации воды от давления, описываемой формулой (3)).

Вид температурно-временной (или скоростной) зависимости прочности в дальнейшем будет уточняться, однако то, что с температурой связан только один из двух параметров реологической кривой, видимо, можно считать установленным фактом. Это позволяет значительно сократить и упростить опыты и расчеты по определению прочности мерзлого грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов.— М.: Высш. шк., 1978.
2. Зарецкий Ю. К., Чумичев Б. Д. Кратковременная ползучесть льда.— Новосибирск: Наука, 1982.
3. Регель В. Р., Слуцкер А. И., Томашевский Э. В. Кинетическая природа прочности твердых тел.— М.: Наука, 1974.
4. Коновалов А. А. Количественная аппроксимация температурной и временной зависимости прочности мерзлых грунтов // Инж. геология.— 1986.— № 2.
5. Герасимов А. С. К оценке предельно длительного сопротивления мерзлого грунта по материалу // Проблемы механики грунтов и инженерного мерзлотоведения.— М.: Стройиздат, 1990.
6. Роман Л. Т. Прогноз длительной прочности мерзлых торфяных грунтов // Там же.
7. Дерюгин А. Г. Исследование скоростной зависимости мерзлых грунтов // Инженерные исследования мерзлых грунтов.— Новосибирск: Наука, 1979.

г. Тюмень

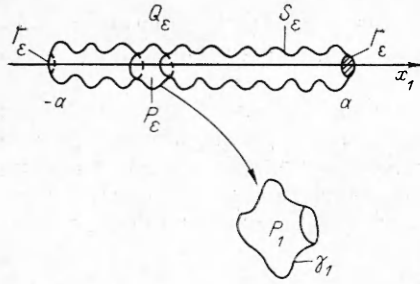
Поступила 24/VI 1991 г.,
в окончательном варианте — 11/XI 1991 г.

УДК 539.3

А. Г. Колпаков

К ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ БАЛОК С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Асимптотические методы усреднения, получившие широкое распространение применительно к монолитным композитам (см. [1—3] и библиографию к ним), в последнее время используются для исследования тел периодического строения, занимающих тонкие области — пластинки и балки [4—6]. В данной работе производится переход от трехмерной задачи теории упругости с начальными напряжениями в области малого диаметра ε (что формализуется в виде $\varepsilon \rightarrow 0$) к задаче теории балок. Возникающая задача теории балок (асимптотически точная) в общем случае отлична от классической. Для однородных балок она совпадает с классической, т. е. различие между асимптотической и классической теориями имеет место для балок сложной структуры. Использование таких балок в современных конструкциях делает вносимые асимптотической теорией поправки практически значимыми. Отличие этой задачи от [6] — несимметрия коэффициентов, что приводит к появлению новых элементов в применении асимптотических методов и ряда новых ячеечных задач. Как видно из дальнейшего, существенную роль в задаче играет порядок начальных напряжений σ_{ij}^* по сравнению с диаметром области ε . Чтобы учесть эту роль, начальные напряжения берутся в форме $\sigma_{ij}^* = \varepsilon^{-2} \sigma_{ij}^{*(-2)} + \varepsilon^{-1} \sigma_{ij}^{*(-1)} + \dots$, соответствующей изгибу балки или ее осевому растяжению при фиксированных усилиях. Осевое растяжение балки фиксированными деформациями, когда σ_{ij}^* имеет порядок ε^{-4} , приводит к результатам, аналогичным [7—9] для монолитных тел. Здесь этот случай не изучается.



Постановка задачи. Рассмотрим тело периодического строения, полученное путем повторения некоторой ячейки периодичности (ЯП) P_ε (ε — ее характерный размер) вдоль оси Ox_1 (см. рисунок). В результате имеем тело периодического строения с характерным диаметром $\varepsilon \ll 1$ — балку. Уравнения равновесия (колебаний) балки как трехмерного упругого тела с

начальными напряжениями запишем в виде [10]

$$(1) \quad (\mathcal{A}_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) u_{k,l}^{\varepsilon})_{,j} = f_i \text{ в } Q_\varepsilon,$$

$$\mathcal{A}_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) u_{k,l}^{\varepsilon} n_j = 0 \text{ на } S_\varepsilon, \quad \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon.$$

Здесь $\partial/\partial x_j = ,j$; $Q_\varepsilon, S_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon$ — область, занятая балкой, и ее поверхности (см. рисунок); $[-a, a]$ — проекция области Q_ε на ось Ox_1 ; \mathbf{u}^ε — перемещения; $\mathbf{f} = (\varepsilon^{-2} f_1^0, \varepsilon^{-2} f_2^0, \varepsilon^{-2} f_3^0)$ — массовые силы (для задачи о собственных колебаниях $\mathbf{f} = \varepsilon^{-2} \rho(\mathbf{x}/\varepsilon) \omega \mathbf{u}^\varepsilon$, ω — собственная частота); множитель ε^{-2} введен для того, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ предельные значения были ненулевыми [6]; $\mathcal{A}_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$ — известные [10] комбинации тензора упругих постоянных $\varepsilon^{-4} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и начальных напряжений $\sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$:

$$(2) \quad \mathcal{A}_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) = \varepsilon^{-4} a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) + \dots,$$

где $\mathcal{A}_{ijkl}^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) = \sigma_{jl}^{*(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon) \delta_{ik}$ ($m = -2, -1, \dots$); δ_{ij} — дельта Кронекера.

З а м е ч а н и е 1. В связи с отличием коэффициентов (2) от традиционно используемых (порядка единицы для монолитных тел [1–3, 7, 8], порядка ε^{-3} для пластинок [4, 5] и ε^{-4} для балок [6]) прокомментируем слагаемые в (2). Слагаемое $\varepsilon^{-4} a_{ijkl}$ гарантирует ненулевую изгибную жесткость балки при $\varepsilon \rightarrow 0$ (как известно, жесткости балки на изгиб пропорциональны четвертой степени ее диаметра [11]). Слагаемое $\varepsilon^{-2} \sigma_{jl}^{*(-2)}$ соответствует растяжению балки усилием, не зависящим от ε (постоянное напряжение балки). Действительно, умноженная на площадь поперечного сечения, имеющую порядок ε^2 , эта величина не зависит от ε . Слагаемое $\varepsilon^{-1} \sigma_{jl}^{*(-1)}$ отвечает напряжениям, возникающим в балке при изгибе, что следует из [6].

Функции $\rho(\mathbf{y}), a_{ijkl}(\mathbf{y}), \sigma_{jl}^{*(m)}(x_1, \mathbf{y})$ периодичны по y_1 с периодом $[0, m]$, где $[0, m]$ — проекция ЯП $P_1 = \varepsilon^{-1} P_\varepsilon = \{\mathbf{y} = \varepsilon^{-1} \mathbf{x}: \mathbf{x} \in P_\varepsilon\}$ на ось Oy_1 .

Асимптотическое разложение. Рассмотрим задачу (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, для чего воспользуемся асимптотическим разложением [6]

$$(3) \quad \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{u}^{(k)}(x_1, \mathbf{y}), \quad \langle \mathbf{u}^{(k)} \rangle = 0 \text{ при } k \geq 1,$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon^{-4} \sigma_{ij}^{*(-4)}(x_1, \mathbf{y}) + \varepsilon^{-3} \sigma_{ij}^{*(-3)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{*(m)}(x_1, \mathbf{y}).$$

Здесь x_1 — медленная переменная вдоль оси балки $[-a, a]$; $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — быстрая переменная; функции в правых частях предполагаются периодическими по y_1 с ЯП $[0, m]$; $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{m} \int_{P_1} \cdot d\mathbf{y}$ — среднее по ЯП P_1 .

Анализ задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ распадается на два этапа [4]. Первый состоит в получении уравнений равновесия. Как видно из [6], он не связан с локальными определяющими уравнениями (в рассматриваемом случае — с коэффициентами \mathcal{A}_{ijkl}) и является единым для любых

уравнений состояния. Имеют место следующие уравнения для усилий $N_{ij}^{(m)} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$, изгибных моментов $M_{\alpha j}^{(m)} = \langle y_{\alpha} \sigma_{j1}^{(m)} \rangle$ и момента кручения $\mathcal{M} = M_{32}^{(-3)} - M_{23}^{(-3)}$:

$$(4a) \quad N_{\alpha 1, 1x}^{(m)} = F_{\alpha} \quad (F_{\alpha} = 0 \text{ при } m = -3, F_{\alpha} = \langle f_{\alpha}^0 \rangle \text{ при } m = -2);$$

$$(4б) \quad -M_{\beta, 1x}^{(-3)} + N_{1\beta}^{(-2)} = \langle f_1^0 y_{\beta} \rangle \quad (\text{в задаче о собственных колебаниях } f_{\beta}^0 = \langle \rho \rangle \omega u_{\beta}^{(0)});$$

$$(4в) \quad \mathcal{M}_{, 1x} + (N_{32}^{(-2)} - N_{23}^{(-2)}) = \langle f_2^0 y_3 \rangle - \langle f_3^0 y_2 \rangle,$$

причем для локальных напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ выполняются соотношения [6]

$$(5) \quad \sigma_{ij, jy}^{(m)} = 0 \text{ в } Q_1^{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij}^{(m)} n_j = 0 \text{ на } \gamma_1^{\varepsilon},$$

где $Q_1^{\varepsilon} = \{(x_1, y_2, y_3) : \mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon, \mathbf{x} \in Q_{\varepsilon}\}$; γ_1^{ε} — боковая (свободная) поверхность Q_1^{ε} . Соотношения (4а)—(4в), (5) не зависят от определяющих соотношений. Здесь и далее латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, греческие — 2, 3; $\partial/\partial x_1 = , 1x$; $\partial/\partial y_i = , iy$.

З а м е ч а н и е 2. Под добавочными напряжениями [10] σ_{ij} здесь и далее понимаются величины

$$(6) \quad \sigma_{ij} = \mathcal{A}_{ijkh} u_{k,l}^{\varepsilon} = (\varepsilon^{-4} a_{ijkl} + \varepsilon^{-2} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-2)} + \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-1)} + \dots) u_{k,l}^{\varepsilon}.$$

Полные напряжения равны сумме начальных и добавочных: $\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}$.

Второй этап анализа задачи состоит в получении определяющих соотношений балки, устанавливающих связь $N_{\alpha 1}^{(m)}$, $M_{\beta}^{(-3)}$, \mathcal{M} с деформационными характеристиками. Этот этап в отличие от предыдущего самым существенным образом связан с локальными определяющими соотношениями (с начальными напряжениями в нашем случае). Он является основным в данной работе.

З а м е ч а н и е 3. Операторы дифференцирования при использовании двухмасштабного разложения представляются в виде суммы операторов $\partial/\partial x_i$ и $\partial/\partial y_i$. Для функций аргументов x_1 и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, входящих в правые части (3), это представление принимает вид [6]

$$\varepsilon^{-1} \partial/\partial y_{\alpha} \quad (\alpha = 2, 3), \quad \varepsilon^{-1} \partial/\partial y_1 + \partial/\partial x_1.$$

Подставив (3) в (6), с учетом замечания 2 получаем

$$(7) \quad \sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\varepsilon^{-4} a_{ijkl} + \varepsilon^{-2} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-2)} + \varepsilon^{-1} \mathcal{A}_{ijkl}^{(-1)} + \dots) \times \\ \times (u_{k, 1x}^{(k)} + \varepsilon^{-1} u_{k, ly}^{(k)} + \dots).$$

Приравнявая в (6) члены при одинаковых степенях ε , имеем

$$(8a) \quad \sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijk1} u_{k, 1x}^{(m+4)} + a_{ijk1} u_{k, ly}^{(m+5)} \quad (m = -4, -3);$$

$$(8б) \quad \sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijk1} u_{k, 1x}^{(2)} + \mathcal{A}_{ijk1}^{(-2), (0)} u_{k, 1x} + a_{ijk1} u_{k, ly}^{(3)} + \mathcal{A}_{ijk1}^{(-2), (1)} u_{k, ly}$$

и т. д. Рассмотрим задачу (5), (8) при $m = -4$ со следующими условиями из (3): $\mathbf{u}^{(1)}$ периодична по y_1 с ЯП $[0, m]$ и $\langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle = 0$. С учетом того что функция аргумента x_1 играет роль параметра, ее решение можно найти в виде [1, 2, 4]

$$(9) \quad \mathbf{u}^{(1)} = -y_{\alpha} u_{\alpha, 1x}^{(0)}(x_1) \mathbf{e}_1 + \mathbf{U}(\mathbf{y}) \varphi(x_1) + \mathbf{V}(x_1)$$

($\{\mathbf{e}_i\}$ — базисные векторы системы координат). При получении (9) используются функции $\mathbf{X}^{p\alpha(v)}$ ($v = 0, 1$) — решения так называемой ячеечной задачи (ЯЗ) теории балок, введенной в [6]:

$$(10) \quad (a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k, ly}^{p\alpha(v)} + a_{ijp1}(\mathbf{y}) y_{\alpha}^v)_{, jy} = 0 \text{ в } P_1, \\ (a_{ijk1}(\mathbf{y}) X_{k, ly}^{p\alpha(v)} + a_{ijp1}(\mathbf{y}) y_{\alpha}^v) n_j = 0 \text{ на } \gamma_1,$$

$\mathbf{X}^{p\alpha(v)}(\mathbf{y})$ периодична по y_1 с периодом $[0, m]$ и $\langle \mathbf{X}^{p\alpha(v)} \rangle = 0$

(γ_1 — боковая (свободная) поверхность P_1 (см. рисунок)). При этом учтено, что [6]

$$\mathbf{X}^{\beta 1(0)}(\mathbf{y}) = -y_\beta \mathbf{e}_1 \quad \text{и} \quad u_1^{(0)}(x_1) = 0.$$

Функция $\mathbf{U}(\mathbf{y}) = y_\beta s_\beta \tilde{\mathbf{e}}_\beta$, где $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$, $\tilde{\mathbf{e}} = \begin{cases} 3 & \text{при } \beta = 2, \\ 2 & \text{при } \beta = 3, \end{cases}$ связана с кручением стержня (подробнее см. [6]).

Подстановка (10) в (8а), (8б) дает согласно [6] равенства

$$(11a) \quad \sigma_{ij}^{(-4)} = 0;$$

$$(11б) \quad \sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(\mathbf{y}) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ij11}(\mathbf{y}) y_\alpha u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij11}(\mathbf{y}) V_{1,1x}(x_1) + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y}) s_\beta y_\beta \varphi_{,1x}(x_1).$$

Рассмотрим задачу (5) при $m = -3$ (принимая во внимание (11а)), (11б) со следующими условиями: $\mathbf{u}^{(2)}$ периодична по y_1 с ЯП $[0, m]$ и $\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle = 0$. Ее решение можно записать в виде [6]

$$(12) \quad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{X}^{11(0)}(\mathbf{y}) V_{1,1x}(x_1) - y_\alpha V_{\alpha,1x}(x_1) \mathbf{e}_1 + \mathbf{X}^{1\beta(1)}(\mathbf{y}) u_{\beta,1x1x}^{(0)}(x_1) + \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{y}) \varphi_{,1x}(x_1) + y_\beta s_\beta \tilde{\mathbf{e}}_\beta \varphi(x_1) + \mathbf{W}(x_1),$$

где $\mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{y})$ — решение ЯЗ, описывающей кручение [6]:

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{(1)} + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y}) s_\beta y_\beta \tilde{\mathbf{e}}_\beta)_{,jy} = 0 \quad \text{в } P_1,$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y}) X_{k,ly}^{(3)} + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y}) s_\beta y_\beta \tilde{\mathbf{e}}_\beta) n_j = 0 \quad \text{на } \gamma_1,$$

$\mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{y})$ периодична по y_1 с периодом $[0, m]$ и $\langle \mathbf{X}^{(3)} \rangle = 0$.

Подстановка (12) в (8а) при $m = -3$ после осреднения по ЯП P_1 дает (подробнее см. [6])

$$(13) \quad \begin{aligned} N_{11}^{(-3)} &= A_{111}^0 V_{1,1x} + A_{11\alpha}^1 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{11}^0 \varphi_{,1x}, \\ M_{\beta 1}^{(-3)} &= A_{\beta 11}^1 V_{1,1x} + A_{\beta 1\alpha}^2 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{\beta 1}^1 \varphi_{,1x}, \\ \mathcal{M} &= A_{001}^1 V_{1,1x} + A_{00\alpha}^2 u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + B_{00}^1 \varphi_{,1x}. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $A_{ijk}^{\mu+\nu}$, B_{ij}^μ ($\mu, \nu = 0, 1$) даются формулами (3.30) из [6] и выражаются через входящие в ЯЗ функции. В частности, в силу этого полные усилия и моменты в балке есть $N_{11}^* + N_{11}^{(-3)}$, $M_{\beta 1}^* + M_{\beta 1}^{(-3)}$, $\mathcal{M}^* + \mathcal{M}$, где звездочкой помечены усилия и моменты, соответствующие начальным напряжениям σ_{ij}^* , которые вычисляются по стандартным формулам [11]. Как видно, для тонких балок крутильная жесткость не зависит от начальных напряжений в отличие от [10].

При отсутствии начальных напряжений, когда вследствие $\sigma_{ij}^{*(-2)} = \sigma_{ji}^{*(-2)}$ имеем $N_{ij}^{(-2)} = N_{ji}^{(-2)}$, дальнейший анализ определяющих соотношений не проводился [6], поскольку указанная симметрия позволяла исключить из (4б), (4в) величины $N_{ij}^{(-2)}$ без какой-либо дополнительной информации о них. В нашем случае $N_{ij}^{(-2)}$ не обладают указанной симметрией и для получения предельной задачи требуется продолжить исследование асимптотики (3), а именно рассмотреть $N_{ij}^{(-2)}$.

Подставим в соотношение (8б) $\mathbf{u}^{(1)}$ согласно (10) и, учитывая, что $u_1^{(0)}(x_1) = 0$, получим

$$(14) \quad \sigma_{ij}^{(-2)} = a_{ijk1} u_{k,1x}^{(2)} + a_{ijk1} u_{k,ly}^{(3)} + \mathcal{A}_{ijk1}^{(-2)} u_{k,1x}^{(0)} - \mathcal{A}_{i1\alpha}^{(-2)} u_{\alpha,1x}^{(0)} + \mathcal{A}_{ij\beta}^{(-2)} s_\beta \varphi(x_1) = f_{ij} + [(\sigma_{j1}^{*(-2)} \delta_{i\alpha} - \sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{i1}) u_{\alpha,1x}^{(0)} + o_{j\beta}^{*(-2)} \delta_{i\beta} s_\beta \varphi(x_1)].$$

Здесь f_{ij} означает два первых слагаемых в правой части (14), для которых $f_{ij} = f_{ji}$ в силу симметрии упругих постоянных ($a_{ijkl} = a_{jikl}$). Несимметричные по i, j члены входят в правой части (14) только в выражения

в квадратных скобках. Тогда усилия $N_{ij}^{(-2)}$ представимы в виде

$$(15) \quad N_{ij}^{(-2)} = \langle f_{ij} \rangle + \langle \sigma_{j1}^{*(-2)} \delta_{i\alpha} - \sigma_{j\alpha}^{*(-2)} \delta_{i1} \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + \langle \sigma_{j\beta}^{*(-2)} \rangle \delta_{i\beta} s_{\beta} \varphi(x_1).$$

Растяжение, изгиб. Из (15), в частности, следует соотношение

$$(16) \quad N_{1\beta}^{(-2)} = N_{\beta 1}^{(-2)} + K_{\beta},$$

где

$$(17) \quad K_{\beta} = \langle -\sigma_{11}^{*(-2)} \delta_{\beta\alpha} + \sigma_{\beta 1}^{*(-2)} \delta_{\beta\alpha} - \sigma_{\beta\alpha}^{*(-2)} \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + \langle \sigma_{12}^{*(-2)} - \sigma_{13}^{*(-2)} \rangle \varphi(x_1).$$

С учетом (16) исключение $N_{1\beta}^{(-2)}$ из (4а)–(4в) производится следующим образом: дифференцируя (4б) и применяя (16), получаем

$$0 = (-M_{\beta 1,1x}^{(-3)} + N_{1\beta}^{(-2)})_{,1x} = (-M_{\beta 1,1x}^{(-3)} + N_{\beta 1}^{(-2)} + K_{\beta})_{,1x} = \\ = -M_{\beta 1,1x}^{(-3)} + N_{\beta 1,1x}^{(-2)} + K_{\beta,1x} = -M_{\beta 1,1x}^{(-3)} - \langle f_{\beta}^0 \rangle + K_{\beta,1x},$$

откуда имеем уравнение, заменяющее (4а) при $m = -2$ и (4б):

$$(18) \quad -M_{\beta 1,1x}^{(-3)} = \langle f_{\beta}^0 \rangle - K_{\beta,1x}.$$

Кручение. Определяющие уравнения для крутящего момента $\mathcal{M} = M_{23}^{(-2)} - M_{32}^{(-2)}$ указаны в (13). Что касается уравнений равновесия, то, используя (4б), получим

$$-\mathcal{M}_{,1x} + (N_{32}^{(-2)} - N_{23}^{(-2)}) = \langle f_2^0 y_3 \rangle - \langle f_3^0 y_2 \rangle.$$

При этом возникает та же, что и выше, ситуация, связанная с несимметричностью $N_{ij}^{(-2)}$. Согласно (16), имеем

$$(19) \quad N_{23}^{(-2)} - N_{32}^{(-2)} = K \equiv \langle \sigma_{31}^{*(-2)} \delta_{2\alpha} - \sigma_{21}^{*(-2)} \delta_{3\alpha} \rangle u_{\alpha,1x}^{(0)} + \langle \sigma_{22}^{*(-2)} + \sigma_{33}^{*(-2)} \rangle \varphi.$$

В итоге

$$(20) \quad -\mathcal{M}_{,1x} - K = \langle f_2^0 y_3 \rangle - \langle f_3^0 y_2 \rangle.$$

Полная система уравнений (предельная задача). Уравнения (4а) при $m = -2$, (18), (20) с краевыми условиями (вывод их см. в [6])

$$u_{\beta}^{(0)}(\pm a) = 0, \quad u_{\beta,1x}^{(0)}(\pm a) = 0, \quad V_1(\pm a) = 0, \quad \varphi(\pm a) = 0 \quad (\beta = 2,3)$$

представляют собой полную систему уравнений и краевых условий для определения функций $u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, V_1, \varphi$.

Цилиндрический стержень из однородного изотропного материала. Пусть $Q_{\varepsilon} = [-a, a] \times S_{\varepsilon}$ — цилиндр, а материал стержня однородный и изотропный. Начальные напряжения определяются из решения задачи теории упругости при заданных усилиях N_{11} . Ее решение есть $\sigma_{ij}^* = \varepsilon^{-2} N_{11} \delta_{i1} \delta_{j1}$ (это легко проверяется). Тогда (17) и (19) принимают вид $K_{\beta} = -N_{11} u_{\beta,1x}^{(0)}$ и $K = 0$ соответственно. В результате (18), (20) переходят в классические уравнения изгиба балки с начальными напряжениями [11].

Замечание по поводу формул для K_{β}, K . В выражения (17), (19) для K_{β}, K входят члены вида $\langle \sigma_{ij}^{*(-2)} \rangle$, которые можно подсчитать исходя из задачи теории упругости, описывающей предварительное напряжение стержня. Пусть начальные напряжения определяются из решения задачи теории упругости

$$(21) \quad \sigma_{ij,j}^* = \varepsilon^a f_i \text{ в } Q_{\varepsilon}, \\ \sigma_{ij}^* n_j = \varepsilon^b g_i \text{ на } S_{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij}^* n_j = h \text{ на } \Gamma_{\varepsilon}.$$

Асимптотическое разложение для начальных напряжений $\sigma_{ij}^* = \varepsilon^{-4} \sigma_{ij}^{*(-4)} +$

$+ \varepsilon^{-3} \sigma_{ij}^{*(-3)} + \varepsilon^{-2} \sigma_{ij}^{*(-2)} + \dots$ дает после подстановки в (21), в частности, следующие соотношения:

$$(22) \quad \sigma_{ij, jy}^{*(-2)} = F_i \text{ в } Q_1^e \quad (F_i = 0 \text{ при } a \neq -3, F_i = f_i \text{ при } a = -3), \\ \sigma_{ij}^{*(-2)} n_j = G_i \text{ на } \gamma_1^e \quad (G_i = 0 \text{ при } b \neq -2, G_i = g_i \text{ при } b = -2), \\ \sigma_{ij}^{*(-2)}(x_1, y) \text{ периодична по } y_1 \text{ с периодом } [0, m].$$

Умножим первое уравнение в (22) на y_α и проинтегрируем по ЯП P_1 с учетом остальных условий из (22). Получим

$$(23) \quad \langle \sigma_{i\alpha}^{*(-2)} \rangle = - \langle F_i y_\alpha \rangle - \langle G_i y_\alpha \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 2, 3.$$

Последнее выражение равно нулю при $a \neq -3, b \neq -2$. Из формулы (23) вытекает, что если начальные напряжения вызваны не массовыми или поверхностными силами указанной величины, то $\bar{K}_R = - \langle \sigma_{11}^{*(-2)} \rangle u_{\beta, 1x}^{(i)}, K = 0$, т. е. в данном случае асимптотические формулы совпадают с классическими [11]. При $a = -3$ или $b = -2$ в выражениях для K_β, K могут присутствовать ненулевые члены, содержащие $\langle \sigma_{\alpha\alpha}^{*(-2)} \rangle$ (связанные с поперечным обжатием стержня) или $\langle \sigma_{\alpha 1}^{*(-2)} \rangle$ (связанные с поперечными сдвиговыми деформациями).

Устойчивость балки при кручении. В случае чистого кручения (при отсутствии осевого растяжения, нормальных прогибов и при $f_2^0 = f_3^0 = 0$) уравнения кручения принимают вид

$$(24) \quad B_{00}^1 \varphi_{, 1x1x} + \langle \sigma_{22}^{*(-2)} + \sigma_{33}^{*(-2)} \rangle \varphi = 0$$

с краевыми условиями $\varphi(\pm a) = 0$. Полученная задача не совпадает с приводимой в [10, § 6.4] задачей о кручении предварительно напряженного стержня. В частности, при $a \neq -3, b \neq -2$ уравнение (24) принимает вид $B_{00}^1 \varphi_{, 1x1x} = 0$. Последнее означает, что потери устойчивости при кручении не происходит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures.— Amsterdam: North-Holland Publ., 1978.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.
3. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных сред.— М.: Изд-во МГУ, 1990.
4. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in the Appl. Sci.— 1984.— N 6.
5. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластинке // ДАН СССР.— 1987.— Т. 294, № 5.
6. Колпаков А. Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // ПММ.— 1991.— Т. 55, вып. 3.
7. Колпаков А. Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных сред // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 4.
8. Колпаков А. Г. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // II World Congress on Comput. Mechanics, Stuttgart, 1990: Extended abstrs of lect.
9. Колпаков А. Г. Dependence of velocity of elastic waves on initial stresses for laminated media // IV Intern. Conf. on Recent Advances in Structural Dynamic, Southampton, England, 1991.
10. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.— М.: Мир, 1987.
11. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер К. Пластинки и оболочки.— М.: Физматгиз, 1963.

г. Новосибирск

Поступила 18/IX 1991 г.,
в окончательном варианте — 5/XI 1991 г.