УДК 517.957

ОСРЕДНЕНИЕ ПРОЦЕССА ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В МНОГОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СРЕДАХ

И. А. Калиев, Г. С. Сабитова*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Проводится гомогенизация многомерной задачи Стефана в случае, когда среда является композитом, состоящим из двух различных веществ с ε-периодической структурой. Методами асимптотического анализа выводится осредненная задача. Доказывается, что ее решение является пределом решений ε-задач.

Значительная часть композитных материалов имеет периодическую структуру или структуру, близкую к ней, поэтому в настоящей работе исследуются процессы фазовых переходов в многомерных неоднородных средах с периодической структурой. Под средой с периодической структурой понимают среду, составленную из периодически повторяющегося элемента (ячейки). В данной работе рассматривается гомогенизация многомерной задачи Стефана для композитного материала. Другие подходы к решению этой проблемы предложены в [1].

На рис. 1 изображена одна из возможных структур. Темная область A_ε занята веществом A, светлая область B_ε — веществом B. Периодическая ячейка представляет собой куб $(0,\varepsilon)^k$ в $\mathbb{R}^k$ со стороной ε (k — размерность пространственных переменных). Граница раздела областей A_ε и B_ε предполагается гладкой функцией класса C^l ($l > 2$). Предполагается также, что движение отсутствует и плотности веществ A, B не меняются при изменении температуры. Каждое вещество A, B композитного материала под воздействием теплового поля может претерпевать фазовые превращения со своей температурой плавления в соответствии с уравнением состояния.

Фазовые переходы в каждом из веществ будем описывать задачей Стефана. Считаем, что в областях A_ε и B_ε температура $\theta_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет в смысле теории распределений уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_A(\theta_\varepsilon(x,t))}{\partial t} - \Delta\theta_\varepsilon(x,t) = f(x,t), \qquad x = (x_1,\dots,x_k) \in A_\varepsilon, \\ &\frac{\partial U_B(\theta_\varepsilon(x,t))}{\partial t} - \Delta\theta_\varepsilon(x,t) = f(x,t), \qquad x = (x_1,\dots,x_k) \in B_\varepsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x — пространственные переменные; t — время; индекс ε указывает на размер периодической ячейки.

Качественная зависимость удельных внутренних энергий U_A и U_B от температуры θ приведена на рис. 2 (сплошные линии). Функция $U_A(\theta)$ терпит разрыв первого рода при $\theta = \theta_A^*$, где θ_A^* — температура плавления вещества A; $U_A(\theta_A^* + 0) - U_A(\theta_A^* - 0) = L_A > 0$ — скрытая теплота плавления вещества A. Функция $U_B(\theta)$ терпит разрыв первого рода при $\theta = \theta_B^*$, где θ_B^* — температура плавления вещества B;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-01-00911).

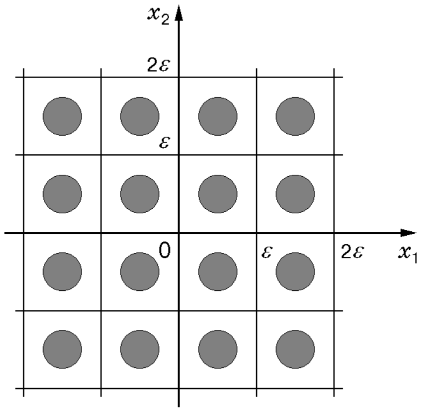

Рис. 1

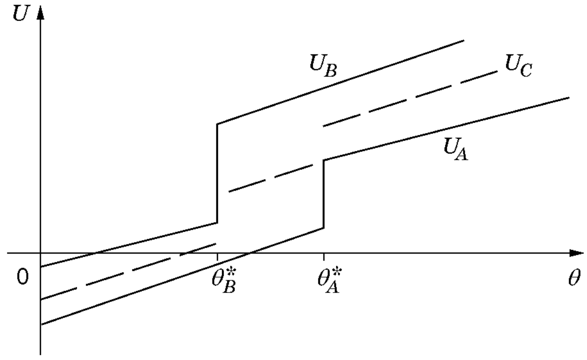

Рис. 2

$U_B(\theta_B^* + 0) - U_B(\theta_B^* - 0) = L_B > 0$ — скрытая теплота плавления вещества B. Вне точек разрыва $U_A(\theta)$ и $U_B(\theta)$ предполагаются гладкими возрастающими функциями:

$$U_A \in C^2[0, \theta_A^*], \quad U_A \in C^2[\theta_A^*, +\infty), \quad \frac{dU_A(\theta)}{d\theta} \geqslant c_0 \quad \text{при} \quad \theta \neq \theta_A^*,$$

$$U_B \in C^2[0, \theta_B^*], \quad U_B \in C^2[\theta_B^*, +\infty), \quad \frac{dU_B(\theta)}{d\theta} \geqslant c_0 \quad \text{при} \quad \theta \neq \theta_B^*,$$

где $c_0 = \text{const} > 0$. Обратную к $U_A(\theta)$ функцию обозначим через θ_A ($\theta = \theta_A(U_A)$), обратную к $U_B(\theta)$ функцию — через θ_B ($\theta = \theta_B(U_B)$). Заметим, что θ_A и θ_B являются однозначно определенными функциями.

На поверхности контакта веществ A и B выполняются условия непрерывности температуры и потока тепла

$$[\theta_\varepsilon] = 0, \qquad \left[\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial \boldsymbol{n}}\right] = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности контакта; квадратные скобки обозначают скачок функции при переходе через поверхность контакта.

Введем в рассмотрение функцию

$$u(x, \theta) = \begin{cases} U_A(\theta), & x \in A_\varepsilon, \\ U_B(\theta), & x \in B_\varepsilon. \end{cases}$$

Используя периодическую структуру среды, можно считать

$$u(x, \theta) = U(x/\varepsilon, \theta) = U(\xi, \theta),$$

где $\xi = x/\varepsilon$; $U(\xi, \theta)$ — 1-периодическая по ξ_i функция; $\xi_i = x_i/\varepsilon$, $i = 1, \ldots, k$. Здесь и далее термин T-периодичность означает периодичность с периодом T по указанным переменным.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — ограниченная область с гладкой границей S класса C^l $(l > 2)$. Соотношения (1), (2) в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ эквивалентны уравнению

$$\frac{\partial U(x/\varepsilon, \theta_\varepsilon(x, t))}{\partial t} - \Delta \theta_\varepsilon(x, t) = f(x, t), \qquad (x, t) \in \Omega_T, \tag{3}$$

которое удовлетворяется в смысле теории распределений. На границе S области Ω задается температура

$$\theta_\varepsilon(x, t) = \theta_S(x, t), \qquad (x, t) \in S_T = S \times (0, T), \tag{4}$$

а в начальный момент времени — функция $U_\varepsilon(x)$:

$$U\big|_{t=0} = U_\varepsilon(x), \qquad x \in \Omega. \tag{5}$$

По заданной функции $U_\varepsilon(x)$ можно однозначно найти начальную температуру

$$\theta_\varepsilon\Big|_{t=0} = \begin{cases} \theta_A(U_\varepsilon(x)), & x \in A_\varepsilon \cap \Omega, \\ \theta_B(U_\varepsilon(x)), & x \in B_\varepsilon \cap \Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Определение 1. Пара функций $\{\theta_\varepsilon(x,t), u_\varepsilon(x,t)\}$ называется обобщенным решением ε-задачи (3)–(5), если:

1) $\theta_\varepsilon \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$, $u_\varepsilon(x,t) \in U(x/\varepsilon, \theta_\varepsilon(x,t))$;

2) выполняется граничное условие (4);

3) для всех функций $\varphi(x,t)$ из $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям $\varphi\big|_{t=T} = 0$, $\varphi\big|_{S_T} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T} u_\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega_T} \nabla\theta_\varepsilon\nabla\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_T} f\varphi\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega} U_\varepsilon(x)\varphi(x,0)\,dx = 0.$$

Для удобства формулировки результата введем функцию $\theta_{\Gamma_\varepsilon}(x,t)$, определенную в $\bar\Omega \times [0,T]$, совпадающую с $\theta_S(x,t)$ из (4) при $(x,t) \in S_T$ и с $\theta_\varepsilon\big|_{t=0}$ из (6) при $t = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\theta_{\Gamma_\varepsilon}(x,0) \in L_\infty(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, $\theta_{\Gamma_\varepsilon} \in L_\infty(\Omega_T)$, $D_t\theta_{\Gamma_\varepsilon} \in W_2^{1,1}(\Omega_T)$, $f \in L_2(\Omega_T)$. *Тогда существует единственное ограниченное обобщенное решение задачи* (3)–(5)

$$\theta_\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_T) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\infty(\Omega_T), \qquad u_\varepsilon \in L_\infty(\Omega_T),$$

причем оценки на θ_ε *и* u_ε *в указанных классах являются равномерными по* ε.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству соответствующей теоремы для обобщенного решения задачи Стефана [2, с. 32–35]. Отметим также, что существование обобщенного решения задачи типа (3)–(5) доказано в [3].

Исследуем поведение решения $\theta_\varepsilon(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$. Следуя общей схеме [4], будем искать асимптотическое решение задачи (3)–(5) в виде

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon(x,t) = \theta_0(x,t,\xi) + \varepsilon\theta_1(x,t,\xi) + \varepsilon^2\theta_2(x,t,\xi) + \ldots, \\ U(\xi,\theta_\varepsilon(x,t)) = U(\xi,\theta_0(x,t,\xi)) + \varepsilon\,\frac{\partial U(\xi,\theta_0(x,t,\xi))}{\partial\theta}\,\theta_1(x,t,\xi) + \ldots, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\xi = x/\varepsilon$; $\theta_j(x,t,\xi)$ — 1-периодические по ξ функции. Подставляя (7) в (3), имеем

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\varepsilon^2}\,(\Delta_\xi\theta_0(x,t,\xi)) - \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x_i\,\partial\xi_i} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial\xi_i\,\partial x_i}\Big) + \Delta_\xi\theta_1(x,t,\xi)\Big) + \frac{\partial U(\xi,\theta_0(x,t,\xi))}{\partial t} - \\ - \Delta_x\theta_0(x,t,\xi) - \Delta_\xi\theta_2(x,t,\xi) - \sum_{i=1}^{k}\Big(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x_i\,\partial\xi_i} + \frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi_i\,\partial x_i}\Big) = f(x,t) + \varepsilon r(x,t,\xi). \end{gathered} \tag{8}$$

Приравнивая в (8) к нулю слагаемые порядка ε^{-2}, получим

$$\Delta_\xi\theta_0(x,t,\xi) = 0, \qquad \xi \in Q_1 = (0,1)^k, \tag{9}$$

где Q_1 — единичный куб в $\mathbb{R}^k$. Домножим (9) на $\theta_0(x,t,\xi)$ и проинтегрируем по ξ по кубу Q_1:

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{Q_1} \theta_0\Delta_\xi\theta_0\,d\xi_1\ldots d\xi_k &= \int\limits_{Q_1} (\operatorname{div}_\xi(\theta_0\nabla_\xi\theta_0) - |\nabla_\xi\theta_0|^2)\,d\xi_1\ldots d\xi_k = \\ &= \int\limits_{\partial Q_1} \theta_0(\nabla_\xi\theta_0\cdot\boldsymbol{n})\,ds - \int\limits_{Q_1} |\nabla_\xi\theta_0|^2\,d\xi_1\ldots d\xi_k. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в силу периодичности функции θ_0 по переменным ξ. Следовательно, $|\nabla_\xi \theta_0| = 0$. Отсюда

$$\theta_0 = \theta_0(x,t), \tag{10}$$

т. е. θ_0 не зависит от переменных ξ.

Приравнивая в (8) к нулю слагаемые порядка ε^{-1}, с учетом (10) получим $\Delta_\xi \theta_1(x,t,\xi) = 0$, $\xi \in Q_1$, где $\theta_1(x,t,\xi)$ — 1-периодическая по ξ функция. Так же как для уравнения (9), можно показать, что

$$\theta_1 = \theta_1(x,t), \tag{11}$$

т. е. функция θ_1 не зависит от переменных ξ.

Приравнивая в (8) к нулю слагаемые порядка ε^0, с учетом (10) и (11) получаем

$$\frac{\partial U(\xi, \theta_0(x,t))}{\partial t} - \Delta_x \theta_0(x,t) = \Delta_\xi \theta_2(x,t,\xi) + f(x,t). \tag{12}$$

Введем обозначение среднего по периоду:

$$\langle g(x_1,\dots,x_k,t,\xi_1,\dots,\xi_k)\rangle = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 g(x_1,\dots,x_k,t,\xi_1,\dots,\xi_k)\, d\xi_1 \dots d\xi_k.$$

Применим к обеим частям (12) оператор осреднения

$$\left\langle \frac{\partial U(\xi, \theta_0(x,t))}{\partial t} \right\rangle - \langle \Delta_x \theta_0(x,t)\rangle = \langle \Delta_\xi \theta_2(x,t,\xi)\rangle + f(x,t). \tag{13}$$

Так как функция θ_2 периодична по ξ, то

$$\langle \Delta_\xi \theta_2(x,t,\xi)\rangle = 0, \quad \langle \Delta_x \theta_0(x,t)\rangle = \Delta_x \theta_0(x,t), \quad \left\langle \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle U(\xi, \theta_0(x,t))\rangle.$$

В итоге получим уравнение для нахождения функции $\theta_0(x,t)$, которое естественно назвать осредненным:

$$\frac{\partial U_C(\theta_0(x,t))}{\partial t} - \Delta_x \theta_0(x,t) = f(x,t), \tag{14}$$

где $U_C(\theta_0(x,t)) \equiv \langle U(\xi, \theta_0(x,t))\rangle = v_A U_A(\theta_0(x,t)) + v_B U_B(\theta_0(x,t))$; v_A, $v_B = 1 - v_A$ — объемы, занятые веществами A и B соответственно в единичном кубе Q_1.

Качественная зависимость осредненной удельной внутренней энергии $U_C(\theta)$ приведена на рис. 2 (штриховая линия). Строго возрастающая функция $U_C(\theta)$ терпит разрывы первого рода при $\theta = \theta_B^*$ и $\theta = \theta_A^*$, при этом $U_C(\theta_B^* + 0) - U_C(\theta_B^* - 0) = v_B L_B > 0$, $U_C(\theta_A^* + 0) - U_C(\theta_A^* - 0) = v_A L_A > 0$. Вне точек разрыва $U_C(\theta)$ — гладкая функция. Обратную к $U_C(\theta)$ функцию обозначим через θ_C, т. е. $\theta = \theta_C(U_C)$. Функция θ_C является однозначно определенной.

Пусть функция $\theta_0(x,t)$ удовлетворяет в смысле теории распределений уравнению (14) и начально-краевым условиям

$$\theta_0(x,t) = \theta_S(x,t), \qquad (x,t) \in S \times (0,T); \tag{15}$$

$$U_C\big|_{t=0} = U_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{16}$$

где $U_0(x)$ — $*$-слабый предел функций $U_\varepsilon(x)$ в $L_\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. По функции $U_0(x)$ можно однозначно найти начальную температуру

$$\theta_0\big|_{t=0} = \theta_C(U_0(x)), \qquad x \in \Omega. \tag{17}$$

Определение 2. Пара функций $\{\theta_0(x,t), u_0(x,t)\}$ называется обобщенным решением задачи (14)–(16), если:

1) $\theta_0 \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$, $u_0(x,t) \in U_C(\theta_0(x,t))$;

2) выполняется граничное условие (15);

3) для всех функций $\varphi(x,t)$ из $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям $\varphi\big|_{t=T} = 0$, $\varphi\big|_{S_T} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega_T} \Big(u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla\theta_0 \nabla\varphi + f\varphi\Big) dx\, dt + \int\limits_{\Omega} U_0(x)\varphi(x,0)\, dx = 0.$$

Для удобства формулировки результата введем функцию $\theta_{\Gamma_0}(x,t)$, определенную в $\bar\Omega \times [0,T]$, совпадающую с $\theta_S(x,t)$ из (15) при $(x,t) \in S_T$ и с $\theta_0\big|_{t=0}$ из (17) при $t=0$.

Теорема 2. *Пусть $\theta_{\Gamma_0}(x,0) \in L_\infty(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$, $\theta_{\Gamma_0} \in L_\infty(\Omega_T)$, $D_t\theta_{\Gamma_0} \in W_2^{1,1}(\Omega_T)$, $f \in L_2(\Omega_T)$. Тогда существует единственное ограниченное обобщенное решение задачи* (14)–(16)

$$\theta_0 \in W_2^{1,1}(\Omega_T) \cap L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_\infty(\Omega_T), \qquad u_0 \in L_\infty(\Omega_T).$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству соответствующей теоремы для обобщенного решения задачи Стефана [2, с. 32–35].

Теорема 3. *Пусть $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ — решение ε-задачи* (3)–(5). *Тогда существует последовательность* (*обозначаемая тем же индексом ε*) $\{\theta_\varepsilon, u_\varepsilon\}$, *которая при $\varepsilon \to 0$ сходится к решению $\{\theta_0, u_0\}$ осредненной задачи* (14)–(16) *в следующем смысле*: $\theta_\varepsilon \to \theta_0$ *слабо в $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, сильно в $L_2(\Omega_T)$ и почти всюду в Ω_T; $u_\varepsilon \to u_0$ $*$-слабо в $L_\infty(\Omega_T)$.*

При доказательстве теоремы 3 будет использоваться следующая лемма, формулировка и доказательство которой приведены, например, в [5].

Лемма. *Пусть D — гиперкуб в $\mathbb{R}^k$ и функция $g(x) \in L_p(D)$, $p \geqslant 1$ продолжена периодически* (*по каждой переменной*) *из D в $\mathbb{R}^k$. Тогда функции $g(x/\varepsilon)$ слабо сходятся к*

$$\langle g\rangle \equiv \frac{1}{\operatorname{meas} D} \int\limits_D g(x)\, dx \quad \text{в} \quad L_p(D) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Если $p = +\infty$, то $g(x/\varepsilon)$ $*$-слабо сходятся к $\langle g\rangle$ в $L_\infty(D)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство теоремы 3. Из результатов теоремы 1 следует, что существует такая последовательность $\{\theta_\varepsilon\}$, которая при $\varepsilon \to 0$ сходится к некоторой функции θ_0 слабо в $W_2^{1,1}(\Omega_T)$, сильно в $L_2(\Omega_T)$ и почти всюду в Ω_T.

Рассмотрим первый интеграл в левой части интегрального тождества 3 из определения 1:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_\varepsilon \varphi_t\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega\cap A_\varepsilon} U_A(\theta_\varepsilon(x,t))\varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon} U_B(\theta_\varepsilon(x,t))\varphi_t\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{A_\varepsilon}\{U_A(\theta_\varepsilon(x,t)) - U_A(\theta_0(x,t))\}\varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{A_\varepsilon} U_A(\theta_0(x,t))\varphi_t\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{B_\varepsilon}\{U_B(\theta_\varepsilon(x,t)) - U_B(\theta_0(x,t))\}\varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{B_\varepsilon} U_B(\theta_0(x,t))\varphi_t\, dx\, dt. \qquad (18)$$

Здесь $\chi_{A_\varepsilon}(x)$, $\chi_{B_\varepsilon}(x)$ — характеристические функции множеств A_ε и B_ε, причем $\chi_{A_\varepsilon}(x) = \chi_{A_1}(x/\varepsilon)$, $\chi_{B_\varepsilon}(x) = \chi_{B_1}(x/\varepsilon)$. Поскольку $\theta_\varepsilon(x,t) \to \theta_0(x,t)$ почти всюду в Ω_T, первый и третий интегралы в правой части (18) сходятся к нулю (по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Функции $U_A(\theta_0(x,t))\varphi_t(x,t)$ и $U_B(\theta_0(x,t))\varphi_t(x,t)$ во втором и четвертом интегралах не зависят от ε, и их можно рассматривать как пробные функции из $L_1(\Omega_T)$ ($\varphi_t \in L_1(\Omega_T)$, а $U_A(\theta_0)$ и $U_B(\theta_0)$ ограничены в $L_\infty(\Omega_T)$ в силу ограниченности θ_0 в $L_\infty(\Omega_T)$). Тогда по лемме χ_{A_ε} $*$-слабо сходятся к v_A в $L_\infty(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$, χ_{B_ε} $*$-слабо сходятся к $v_B = 1 - v_A$ в $L_\infty(\Omega)$, а это означает, что второй и четвертый интегралы в правой части (18) при $\varepsilon \to 0$ сходятся к $v_A \int\limits_{\Omega_T} U_A(\theta_0(x,t))\varphi_t(x,t)\,dx\,dt$ и $v_B \int\limits_{\Omega_T} U_B(\theta_0(x,t))\varphi_t(x,t)\,dx\,dt$. Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_T} u_\varepsilon \varphi_t\,dx\,dt \to \int\limits_{\Omega_T} u_0 \varphi_t\,dx\,dt \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

где $u_0(x,t) = v_A U_A(\theta_0(x,t)) + v_B U_B(\theta_0(x,t))$.

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в интегральном тождестве 3 из определения 1 приводит к интегральному тождеству 3 из определения 2. В силу единственности решения осредненной задачи теорема доказана.

Из теоремы следует, что характеристики осредненной задачи зависят от отношения объемов v_A и v_B веществ A и B, но не зависят от их взаимного геометрического расположения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Damlamian A.** How to gomogenize a nonlinear diffusion equation: Stefan's problem // SIAM J. Math. Anal. 1981. V. 12, N 3. P. 306–313.
2. **Мейрманов А. М.** Задача Стефана. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986.
3. **Roubicek T.** The Stefan problem in heterogeneous media // Ann. Inst. Henri Poincare. 1989. V. 6, N 6. P. 481–501.
4. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. **Dacorogna B.** Weak continuity and weak lower semicontinuity of nonlinear functionals. N. Y.: Springer-Verlag, 1982. (Lect. Notes in Math.; N 922).

Поступила в редакцию 23/V 2000 г.