

УДК 532.546

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА

В. И. Пеньковский, Н. К. Корсакова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mails: penkov@hydro.nsc.ru, kors@hydro.nsc.ru

Предложена математическая модель гидравлического разрыва, основанная на представлении растрескавшейся части пласта, примыкающей к скважине, как гетерогенной трещиновато-пористой среды. При этом используются предположения, применяемые в теории упругого режима фильтрации. Получены формулы для определения размера зоны гидравлического разрыва и степени раскрытия трещин в условиях относительного равновесия.

**Ключевые слова:** гидравлический разрыв, трещиновато-пористая среда, квазистационарное приближение, совместность деформаций.

DOI: 10.15372/PMTF20150512

**Введение.** Построение математической модели, адекватной реальному процессу гидравлического разрыва пласта (ГРП), представляет собой сложную проблему, что, в частности, можно объяснить отсутствием достоверных экспериментальных данных, которые могут быть использованы при построении математической модели. Результаты экспериментов, в которых воспроизводится механический разрыв однородных не пористых и не насыщенных флюидом пластин (см., например, [1]), недостаточно точно описывают процесс гидравлического разрыва реального пласта.

В то же время имеющиеся данные натуральных экспериментов весьма немногочисленны и, главным образом, фиксируют последствия ГРП, а не устанавливают влияющие на него основные факторы. Применение ГРП позволяет увеличить, по крайней мере на начальном этапе, приток углеводородов к скважинам, подвергавшимся воздействию гидравлического разрыва.

По-видимому, первыми попытками построения математической модели ГРП являются работы [2, 3]. Ю. П. Желтов создал методику инженерного расчета ГРП. В качестве исходных данных принимались характеристики скважины, пласта и жидкости разрыва (воды с песком), скорость закачки. Определялись длина, величина раскрытия и проницаемость одиночной трещины ГРП, устьевое давление на скважине, продолжительность процесса разрыва.

В подходе Перкинса — Керна [3] решение задачи о ГРП одиночной трещиной сводится к решению нелинейного интегродифференциального уравнения, которое позволяет определить длину и величину раскрытия трещины. Обзор других математических моде-

лей приведен в [4]. В работах [5–8] предложены модификации подходов к исследованию процесса скважинного ГРП при наличии одной трещины. Предсказать ориентацию такой трещины в пласте практически невозможно. Случаи образования системы трещин не рассматривались.

Ниже предлагается математическая модель ГРП, основанная на иных представлениях. Предполагается, что при ГРП вокруг скважины образуется гетерогенная трещиновато-пористая среда с некоторой плотностью распределения числа трещин. Появление трещин происходит в том случае, если объемные напряжения, растягивающие скелет породы, достигают предельного значения. При этом величина раскрытия трещин на несколько порядков больше среднего радиуса пор. Увеличение суммарного объема трещин приводит к уменьшению пористости блоков в соответствии с условием совместности деформации поровых объемов. Проницаемость системы трещин значительно больше проницаемости образующихся при этом блоков.

**1. Элементы теории объемного упругого растяжения (сжатия) среды и упругого режима фильтрации.** Выражение для свободной упругой энергии при всестороннем растяжении (сжатии) упругого материала имеет вид

$$F = \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii} \right)^2 + \frac{K}{2} u_{ii}^2,$$

где  $K = \lambda + 2\mu/3$  — модуль объемного растяжения;  $u_{ik}$  — относительные деформации;  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Ламе;  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Напряжения  $\sigma_{ik}$  определяются формулой  $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ , где  $p$  — давление. В соответствии с законом Гука  $\sigma_{ik} = K u_{ii} \delta_{ik}$  и соотношением для первого инварианта тензора деформаций  $u_{11} + u_{22} + u_{33} = \Delta V/V = \Delta p/K$  можно записать дифференциальное уравнение для изменения объема при указанной выше деформации среды:

$$\beta = \frac{1}{K} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dp}.$$

Здесь  $V$  — выделенный объем среды;  $\beta = 3(1-2\nu)/E$  — коэффициент сжимаемости (упругоемкости) среды;  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Интегрируя данное уравнение с учетом условий равновесия скелета пористой среды с флюидом, заполняющим поровое пространство, получаем

$$V = V_0 e^{\beta(p-p_0)}.$$

Здесь индекс 0 соответствует состоянию равновесия. Для объема порового пространства в единице физического объема (пористости  $m$ ) эта формула принимает вид

$$m(p) = m_0 e^{\beta_s(p-p_0)}. \quad (1.1)$$

Пористость невозмущенной части пласта  $m_0 \approx 0,2$ , общий коэффициент упругости  $\beta = m\beta_f + \beta_s \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$  учитывает упругость флюида  $\beta_f \approx 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$  для нефти и  $\beta_f \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$  для воды, а также упругость скелета породы  $\beta_s \approx 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$  [9, 10]. Из формулы (1.1) следует, что при репрессии (бурении скважины, осуществлении ГРП)  $p > p_0$  и пористость пласта возрастает:  $m(p) > m_0$ , при депрессии (создании притока флюида к скважине)  $p < p_0$  и пористость убывает:  $m(p) < m_0$ . Режимы репрессии и депрессии могут характеризоваться разными значениями коэффициентов упругости  $\beta_+$  и  $\beta_-$ , вычисляемыми по модулям Юнга и коэффициентам Пуассона для циклов растяжения и сжатия соответственно.

Изменение пористости влияет на величину проницаемости пласта. Из известных формул Козени или Козени — Кармана следует, что зависимость проницаемости пористого материала от его пористости с точностью до величин более высокого порядка может быть

выражена в виде  $k(m) \approx A_c m^3$ , где коэффициент  $A_c$  обратно пропорционален квадрату удельной площади поверхности порового пространства, величине извилистости поровых каналов и зависит от среднего размера частиц, составляющих скелет среды. В равновесном состоянии  $k_0 = k(m_0) = A_c m_0^3$ . Проницаемость пласта будет возрастать при увеличении давления (репрессии) или убывать при уменьшении давления (депрессии) в соответствии с формулой Козени по закону

$$k_{\pm} = k_0 e^{3\beta_{\pm}(p-p_0)},$$

где  $\beta_+$  — коэффициент упругого растяжения скелета;  $\beta_-$  — коэффициент сжатия. Используя уравнение движения флюида в поровом пространстве среды в виде закона Дарси совместно с законом сохранения массы, получаем уравнение пьезопроводности, описывающее упругий режим фильтрации. Режимам репрессии и депрессии соответствуют разные значения коэффициента пьезопроводности. Задача о смене режимов фильтрации, в случае когда коэффициент пьезопроводности изменяется при смене знака производной от давления по времени, рассмотрена в работе [11]. Там же отмечено, что “при упругопластическом режиме фильтрации деформация породы в каждом элементарном объеме происходит почти мгновенно, то есть текучести породы не наблюдается”.

**2. Фильтрация в гетерогенной среде.** Гетерогенная среда представляет собой два (или более) вложенных друг в друга континуума. Примерами таких сред могут служить структурированные почвы, состоящие из различных по размерам конгломератов с различным распределением пор по размерам, трещиновато-пористые пласты, пористые среды с транзитными и тупиковыми порами. Физико-химические процессы, происходящие в гетерогенных средах, зависят от характера распределения размеров пор в континуумах. Обычно моды распределений размеров пор во вложенных средах различаются по крайней мере на порядок. Поэтому в каждой из вложенных сред пористость как момент второго порядка от функции распределения размеров пор и проницаемость как момент четвертого порядка существенно различаются.

Количество параметров, характеризующих гетерогенную среду, больше числа параметров, определяющих однородную сплошную среду. Важнейшим среди них является параметр, определяющий обмен теплом, массой флюида или растворенного в нем вещества между двумя континуумами. Интенсивность обмена зависит от соотношения характерных геометрических параметров вложенных сред: размера блоков и величины раскрытия трещин, например в случае трещиновато-пористой среды, а также от характера процесса и свойств подвижного флюида.

Рассмотрим движение однородной жидкости, происходящее в континуумах 1, 2 [12] и удовлетворяющее закону Дарси

$$v_i = -\frac{k_i}{\mu} \text{grad } p_i, \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

( $v_i$ ,  $p_i$ ,  $k_i$ ,  $\mu$  — скорость, давление, проницаемость сред и вязкость флюида) и закону сохранения массы

$$\frac{\partial (m_i \rho)}{\partial t} + \text{div} (\rho v_i) + q_i = 0 \quad (2.2)$$

( $m_i$ ,  $\rho$ ,  $t$ ,  $q_i$  — пористость, плотность жидкости, время и плотность источников или стоков, действующих в каждой из сред).

Если в среде 1 или 2 отсутствуют иные внешние источники или стоки, то должно выполняться условие обмена объемом перетекающей жидкости

$$q_2 = -q_1 = q.$$

Следует отметить, что система уравнений (2.1), (2.2) применима также для описания процессов теплопередачи и конвективной диффузии растворенного вещества.

Модель процесса теплопроводности в гетерогенной среде предложена Л. И. Рубинштейном [12]. Подобная модель рассмотрена в работе [13] при построении уравнений движения однородной жидкости в среде с двойной пористостью (один из вариантов гетерогенной среды). Основанная на законах (2.1), (2.2) система уравнений имеет вид

$$\frac{k_i}{\mu} \Delta p_i = \beta_i \frac{\partial p_i}{\partial t} + q_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

где  $\beta_i = dm_i/dp_i$  — коэффициенты сжимаемости порового пространства вложенных сред. Если в порах содержится сжимаемая жидкость, то в коэффициенты добавляется дополнительное слагаемое, а уравнения (2.3) становятся нелинейными.

Уравнения системы (2.3) связаны условием  $q_1 = -q_2 = -q$ , определяемым на основе анализа размерностей по формуле [12, 13]

$$q = \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2),$$

где  $\alpha$  — параметр, характеризующий внутривидовый обмен в гетерогенной среде. Аналогичная формула обмена применялась в работе [14] при описании процесса несмешивающейся фильтрации, сопровождающейся процессами диффузии, переноса солей и тепла. Систему (2.3) запишем в развернутом виде

$$\frac{k_1}{\mu} \Delta p_1 = \beta_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2), \quad \frac{k_2}{\mu} \Delta p_2 = \beta_2 \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\alpha}{\mu} (p_1 - p_2). \quad (2.4)$$

Если проницаемости вложенных сред 1 и 2 существенно различаются, например в случае фильтрации в трещиновато-пористой среде, то систему (2.4) можно упростить [13].

Рассмотрим модель пористых сред в виде связки проточных каналов [15]. Представим плотность распределения пор по размерам в средах 1 и 2 в виде трехпараметрической функции

$$\varphi_i(r) = n_i \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2} \ln^2 \frac{r}{r_{i0}}\right).$$

Тогда математическое ожидание количества пор в единичном сечении каждой из сред является нулевым моментом плотности распределения

$$N_i = \int_0^{\infty} \varphi_i(r) dr = \sqrt{2\pi} n_i r_{i0} \sigma_i e^{\sigma_i^2/2}.$$

Площадь всех пор (пористость) выражается моментом второго порядка

$$m_i = \pi \int_0^{\infty} r^2 \varphi_i(r) dr = \pi N_i r_{i0}^2 e^{4\sigma_i^2}.$$

Сопоставляя формулу Пуазейля и закон Дарси (2.1), для проницаемости сред получаем выражение

$$k_i = \pi N_i r_{i0}^4 e^{12\sigma_i^2} / 8,$$

представляющее собой момент четвертого порядка. Из полученных зависимостей находим связь между дисперсией  $\sigma_i$ , проницаемостью, пористостью и модой  $r_{i0}$  функции распределения:

$$\sigma_i = \frac{1}{8} \sqrt{\ln \frac{8k_i}{m_i r_{i0}^2}}.$$

Приведенные выше формулы можно использовать для оценки параметров, входящих в систему уравнений (2.4), что позволяет адаптировать математическую модель к физическому процессу, происходящему в конкретной гетерогенной среде.

Пусть среда 1 представляет собой разреженную систему достаточно крупных трещин, а среда 2 — мелкопористые блоки. Объем трещин меньше объема блоков, а их проницаемость больше проницаемости блоков, т. е.  $k_2 \ll k_1$ ,  $\beta_1 \ll \beta_2$ . Сравнивая перетоки, устанавливаем, что в системе (2.4) первым слагаемым в правой части первого уравнения и слагаемым в левой части второго уравнения можно пренебречь. В результате из первого уравнения системы (2.4) можно выразить давление в среде 2 (индекс 1 опущен):

$$p_2 = p - \eta \Delta p, \quad (2.5)$$

а для давления  $p$  в среде 1 получаем уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} \Delta p = \Delta p, \quad (2.6)$$

где  $\tau = tk_1/(\mu\beta_2)$ ;  $\eta = k_1/\alpha$ .

Таким образом, система (2.4) распадается на два уравнения (2.5) и (2.6), которые можно решать последовательно. Если параметр обмена  $\eta$  устремить к нулю, то система (2.4) вырождается в одно уравнение, описывающее упругий режим фильтрации жидкости в однородной гомогенной среде.

В работе [13] отмечено, что введение в закон Дарси (2.1) дополнительного члена релаксации в виде

$$v = -\frac{k}{\mu} \nabla p - \eta\beta \frac{\partial}{\partial t} \nabla p$$

с учетом закона сохранения массы также приводит к уравнению (2.6).

**3. Упругофильтрационная модель ГРП.** Как отмечено выше, гидравлический разрыв пласта происходит в случае, когда величина репрессии  $p - p_0$  достигает критического значения  $p_* - p_0$ , при котором растяжение скелета и увеличение пористости, определяемое формулой (1.1), приводят к разрушению скелета с образованием трещин внутри пласта. Если во флюиде, находящемся внутри скважины, создать давление  $p_w > p_*$ , то в кольцевой области  $r_* \geq r \geq r_w$  может образоваться система трещин и однородная среда станет гетерогенной. В процессе осуществления ГРП область растрескивания может расширяться с течением времени  $t$ . На внешней границе  $r = r_*(t)$  этой области давление жидкости  $p(r_*) = p_*$  можно считать постоянным. Таким образом, в процессе гидравлического разрыва образуются три континуума, в которых движется жидкость: вложенные друг в друга континуум 1 (системы трещин) и континуум 2 (системы блоков, состоящие из несколько измененной исходной породы), а также континуум 3 (часть не подвергшегося растрескиванию пласта) (рис. 1). Даже при значительной репрессии на пласт (порядка нескольких десятков мегапаскалей) значение показателя при экспоненте в формулах для пористости и проницаемости  $\beta_+(p - p_0)$  будет малым по сравнению с единицей, и поэтому в разложениях экспонент можно ограничиться двумя членами. При этом изменения пористости  $m_2$ ,  $m_3$  в областях 2, 3 будут малы по сравнению с их начальным значением  $m_0$ . Более существенно изменяются значения проницаемости  $k_2$ ,  $k_3$ . Начальная проницаемость в равновесном состоянии пласта  $k_0$  обычно составляет порядка 100 мД (миллидарси), т. е.  $k_0 \approx 10^{-13} \text{ м}^2$ .

Пористость  $m_1$  и проницаемость  $k_1$  системы трещин (континуум 1) определяются величиной их раскрытия  $h$  и плотностью распределения трещин в пространстве. Известно, что средняя объемная скорость  $v_{11}$  движения вязкой жидкости в щелевом пространстве между двумя пластинами, расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга, определяется

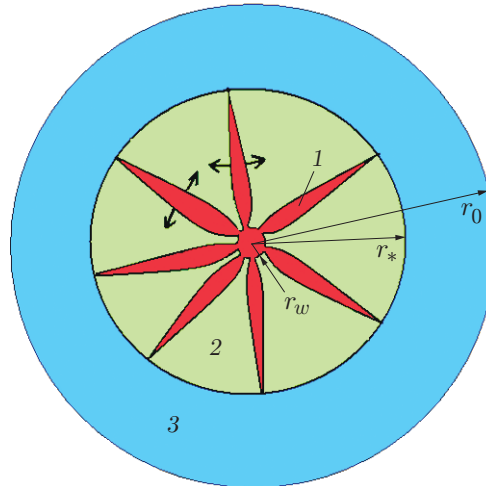


Рис. 1. Схема образования трещин при ГРП:  
1 — трещины, 2 — блоки, 3 — неизменная часть пласта

формулой  $v_{11} = -(h^2/(12\mu)) \partial p_1/\partial x$ . С учетом закона Дарси можно показать, что проницаемость щели для потока жидкости оценивается величиной  $k_{11} = h^2/12$ . При средних величинах раскрытия трещин в процессе разрыва пласта проницаемость  $k_1$  континуума 1 с конечным числом трещин на порядки больше проницаемости  $k_2$  блоков (континуума 2 гетерогенной среды). Таким образом, применение модели гетерогенной трещиновато-пористой среды для описания процесса ГРП можно считать правомерным.

В результате интегрирования уравнения, описывающего деформацию объема трещин, для пористости континуума 1 получаем формулу

$$m_1(p) = A(e^{\beta(p-p_*)} - 1), \quad (3.1)$$

удовлетворяющую условию появления трещин  $m_1(p_*) = 0$ . Коэффициент  $A$  представляет собой объемную долю щелей в единице объема физического пространства и подлежит определению. Очевидно, величина  $A$  должна быть пропорциональна величине раскрытия трещин и их числу  $N$ . В соответствии с условием совместности деформаций изменение пористости блоков в области  $r \in (r_w, r_*)$  с начального значения  $m_* = m_2(p_*) = m_3(p_*) = m_0 e^{\beta(p_*-p_0)}$  до текущего значения равно изменению пористости трещин с противоположным знаком:  $dm_2 = -dm_1$ . Образование трещин приводит к перераспределению нагрузки на скелет породы. Различие между давлением в трещинах и давлением в блоках уменьшается, вследствие чего значение пористости блоков  $m_*$  не меняется. При этом

$$\begin{aligned} m_2 = m_* e^{\beta(p_2-p_*)} - m_1 = m_0 e^{\beta(p_*-p_0)} e^{\beta(p_2-p_*)} - m_1 = \\ = m_0 e^{\beta(p_2-p_0)} - A(e^{\beta(p-p_*)} - 1) = m_*. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Раскладывая в (3.1) экспоненту в ряд и ограничиваясь членами первого порядка малости, получаем выражение  $m_1 \approx A\beta(p - p_*)$ . В то же время согласно определению пористости на любом расстоянии  $r$  от оси скважины  $m_1 = 2Nh/(2\pi r)$ . Из полученных соотношений находим объемную долю щелей

$$A = F/(\pi r \beta(p - p_*))$$

( $F = Nh$  — степень растрескивания породы).

Проводя разложения в (3.2) с точностью до малых членов второго порядка, для степени растрескивания получаем формулу

$$F = \pi r \beta(p - p_*) m_0 \beta(p_2 - p_*). \quad (3.3)$$

Вблизи скважины давление в трещинах и блоках равно  $p = p_2$ . Из формулы (3.3) для степени растрескивания пласта  $F_w$  вблизи скважины получаем выражение

$$F_w = \pi r_w \beta (p_w - p_*) m_0 \beta (p_w - p_*) \quad (3.4)$$

Полагая число трещин неизменным, из формул (3.3), (3.4) находим формулу для расчета отношения величин раскрытия трещин

$$\frac{F}{F_w} = \frac{h}{h_w} = \frac{r}{r_w} \frac{(p - p_*)(p_2 - p_*)}{(p_w - p_*)^2} \quad (3.5)$$

**4. Постановка задачи о ГРП.** Из приведенных выше выражений для параметров, управляющих ГРП, следует, что с достаточной для инженерной практики точностью во внешней области  $r > r_*$  можно положить  $m_3 \approx m_0$ ,  $k_3 \approx k_0$ . В области гидравлического разрыва  $r \in (r_w, r_*)$  имеем  $m_2 = m_0 - m_1$ ,  $m_1 = Nh/(\pi r)$ . Из условия неразрывности потоков флюида следует балансовое соотношение для общего радиального потока  $v_0$  флюида через произвольную окружность в гетерогенной среде

$$v_0 = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2, \quad \lambda = m_1 / (m_1 + m_2) \approx m_1 / m_0 \quad (4.1)$$

Запишем основные уравнения фильтрации в гетерогенной среде. Вновь используя нижние индексы для обозначения искомых величин в уравнениях (2.5), (2.6), для области  $r \in (r_w, r_*)$  получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta p_1) = \Delta p_1, \quad p_2 = p_1 - \eta \Delta p_1, \quad (4.2)$$

где  $\tau = th^2/(12\mu\beta_2)$ ;  $\eta = h^2/(12\alpha)$ ;  $\alpha$  — параметр обмена флюидом между континуумами гетерогенной среды;  $\beta_2$  — коэффициент общей (скелет и флюид) объемной упругости блоков континуума 2. Во внешней области  $r > r_*(t)$  давление  $p_3$  удовлетворяет стандартному уравнению пьезопроводности

$$\frac{\partial p_3}{\partial t} = \varkappa \Delta p_3, \quad (4.3)$$

где  $\varkappa = k_0/(\mu\beta_3)$  — коэффициент. Решение уравнений (4.2), (4.3) должно удовлетворять краевым условиям

$$p_1(r_w) = p_2(r_w) = p_w, \quad p_2(r_*) = p_3(r_*) = p_*, \quad r \rightarrow \infty, \quad p_3 \rightarrow p_0, \quad (4.4)$$

начальным условиям

$$t = 0, \quad p_3 = p_0, \quad r_* = r_w \quad (4.5)$$

и условию неразрывности фильтрационного потока на границе пласт — гетерогенная среда

$$r = r_*(t), \quad v_3 = v_0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим стационарное движение в системе континуумов при наличии в пласте некоторого контура питания  $r = r_0$ . Последнее из граничных условий (4.4) заменим условием  $p_3(r_0) = p_0$ . В этом случае  $p_1 = p_2 = p$  и

$$\Delta p_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_1(h) \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \Delta p_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_0 \frac{\partial p_2}{\partial r} \right) = 0,$$

откуда получаем

$$r v_1 = C_1 = \frac{(p_* - p_w) k_1(h)}{\ln(r_*/r_w)}, \quad r v_2 = C_2 = \frac{(p_* - p_w) k_0}{\ln(r_*/r_w)}.$$

Из (4.1) и условия непрерывности потока при  $r = r_*$  следует соотношение

$$\frac{k_0(p_* - p_0)}{\ln(r_0/r_*)} = \frac{p_w - p_*}{\ln(r_*/r_w)} (\lambda k_1(h) + (1 - \lambda)k_0). \quad (4.7)$$

В частности, на границе зоны растрескивания  $\lambda = 0$  и для определения размера этой зоны  $r = r_*$  (длины трещин) из выражения (4.7) после преобразований получаем формулу

$$r_* = r_0^{\frac{p_w - p_*}{p_w - p_0}} r_w^{\frac{p_* - p_0}{p_w - p_0}},$$

удобную для инженерных приложений. Если ввести обозначение  $\gamma = (p_w - p_*)/(p_w - p_0)$ , то эта формула принимает вид

$$r_* = r_w (r_0/r_w)^\gamma. \quad (4.8)$$

Пусть  $p_w = 50$  МПа,  $p_* = 35$  МПа,  $p_0 = 25$  МПа,  $r_0 = 300$  м,  $r_w = 0,125$  м. Подставляя эти значения в (4.8), находим  $r_* = 13,32$  м.

Распределение давления в зоне растрескивания, удовлетворяющее условиям  $p(r_w) = p_w$ ,  $p(r_*) = p_*$ , имеет вид

$$p = p_w - \frac{p_w - p_*}{\ln(r_*/r_w)} \ln(r/r_w).$$

Подставляя выражение для давления в формулу (3.5), после ряда преобразований для величины раскрытия трещины получаем зависимость

$$\frac{h}{h_w} = \frac{r}{r_w} \left( 1 - \frac{\ln(r/r_w)}{\ln(r_*/r_w)} \right)^2.$$

Функция  $h(r)$  не является монотонной и достигает локального максимума

$$h = h_m = h_w \frac{4r_*/r_w}{e^2 \ln^2(r_*/r_w)}$$

в точке  $r = r_m = r_* e^{-2}$ .

Функции  $h(r)$  при различных значениях  $r_0$  представлены на рис. 2. Исходные параметры приведены выше.

Для инженерных расчетов можно использовать известный метод последовательной смены стационарных состояний [16]. В этом методе величина  $r_0$  зависит от времени и определяет радиус влияния скважины в пласте с заданным общим коэффициентом упругости  $\beta$ .

Стационарное распределение давления в области  $r_* < r < r_0$  имеет вид

$$p_3 = \frac{p_* - p_0}{\ln(r_*/r_0)} \ln \frac{r}{r_0} + p_0. \quad (4.9)$$

Функция (4.9) удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и условиям сопряжения фильтрационного потока (4.6). Умножим обе части уравнения (4.3) на множитель  $r dr$  и проинтегрируем его в пределах от  $r = r_*$  до  $r = r_0$ . С учетом формулы дифференцирования интеграла с переменными пределами, условия равенства нулю фильтрационного потока на границе возмущения, а также зависимостей (4.8), (4.9) после ряда



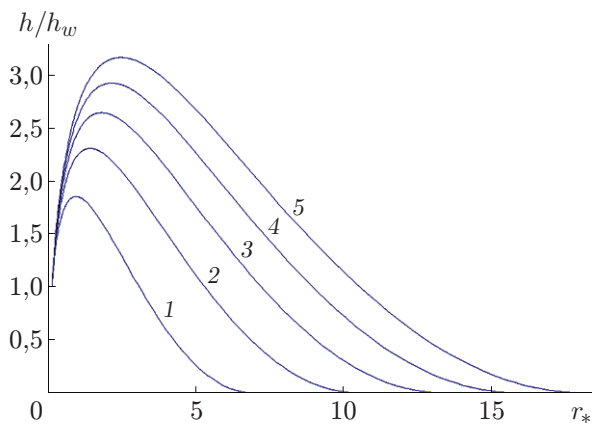


Рис. 2

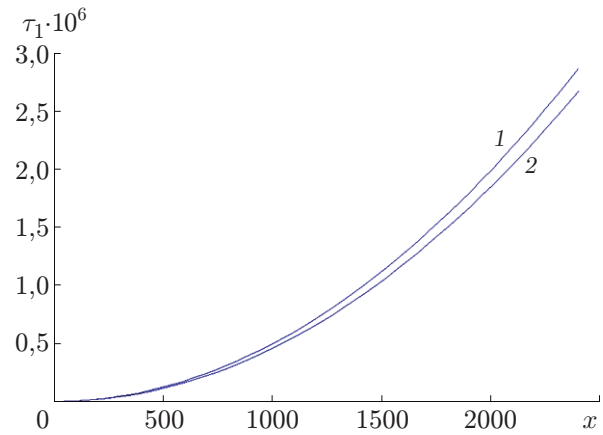


Рис. 3

Рис. 2. Зависимость величины раскрытия трещин от величины  $r_*$ :

1 —  $r_0 = 100$  м, 2 —  $r_0 = 200$  м, 3 —  $r_0 = 300$  м, 4 —  $r_0 = 400$  м, 5 —  $r_0 = 500$  м

Рис. 3. Зависимость радиуса влияния  $x$  скважины от времени процесса ГРП  $\tau_1$ :

1 — функция, заданная формулой (4.11), 2 — функция, заданная формулой (4.11) без учета второго слагаемого

преобразований получаем дифференциальное уравнение для определения радиуса влияния  $r_0$

$$1 = \ln x \frac{dW(x)}{d\tau_1}, \tag{4.10}$$

где  $x = r_0(\tau_1)/r_w$ ;  $\tau_1 = 2\kappa(\lambda_* - 1)t/((1 - \gamma)r_w^2)$ ; функция  $W(x)$  имеет вид

$$W(x) = \left(1 - \frac{0,5(\lambda_* - 1)}{(\gamma - 1) \ln x}\right) x^2(1 - x^{2(\gamma-1)}) + x^{2\gamma} - x^2, \quad \lambda_* = \frac{p_*}{p_0}.$$

Интегрируя (4.10) с учетом начального условия  $x(1) = 0$ , получаем зависимость

$$\tau_1(x) = W(x) \ln x - \int_1^x \frac{W(x)}{x} dx. \tag{4.11}$$

На рис. 3 представлены график функции, заданной формулой (4.11) (кривая 1), и график функции  $\tau_1(x) = W(x) \ln x$  (кривая 2). Видно, что кривые 1, 2 почти совпадают, поэтому при использовании формулы (4.11) на практике вторым слагаемым в (4.11) можно пренебречь.

**Заключение.** На основе уравнений упругого режима фильтрации в гетерогенной пористой среде построена модель гидравлического разрыва первоначально однородного пласта при закачке жидкости со значительной репрессией. Получены аналитические формулы, позволяющие определить основные характеристики прискважинной зоны в результате гидравлического разрыва пласта с низкой проницаемостью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Корнев В. М., Демешкин А. Г.** Модель скачкообразного продвижения вершины трещины гидроразрыва при отсутствии фильтрации // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 164–173.
2. **Желтов Ю. П., Христианович С. А.** О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
3. **Kern L. R., Perkins T. K.** Width of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1961. V. 13. P. 937–949.
4. **Есипов Д. В., Каранаков П. В., Лапин В. Н., Черный С. Г.** Математические модели гидроразрыва пласта // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
5. **Баренблатт Г. И.** О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20. С. 475–486.
6. **Гарипов Т. Г.** Моделирование процесса гидроразрыва пласта в упругой среде // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 6. С. 53–59.
7. **Каранаков П. В., Лапин В. Н., Черный С. Г.** Модель гидроразрыва пласта, включающая механизм закупоривания трещин пропантом // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Информ. технологии. 2014. Т. 12, вып. 1. С. 19–33.
8. **Shelukhin V. V., Baikov V. A., Golovin S. V., et al.** Fractured water injection wells: Pressure transient analysis // Intern. J. Solids Structures. 2014. V. 51, iss. 11/12. P. 2116–2122.
9. **Щелкачев В. Н.** Разработка пластов при упругом режиме. М.: Недра, 1975.
10. **Желтов Ю. П.** Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975.
11. **Баренблатт Г. И., Крылов А. П.** Об упругопластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 2. С. 5–13.
12. **Рубинштейн Л. И.** К вопросу о распространении тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. 1948. Т. 12, № 1. С. 27–45.
13. **Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.** Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 25. С. 852–864.
14. **Данаев Н. Т.** Многофазная фильтрация и электромагнитное зондирование скважин / Н. Т. Данаев, Н. К. Корсакова, В. И. Пеньковский. Алма-Ата: Эверо, 2014.
15. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
16. **Черный И. А.** Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложения к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1949. № 3. С. 323–342.

*Поступила в редакцию 11/II 2015 г.*

---