

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г. В. Решение плоской смешанной задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра.— ПМТФ, 1976, № 6.

УДК 539.37

**К ВОПРОСУ О ПЛОСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ  
УПРОЧНЯЮЩИХСЯ И РАЗУПРОЧНЯЮЩИХСЯ  
ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

A. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

1. Классическое описание кинематики деформирования сплошной среды базируется на предположении о достаточной гладкости поля перемещений. Предположение о гладкости позволяет ввести понятие тензора деформаций и использовать аппарат дифференциальных уравнений для описания деформирования среды. Однако существуют широкие классы движений среды, в которых поле перемещений не обладает достаточной гладкостью. Для твердых тел негладкость поля смещений может быть связана с появлением пластической деформации. Эксперименты с различными материалами показывают, что механизм пластической деформации связан с локализацией сдвигов вдоль определенных поверхностей [1, 2]. Последнее означает, что на указанных поверхностях вектор перемещений испытывает сильный разрыв. В общем случае это обстоятельство оказывается существенным и должно учитываться при описании пластического деформирования. Принимая некоторые оправданные с механической точки зрения ограничения, негладкое поле смещений можно описать достаточно простыми средствами с помощью совокупности гладких функций.

Рассмотрим в качестве иллюстрации случай одной функции одного переменного. Обозначим через  $F(x)$  исходную функцию, имеющую сильные разрывы в точках  $x_i$ . Предположим, что расстояния между точками разрыва малы, между точками разрыва функция  $F(x)$  достаточно гладка, значения производных  $F'(x)$  справа и слева от точек разрыва равны между собой, т. е. функция

$$p(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{при } x \neq x_i, \\ F'(x_i \pm 0) & \text{при } x = x_i \end{cases}$$

достаточно гладка.

Пусть  $f(x)$  — гладкая функция, удовлетворяющая условию  $f(x_i) = F(x_i + 0)$  и  $P(x) = \int p(x) dx$ . Тогда исходную функцию  $F(x)$  можно характеризовать парой гладких функций ( $f(x)$ ,  $P(x)$ ) и последовательностью точек разрыва  $x_i$  (фиг. 1). Функция  $f(x)$  имеет смысл осреднения исходной функции и характеризует с определенной точностью значение  $F(x)$  во всей области определения. Функция  $P'(x) = f'(x)$  характеризует различие в локальном поведении исходной и осредненной функций и при заданных точках разрыва определяет величины скачков исходной функции. Так, скачок функции  $F(x)$  в точке  $x_{i+1}$  с точностью до  $l_i^2$  равен

$\{f'(x_i) = P'(x_i)\} l_i$ , где  $l_i = x_{i+1} - x_i$  — расстояние между соседними точками разрыва.

Аналогично рассмотрим случай векторной функции  $\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2$  векторного аргумента  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$  ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — ортонормированный базис). Пусть  $l \ll 1$  — характерный размер областей, в которых функция  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  достаточно гладка. В дальнейшем такие области будем называть элементами. Предположим, что для исходной функции существует гладкое осреднение  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  такое, что в центрах элементов  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)$ , на границе, разделяющей элементы с центрами в точках  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$  разрыв  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  с точностью до  $|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2$  равен  $A(\mathbf{r}_i)(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i)$ , где  $A$  — тензор второго ранга с гладкими компонентами  $A_{km}$ ,  $k, m = 1, 2$ . Исходному полю  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  будем ставить в соответствие гладкие векторное поле  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  и тензорное поле  $A(\mathbf{r})$ . Можно показать, что введенное описание накладывает на класс разрывных функций следующее ограничение: на линиях разрыва значения односторонних производных  $\partial V_k / \partial x_m$  должны быть равны между собой. Очевидно, что

$$(1.1) \quad A_{km} = \partial v_k / \partial x_m - \partial V_k / \partial x_m,$$

где функции  $\partial V_k / \partial x_m$  на линиях разрыва доопределены своими односторонними значениями.

Таким образом, некоторые классы негладких функций можно описать совокупностями гладких функций, одна из которых имеет смысл осреднения исходной функции, остальные — характеризуют разрывы исходной функции. Применимельно к полю перемещений такое описание означает, что паряду с гладким (осредненным) полем перемещений вводятся новые кинематические переменные, восполняющие информацию о разрывах, которая теряется при осреднении.

Дополнительные кинематические переменные на основе различных дипотез вводились во многих работах (например, в [3]), непосредственно геформирование сплошных сред с негладким полем скоростей исследовалось в [4].

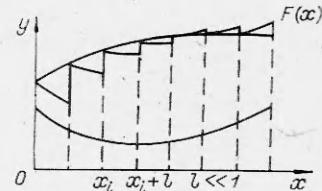
Рассмотрим пример описания разрывного поля смещений посредством гладких тензорного и векторного полей. Предположим, что линии разрыва прямолинейны, ортогональны и параллельны координатным осям. Обозначим через  $x_1^i, x_2^j$  координаты пересечения линий разрыва с соответствующими осями. Пусть гладкое описание поля  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$  имеет вид

$$(1.2) \quad v_1 = s x_2, \quad v_2 = 0, \\ A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = s - s_e, \quad A_{21} = 0,$$

где коэффициенты  $s, s_e$  зависят только от параметра нагружения. Рассмотрим механический смысл течения (1.2). Прежде всего из (1.2) следует, что нормальные к линиям разрыва компоненты вектора перемещений непрерывны:  $A_{11} = \partial v_1 / \partial x_1 - \partial V_1 / \partial x_1 = 0$ ,  $A_{22} = \partial v_2 / \partial x_2 - \partial V_2 / \partial x_2 = 0$ . Разрывы касательных компонент вектора смещений на линиях  $x_1 = x_1^i, x_2 = x_2^j$  равны

$$\gamma_{12}^0 = A_{21} \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2} = 0,$$

$$\gamma_{21}^0 = A_{12} \frac{x_2^{j+1} - x_2^{j-1}}{2} = (s - s_e) \frac{x_2^{j+1} - x_2^{j-1}}{2}.$$



Фиг. 1

Из (1.2) также следует, что  $\partial V_1 / \partial x_2 = -A_{12} + \partial v_1 / \partial x_2 = s_e$ ,  $\partial V_2 / \partial x_1 = -A_{21} + \partial v_2 / \partial x_1 = 0$ .

Таким образом, описание (1.2) и данные о  $x_1^i$ ,  $x_2^j$  позволяют восстановить разрывное поле перемещений и картину течения: (1.2) представляет собой плоскопараллельное течение в условиях, когда разрывы касательной компоненты смещения происходят только по семейству линий  $x_2 = \text{const}$  (фиг. 2, а).

Если

$$(1.3) \quad v_1 = sx_2, \quad v_2 = 0,$$

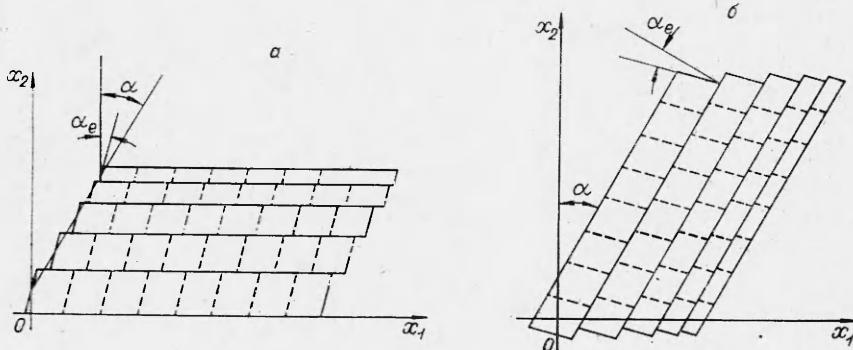
$$A_{11} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = s - s_e,$$

$$\text{то} \quad \gamma_{21}^0 = 0, \quad \gamma_{12}^* = A_{21} \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2} = (s - s_e) \frac{x_1^{i+1} - x_1^{i-1}}{2},$$

т. е. равенства (1.3) определяют плоскопараллельное течение в условиях, когда разрывы касательной компоненты смещения происходят только по семейству линий  $x_1 = \text{const}$  (фиг. 2, б).

В дальнейшем линии разрыва вектора смещений будем называть линиями скольжения, а величины разрывов касательной к линии скольжения компоненты вектора смещений — проскальзыванием или локализованной деформацией сдвига.

2. Рассмотрим плоскую деформацию пластической среды. Как указывалось, пластические деформации связаны с локализацией сдвигов по некоторым линиям (линиям скольжения). Естественно ожидать, что этот факт должен отражаться в соответствующих уравнениях пластичности. Однако из классических уравнений только уравнения идеальной пластичности выделяют особые направления (направления характеристик полей скоростей и напряжений), которые можно интерпретировать как отра-



Фиг. 2

жение сдвигового механизма деформирования по линиям скольжения. Уравнения упрочняющейся пластичности относятся к эллиптическому типу и особых направлений в развитии деформации не выделяют [5].

В работе [6] рассматривался способ построения моделей сред с произвольным реологическим поведением, механизм деформирования которых имеет сдвиговый характер по определенным направлениям. Ниже рассматривается реализация [6] для жестко- и упругопластических сред с диаграммой, которая может иметь возрастающие и ниспадающие ветви.

Предположим, что при некоторых внешних нагрузках деформируемая область целиком перешла в пластическое состояние, условие пласти-

ности не зависит от первого инварианта тензора напряжений и линии скольжения ортогональны. Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2$  параметры линий скольжения. Тогда

$$\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} = \operatorname{tg} \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \operatorname{tg} \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2},$$

$$a_1 = \frac{\partial l_1}{\partial \lambda_1}, \quad a_2 = \frac{\partial l_2}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_2} = -a_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_1} = a_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2},$$

где  $x_1, x_2$  — декартовы координаты;  $\theta = \pi/4$  — угол между касательной к линии  $\lambda_1$  и осью  $Ox_1$ ;  $l_1, l_2$  — длины дуг вдоль соответствующих линий.

Пусть история деформирования материала известна. Тогда угол  $\theta = \theta(x_1, x_2)$  равен углу между направлением наибольшего главного напряжения и осью  $Ox_1$  в момент, когда максимальные касательные напряжения в точке  $(x_1, x_2)$  достигнут некоторой известной величины  $k$ . Для определения угла  $\theta$  и, следовательно, ориентации сетки линий скольжения в общем случае необходимо решать упругопластическую задачу. В частности, если материал имеет развитую площадку текучести, то ориентация сетки может быть определена методами теории идеальной пластичности [7]. В некоторых случаях ориентация может быть определена из условий симметрии, различных вариационных соображений и т. д. В дальнейшем угол  $\theta$  будем считать известным во всей области пластического деформирования.

Вторым параметром, характеризующим сетку линий скольжения, являются размеры элементов. Выберем две координатные линии  $\lambda_2, \lambda_1 = \text{const}$ , которые разобьем на элементарные отрезки

$$(2.1) \quad \Delta\lambda_1 = f_1(\lambda_1)\varepsilon, \quad \Delta\lambda_2 = f_2(\lambda_2)\varepsilon.$$

Равенства (2.1) определяют разбиение всей пластической области на элементы, длины сторон элемента в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  равны

$$(2.2) \quad l_1 = f_1(\lambda_1)a_1(\lambda_1, \lambda_2)\varepsilon,$$

$$l_2 = f_2(\lambda_2)a_2(\lambda_1, \lambda_2)\varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что разбиение всей пластической области на правильные элементы возможно только при условии  $\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} \ln \frac{a_1}{a_2} = 0$ . В общем случае такое разбиение невозможно.

Данные физики твердого тела и эксперименты показывают, что предел пластичности элементов, выделенных сеткой линий скольжения, гораздо выше предела пластичности макротела. Если макротело переходит в пластическое состояние при максимальных касательных напряжениях, равных  $k$ , то элементы переходят в пластическое состояние при максимальных касательных напряжениях  $k(l)$ , причем  $k(l) \gg k$ . Ограничимся только такими путями нагружения, при которых касательные напряжения внутри элементов не превосходят  $k(l)$ . Чем больше отношение  $k(l)/k$ , тем шире класс таких нагрузений.

Предел пластичности элемента зависит от его размера  $l$ . Поэтому можно предположить, что напряжения, действующие на элемент, определяют и его размер, т. е. густота сетки определяется полем напряжений. Вопросы дробления элементов, которое может произойти при упрочнении материала, а также развития линий скольжения из наиболее напряженных областей в области с меньшими напряжениями в работе не исследуют-

ся. В дальнейшем рассматривается деформирование материала после образования сетки линий скольжения, причем функции  $f_1 \varepsilon, f_2 \varepsilon$ , характеризующие густоту сетки, предполагаются известными.

Предположим, что при сдвигах изменения плотности материала (дилатансии) не происходит и четыре компоненты тензора  $A$  из (1.1) определяются только двумя инвариантными функциями  $\Gamma$  и  $\Omega$ :

$$(2.3) \quad A_{11} = \cos 2\theta \cdot \Gamma, \quad A_{22} = -\cos 2\theta \cdot \Gamma,$$

$$A_{21} = -\Omega + \sin 2\theta \cdot \Gamma, \quad A_{12} = \Omega + \sin 2\theta \cdot \Gamma.$$

Условия (2.3) означают, что нормальные к сторонам элементов компоненты неосредненного поля перемещений непрерывны. Механический смысл переменной  $\Omega$  следует из равенства

$$\Omega = \frac{1}{2} (A_{12} - A_{21}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right),$$

т. е. переменная  $\Omega$  характеризует различие роторов исходного и осредненного полей перемещений. Наряду с переменной  $\Omega$  будем использовать переменную  $\omega$

$$\omega = \Omega + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right),$$

имеющую смысл половины ротора исходного негладкого поля перемещений.

В примере (1.2):  $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{s}{2}$ ,  $\Omega = \frac{s - s_e}{2}$ ,  $\omega = -\frac{s_e}{2}$ . В примере (1.3):  $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{s}{2}$ ,  $\Omega = -\frac{s - s_e}{2}$ ,  $\omega = -s + \frac{s_e}{2}$ .

Покажем, что ограничения на класс разрывных функций, накладываемые описанием (1.1), с механической точки зрения являются вполне приемлемыми. Действительно, на линии разрыва перемещений касательная и нормальная компоненты тензора напряжений непрерывны. Предположим непрерывность всех компонент. Производные  $\partial V_k / \partial x_m$  определяют деформирование и поворот элемента под действием напряжений. Пусть деформации элемента связаны с напряжениями законом Гука. Тогда непрерывность упругих деформаций следует из непрерывности напряжений. (Если на некоторых линиях напряжения разрывны, то анализ можно провести обычными методами.) Непрерывность поворотов можно показать из условий непрерывности нормальных к сторонам элементов компонент вектора перемещений. Отсюда следует непрерывность (равенство односторонних значений) каждой из производных  $\partial V_k / \partial x_m = \partial v_k / \partial x_m - A_{km}$ . Очевидно, что для компонент тензора упругих деформаций  $(1/2)(\partial V_k / \partial x_m + \partial V_m / \partial x_k)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m = (1/2)(\partial v_k / \partial x_m + \partial v_m / \partial x_k - A_{km} - A_{mk})\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m$  условие совместности в общем случае не выполняется и выполняться не должно. Действительно, если по гладкому полю напряжений построить поле упругих деформаций, то, несмотря на гладкость последнего, совместности не будет, так как напряжения в общем случае не удовлетворяют уравнениям Бельтрами — Митчела. С другой стороны, для компонент тензора полных деформаций  $(1/2)(\partial v_k / \partial x_m + \partial v_m / \partial x_k)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_m$  «полные» смещения  $v_1, v_2$  (гладкое поле осредненных смещений) существуют, и поэтому для полных деформаций условие совместности выполняется.

Более сложным является вопрос о «совместности», связанной с переменностью кривизны линий скольжения. Ниже будет показано, что принятый механизм деформирования совпадает с механизмом деформирования идеально пластического материала, который можно ввести как интерпретацию ассоциированного закона течения (соотношения Гейрингера). Поэтому так же, как и для идеально пластического материала, «совместность», связанная с переменностью кривизны линий скольжения, будет выполняться только при достаточно малых (локализованных) деформациях. В дальнейшем ограничимся только такими деформациями.

3. Рассмотрим случай, когда упругими деформациями элементов можно пренебречь. Из условия жесткости элементов и условия непрерывности нормальных к сторонам элементов компонент вектора перемещений следуют уравнения

$$(3.1) \quad \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} = 0,$$

где  $w_1, w_2$  — проекции вектора перемещений на нормали к линиям скольжения  $\lambda_2, \lambda_1$ .

Вычислим величину скачка касательной к стороне элемента компоненты перемещения. Обозначим через  $V_n, v_n$  проекции исходного и осредненного векторов перемещения на направление  $n$  (фиг. 3). Тогда

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial m} &= \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

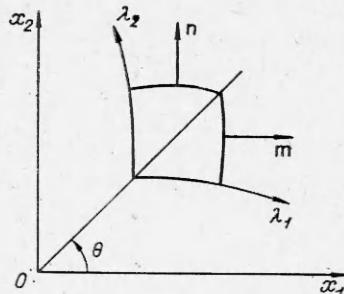
Из (2.3), (3.2) и условия жесткости элемента следует, что величина скачка

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \gamma_{12}^0 &= \left( \frac{\partial v_n}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial m} \right) f_1 a_1 \varepsilon = (\Gamma - \Omega) f_1 a_1 \varepsilon = \\ &= \left\{ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega \right\} f_1 a_1 \varepsilon = \\ &= \left( \frac{1}{a_1} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_1} + \frac{w_1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - \omega \right) f_1 a_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично для другой стороны элемента

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{21}^0 &= \left( \frac{\partial v_m}{\partial n} - \frac{\partial V_m}{\partial n} \right) f_2 a_2 \varepsilon = (\Gamma + \Omega) f_2 a_2 \varepsilon = \\ &= \left\{ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega \right\} f_2 a_2 \varepsilon = \\ &= \left( \frac{1}{a_2} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} - \frac{w_2}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + \omega \right) f_2 a_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Величины скачков явно зависят от расстояний между линиями скольжения. Формулы (3.3), (3.4) определяют локализованную деформацию сдвига



Фиг. 3

(проскальзывание). В отличие от сдвигов, определяемых тензором деформаций и характеризующих изменение произвольно ориентированных углов, величины  $\gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{21}^0$  имеют смысл только на соответствующих площадках скольжения и характеризуют реальный сдвиг (величину проскальзывания размерности длины) элементов по этим площадкам.

Касательные напряжения, которые могут развиваться на площадках скольжения, определяются величинами локализованной деформации на этих площадках, т. е.

$$(3.5) \quad \sigma_{12}^0 = T(\gamma_{12}^0), \quad \sigma_{21}^0 = T(\gamma_{21}^0),$$

или

$$(3.6) \quad \gamma_{12}^0 = S(\sigma_{12}^0), \quad \gamma_{21}^0 = S(\sigma_{21}^0).$$

Здесь и в дальнейшем индексом 0 отмечены переменные, отнесенные к соответствующим площадкам скольжения.

Формально в качестве меры сдвига на площадке скольжения можно взять любую величину, по которой можно восстановить значения  $\gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{21}^0$  (например, безразмерную величину  $\gamma_{12}^0/f_1\epsilon$  и т. д.). Критерием выбора меры являются соотношения типа (3.5): за меру сдвига необходимо принять величину, которую можно использовать в определяющих уравнениях. Во всех рассматриваемых уравнениях за меру сдвигов приняты сами разрывы перемещений  $\gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{21}^0$ , имеющие размерность длины. Если же для некоторого материала будет установлена возможность использования безразмерной меры пластического сдвига, то все необходимые выкладки можно провести аналогично.

Равенства (3.3), (3.4) показывают, что локализованные деформации на площадках скольжения из различных семейств могут быть неодинаковыми даже при  $l_1 = l_2$ . Запишем условие функционирования семейств линий скольжения в виде

$$(3.7) \quad b_1\gamma_{12}^0 + b_2\gamma_{21}^0 = 0.$$

Если один из коэффициентов  $b_1$ ,  $b_2$  равен нулю, то функционирует только одно из семейств линий скольжения, если  $b_1 + b_2 = 0$ , то оба семейства функционируют одинаково и т. д. Вопрос о выборе коэффициентов рассмотрим ниже.

Уравнения (3.1), (3.5), (3.7) совместно с уравнениями равновесия образуют замкнутую систему относительно  $\sigma_{11}^0$ ,  $\sigma_{22}^0$ ,  $\sigma_{12}^0$ ,  $\sigma_{21}^0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $\omega$ :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} a_2 \sigma_{11}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \sigma_{21}^0 - a_2 \gamma_{12}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - a_1 \sigma_{22}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + a_1 a_2 X_1^0 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda_1} a_2 \sigma_{12}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \sigma_{22}^0 + a_2 \sigma_{11}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} + a_1 \sigma_{21}^0 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + a_1 a_2 X_2^0 = 0, \\ & \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} = 0, \\ & \sigma_{12}^0 = T \left[ \left( \frac{1}{a_1} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_1} + \frac{w_1}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - \omega \right) a_1 f_1 \epsilon \right], \\ & \sigma_{21}^0 = T \left[ \left( \frac{1}{a_2} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} - \frac{w_2}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + \omega \right) a_2 f_2 \epsilon \right], \end{aligned}$$

$$f_1 b_1 \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} + f_2 b_2 \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_2} + f_1 b_1 w_1 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} - f_2 b_2 w_2 \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} + (b_2 a_2 f_2 - b_1 a_1 f_1) \omega = 0,$$

где  $X_1^0$ ,  $X_2^0$  — проекции вектора объемной силы на касательные к линиям скольжения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

Соотношения (3.5) показывают, что возможны случаи, когда  $\sigma_{12}^0 \neq \sigma_{21}^0$ . Это означает, что для сохранения равновесия на сторонах элементов должны появиться распределенные моменты (объемные моменты предполагаются отсутствующими). Из условий равновесия следует уравнение относительно моментов

$$(3.9) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} a_2 \mu_{11}^0 + \frac{\partial}{\partial \lambda_2} a_1 \mu_{22}^0 + a_1 a_2 (\sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0) = 0.$$

Система (3.8), (3.9) замкнута относительно всех переменных, кроме  $\mu_{11}^0$ ,  $\mu_{22}^0$ . Неопределенность моментов связана с предположением о жесткости элементов и в каждой конкретной задаче либо устраняется из дополнительных соображений, либо сохраняется. В декартовых координатах система (3.8), (3.9) преобразуется к виду

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \\ & \sin 2\theta \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\ & -\sin 2\theta \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \cos 2\theta \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = 0, \\ & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} = T \left[ \left( \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega \right] a_1 f_1 \varepsilon, \\ & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta + \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} = T \left[ \left( \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega \right] a_2 f_2 \varepsilon, \\ & \cos 2\theta \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda \Omega = 0, \\ & \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0, \end{aligned}$$

где введены обычные обозначения и  $\Lambda = (b_2 a_2 f_2 - b_1 f_1 a_1) / (b_2 a_2 f_2 + b_1 f_1 a_1)$ . Система (3.10) гиперболического типа. Слабые разрывы перемещений  $v_1$ ,  $v_2$  возможны только на линиях скольжения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ . Причем, если слабый разрыв реализуется, то в общем случае он влечет за собой сильный разрыв напряжений. Из уравнений равновесия и (3.5) следует, что сильные разрывы напряжений в условиях, когда поле смещений  $v_1$ ,  $v_2$  гладко, возможны только на линиях скольжения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ .

Третье и четвертое уравнения системы (3.10) показывают, что для деформаций существует пластический потенциал

$$(3.11) \quad \Phi(\sigma_{km}, \theta) = \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{2} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}}, \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{21}}.\end{aligned}$$

Так как для рассматриваемых путей нагружения угол  $\theta$  зависит только от координат, то (3.11) можно легко преобразовать к соотношениям относительно скоростей деформаций.

Последние уравнения системы (3.10) можно рассматривать как соотношения, определяющие поверхность нагружения:

$$(3.12) \quad |\varphi_1(\sigma_{km}, \theta)| - |T[(\lambda/2 - \Omega)a_1 f_1 \varepsilon]| = \Phi_1(\sigma_{km}, \varepsilon_{km}, x_1, x_2, \theta) = 0,$$

$$|\varphi_2(\sigma_{km}, \theta)| - |T[(\lambda/2 + \Omega)a_2 f_2 \varepsilon]| = \Phi_2(\sigma_{km}, \varepsilon_{km}, x_1, x_2, \theta) = 0,$$

где  $\varphi_1 = \sigma_{12}^0(\sigma_{km}, \theta); \quad \varphi_2 = \sigma_{21}^0(\sigma_{km}, \theta);$

$$\lambda = \cos 2\theta (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) + 2 \sin 2\theta \varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}^0}{f_1 a_1 \varepsilon} + \frac{\gamma_{21}^0}{f_2 a_2 \varepsilon}; \quad \Omega = -\frac{\lambda}{2\Lambda}.$$

Поверхность нагружения в общем случае ситуарна и состоит из двух поверхностей  $\Phi_1, \Phi_2$ : область  $\Phi_1 < 0, \Phi_2 < 0$  соответствует жесткому состоянию материала, область  $\Phi_1 \Phi_2 = 0$  — пластическому состоянию. Форма записи (3.12) выбрана с учетом того, что функция (функционал)  $T$  нечетна.

Понятия нагружения и разгрузки определены в пространстве деформаций: нагружение происходит, если хотя бы одна из величин  $\gamma_{12}^0, \gamma_{21}^0$  меняется. Если обе величины фиксированы, то происходит разгрузка или нейтральное нагружение: разгрузка, если  $\frac{\partial |\Phi_{1,2}|}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km} < 0$ , нейтральное нагружение, если  $\frac{\partial |\Phi_i|}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km} = 0$ , где  $i = 1$  или  $2$ .

Таким образом, уравнения (3.10) показывают: в общем случае в результате пластического деформирования материал становится анизотропным и неоднородным; вид анизотропии связан с ориентацией сетки линий скольжения, неоднородность — с геометрией и густотой этой сетки; для тензора пластической деформации существует потенциал; поверхность нагружения сингулярна; закон деформирования неассоциирован. В частных случаях возможны ситуации, когда поверхность нагружения гладка, закон деформирования ассоциирован, материал однороден. Если  $T' = 0$ , то уравнения (3.10) переходят в уравнения идеальной пластичности. Модель идеальной пластичности, рассматриваемая как предельный случай (3.10), обладает рядом исключительных свойств: несмотря на возможную неоднородность материала, связанную с геометрией и густотой сетки линий скольжения, уравнения деформирования от этой неоднородности не зависят, а также не зависят от возможного различия в функционировании линий скольжения из различных семейств; тензор напряжений симметричен даже при неравных локализованных сдвигах (проскальзываниях) по площадкам из различных семейств.

Рассмотрим задачу о вдавливании гладкого жесткого штампа в невесомое полупространство из пластического материала с площадкой текучести. Предположим, что при идеальном течении в материале развивается пластическая зона Хилла (фиг. 4):  $\theta \equiv \pi$  в области  $A_1 A_2 A_3$ ,  $\theta = \beta + \pi/4$  в области  $A_2 A_3 A_5$  и  $\theta \equiv \pi/2$  в области  $A_3 A_4 A_5$ , где  $r, \beta$  — полярные координаты с полюсом в точке  $A_3$  (течение симметрично относительно прямой  $x_1 = -a$ ).

Построим решение системы (3.10) при указанных значениях  $\theta$  и следующих краевых условиях: на границе с жесткой областью нормальная компонента смещений непрерывна, на границе  $A_1A_3$  касательные напряжения отсутствуют и вертикальное смещение равно  $h$ , граница  $A_3A_4$  свободна от напряжений, на линиях  $A_2A_3$ ,  $A_3A_5$  непрерывны соответствующие смещения, напряжения и моменты. Введем криволинейные координаты  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  (см. фиг. 4). Можно показать, что в области  $A_1A_2A_3$   $\sigma_{21}^0 = T(0) = k$ , а в области  $A_2A_3A_5$   $\sigma_{\beta r} = T\left(\frac{b_1 f_1}{b_2 f_2 r - b_1 f_1}\right) \frac{\sqrt{2} h}{r}$ . Из условия непрерывности напряжений на  $A_3A_2$  следует, что

$$(3.13) \quad T\left(\frac{-b_1 f_1}{b_2 f_2 r - b_1 f_1}\right) \frac{\sqrt{2} h}{r} = T(0) = k.$$

Последнее равенство позволяет решить вопрос о функционировании линий скольжения из различных семейств (т. е. определить коэффициенты  $b_1$ ,  $b_2$  в уравнении (3.7)). Если течение идеально ( $T(v_{21}^0) = k$ ), то условие (3.13) ограничений на  $b_1$ ,  $b_2$  не накладывает. Если  $T(v_{21}^0) \neq \text{const}$ , то из (3.13) следует, что  $b_1 = 0$ . Следовательно, условие непрерывности (3.13) показывает, что в случае неидеального течения (упрочнение или разупрочнение) локализованные сдвиги возможны только по семейству линий  $\lambda_2$ . Таким образом, в данной задаче условия нагружения определяют режим деформирования однозначно.

Решение, удовлетворяющее перечисленным выше граничным условиям, имеет вид

в области  $A_3A_5A_4$ :

$$(3.14) \quad v_1 = h, \quad v_2 = -h, \quad \omega = 0, \\ \sigma_{11} = -2k, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = 0;$$

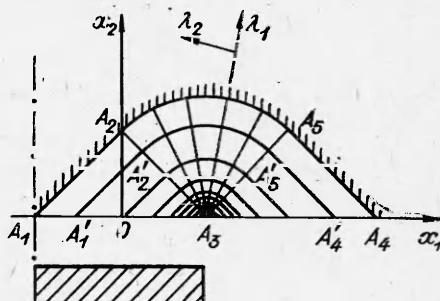
в области  $A_3A_4A_5$ :  $v_r = 0$ ,  $v_\beta = \sqrt{2} h$ ,  $\omega = -\frac{\sqrt{2} h}{r}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{r\beta} &= T\left(\frac{\sqrt{2} h}{r} f_1 \epsilon\right), \quad \sigma_{\beta r} = k, \quad \sigma_{rr} = \\ &= -\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \left[ T\left(\frac{\sqrt{2} h}{r} f_1 \epsilon\right) + k \right] - k, \\ \sigma_{\beta\beta} &= -\left[\frac{\partial}{\partial r} r T\left(\frac{\sqrt{2} h}{r} f_1 \epsilon\right) + k\right] \left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) - k, \\ \mu_{rr} &= -\frac{1}{r} \int_0^r \left[ T\left(\frac{\sqrt{2} h}{r} f_1 \epsilon\right) - k \right] r dr, \quad \mu_{\beta\beta} = 0; \end{aligned}$$

в области  $A_1A_2A_3$ :  $v_1 = h$ ,  $v_2 = h$ ,  $\omega = 0$ ,  $\mu_{11} = 0$ ,  $\mu_{22} = 0$ ,

$$\sigma_{11} = k + \frac{i}{2} \left[ \Psi\left(\frac{-x_1 - x_2 + a}{\sqrt{2}}\right) + \Psi\left(\frac{-x_1 + x_2 + a}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

$$\sigma_{22} = -k + \frac{1}{2} \left[ \Psi\left(\frac{-x_1 - x_2 + a}{\sqrt{2}}\right) + \Psi\left(\frac{-x_1 + x_2 + a}{\sqrt{2}}\right) \right],$$



Фиг. 4

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -\frac{1}{2} \left[ \Psi\left(\frac{-x_1 - x_2 + a}{V^2}\right) - \Psi\left(\frac{-x_1 + x_2 + a}{V^2}\right) \right],$$

где

$$\Psi(r) = -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r T\left(\frac{V^2 h}{r} f_1 \varepsilon\right) \right] + k \right\} - k.$$

При интегрировании уравнений дополнительно предполагалось, что  $\sigma_{rr}$ ,  $\mu_{rr}$  в точке  $r = 0$  особенности не имеют и  $\partial \mu_{\beta\beta} / \partial \beta = 0$ . Усилие вдавливания и эпюра напряжений под штампом в зависимости от глубины вдавливания  $h$  определяются формулой

$$(3.15) \quad \sigma_{22}|_{x_2=0} = -k + \Psi((-x_1 + a)/V^2).$$

В частном случае идеально пластического материала решение и предельная нагрузка (3.15) переходят в классические.

В рассматриваемой постановке задача ставится как задача о начальном пластическом течении, т. е.  $h$  в решении (3.14) должно быть мало. Так как в центрированной волне  $a_2 = r$ , то при  $r \rightarrow 0$  размеры элементов вдоль  $\lambda_2$  становятся исчезающими малыми. Предположим, что и вдоль  $\lambda_1$  размеры элементов малы, т. е.  $f_1 \varepsilon \sim r$ , если  $r \rightarrow 0$ . Тогда локализованные сдвиги в точке  $r = 0$  особенности не имеют и при достаточно малом  $h$  течение всего материала будет идеальным. Обозначим через  $\gamma_*$  величину проскальзывания, при котором начинается упрочнение или разупрочнение материала. Пусть отношение  $\gamma_*/a$  настолько мало, что течение при  $h$  порядка  $\gamma_*$  можно считать начальным. При этих значениях  $h$  появляется одно обстоятельство, связанное с особым состоянием слоя материала, примыкающего к линии, отделяющей жесткую и пластическую области.

Из решения следует, что на линии  $A_1 A_2 A_5 A_4$  касательная компонента вектора перемещений разрывна и разрыв равен  $V^2 h$ . В связи с тем, что за меру локализованных сдвигов в (3.5) принятые величины размерности длины, то «сдвиг» по линии  $A_1 A_2 A_5 A_4$  в принципе ничем не отличается от локализованных сдвигов внутри области деформирования. Поэтому на границе с жесткой областью появится дополнительное граничное условие на напряжения

$$(3.16) \quad \sigma_{12}^0 = T(V^2 h).$$

Так как расстояния между линиями скольжения конечны, то дополнительное условие (3.16) не противоречит построенному решению. Действительно, напряжения (3.14) имеют смысл только до линии  $A'_1 A'_2 A'_5 A'_4$ . Поэтому «пограничный» слой  $A_1 A_2 A_5 A_4 A'_4 A'_5 A'_2 A'_1$  с одной стороны находится под действием касательных напряжений (3.14), с другой — под действием касательных напряжений (3.16). Это приведет к тому, что на линии  $A'_1 A'_2 A'_5 A'_4$  напряжение  $\sigma_{22}^0$  будет разрывно, а в самом «пограничном» слое будет быстро меняться вдоль  $\lambda_2$ . Из условия равновесия элементов, составляющих слой  $A_1 A_2 A_5 A_4 A'_4 A'_5 A'_2 A'_1$ , можно найти

$$\begin{aligned} \sigma_{22}|_{A_1 A'_1} = & -\frac{\pi}{2} \left[ T\left(\frac{V^2 h}{r} f_1 \varepsilon\right) + k - \frac{T(V^2 h) - T\left(\frac{V^2 h}{r} f_1 \varepsilon\right)}{A_1 A'_1} a V^2 \right] - \\ & - 2k - \frac{2a V^2}{A_1 A'_1} [T(V^2 h) - k]. \end{aligned}$$

Отметим, что  $T(0) \leq k$ , а не равно  $k$ , как предполагалось выше. Если  $T(0) < k$ , то в областях, где  $\gamma_{12}^0 = 0, \gamma_{21}^0 = 0$ , может произойти разгрузка. Этот вариант можно исследовать аналогично рассмотренному выше.

4. Переидем к модели упругопластического тела. Предположим, что деформирование элементов целиком обратимо, а вся локализованная деформация (проскальзывание) необратима. Рассмотрим сначала вопрос об упругих деформациях элементов при напряжениях  $\sigma_{hm}^0$ . Нормальные напряжения  $\sigma_{hb}^0$  вызывают растяжение элемента в направлении своего действия и сжатие в поперечном направлении. Из условия непрерывности нормальных к сторонам элемента компонент вектора перемещения следует, что деформации сжатия для исходного негладкого и осредненного гладкого полей перемещений совпадают. Следовательно,

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{a_1} \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - \frac{w_2}{a_1} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0, \\ \frac{1}{a_2} \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + \frac{w_1}{a_2} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} &= \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0, \end{aligned}$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Как и для жестко-пластического тела, можно показать, что касательные напряжения  $\sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0$  в общем случае неравны между собой. Действие напряжений  $\sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0$  представим как наложение двух систем напряжений  $\tau_+^0, \tau_-^0$ :  $\sigma_{12}^0 = \tau_+^0 + \tau_-^0, \sigma_{21}^0 = \tau_+^0 - \tau_-^0$ . Из соображений симметрии следует, что упругий сдвиг элемента происходит только под действием составляющей  $\tau_+^0 = (\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0)/2$ . Величина упругого сдвига равна

$$(4.2) \quad \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{4\mu}.$$

Рассмотрим уравнения для локализованной деформации. Локализованный сдвиг на площадке скольжения по определению равен

$$(4.3) \quad \gamma_{12}^0 = \left( \frac{\partial v_n}{\partial m} - \frac{\partial V_n}{\partial m} \right) f_1 a_1 \epsilon = \left[ \left[ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) - \Omega \right] - \left[ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) \right] \right] f_1 a_1 \epsilon.$$

Соотношения (3.6), отражающие связь локализованного сдвига и соответствующего касательного напряжения, остаются без изменений. Подставляя (4.2) в (4.3) и затем в (3.6), получим уравнение

$$(4.4) \quad \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega = \frac{1}{f_1 a_1 \epsilon} S(\sigma_{12}^0) + \frac{\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0}{4\mu}.$$

Аналогично для другой площадки скольжения

$$(4.5) \quad \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega = \frac{1}{f_2 a_2 \epsilon} S(\sigma_{21}^0) + \frac{\sigma_{21}^0 + \sigma_{12}^0}{4\mu}.$$

В упругопластическом теле элементы деформируются как под действием напряжений  $\sigma_{hm}^0$ , так и под действием моментов. Последнее обстоятель-

ство позволяет замкнуть систему относительно всех переменных, включая моменты.

Из принятого механизма деформирования следует, что усилия между элементами передаются только через напряжения, распределенные по их сторонам. Поэтому моменты  $\mu_{11}^0$ ,  $\mu_{22}^0$  могут возникнуть только вследствие неравномерности такого распределения. В данном случае распределение напряжений по стороне элемента достаточно считать линейным. Линейную эпюру представим как наложение двух эпюр: постоянной, которая дает то же усилие на стороне элемента, что и исходная, но не дает момента, и линейную, которая не дает в сумме никакого усилия, но дает момент. Обозначим наибольшее напряжение на стороне элемента  $\lambda_2$ , соответствующее второй эпюре, через  $\Sigma_{11}^0$ .

Тогда

$$\mu_{11}^0 = \Sigma_{11}^0 a_2 f_2 \varepsilon / 6.$$

Аналогично для стороны  $\lambda_1$

$$\mu_{22}^0 = \frac{\Sigma_{22}^0}{6} a_1 f_1 \varepsilon.$$

Неравномерные напряжения, действующие на стороне элемента  $\lambda_2$ , вызывают не только растяжение элемента, которое учитывается первым уравнением (4.1), но и поворот этой стороны на угол  $\Omega_{11}^0$ . По обычным формулам можно связать изменение  $\Omega_{11}^0$  вдоль  $\lambda_1$  ( $\Omega_{11}^0$  гладко вдоль  $\lambda_1$ ) с  $\mu_{11}^0$

$$(4.6) \quad \frac{1}{a_1} \frac{\partial \Omega_{11}^0}{\partial \lambda_1} = \frac{12 \mu_{11}^0}{E (a_2 f_2 \varepsilon)^2},$$

где  $E$  — модуль Юнга.

Аналогично вдоль  $\lambda_2$

$$(4.7) \quad \frac{1}{a_2} \frac{\partial \Omega_{22}^0}{\partial \lambda_2} = \frac{12 \mu_{22}^0}{E (a_1 f_1 \varepsilon)^2}.$$

Если следовать идеям моментных теорий упругости, то необходимо положить  $\Omega_{11}^0 = \Omega_{22}^0$  [8] (в данном случае неважно, является ли переменная  $\Omega_{11}^0 = \Omega_{22}^0$  независимой или определяется, как в [8], ротором поля перемещений) и получить замыкающее уравнение на моменты перекрестным дифференцированием (4.6), (4.7). Однако принятый выше механизм деформирования приводит к необходимости дополнительного ввести в точке  $(\lambda_1, \lambda_2)$  три кинематические переменные:  $\Omega$  и  $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$ . Причем априорно нет никаких оснований считать, что переменные  $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$  связаны между собой и с переменной  $\Omega$ . Поэтому два уравнения (4.6), (4.7) вводят в систему уравнений две новые неизвестные  $\Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0$  и не позволяют непосредственно замкнуть систему относительно моментов.

Замыкающее уравнение можно получить следующим образом. Обозначим через  $W$  часть упругой энергии, которая запасается в области  $D$  упругопластического тела вследствие деформирования элементов под действием моментов  $\mu_{11}^0, \mu_{22}^0$ . Можно показать, что

$$(4.8) \quad W = \frac{6}{E} \int_D \left[ \frac{(\mu_{11}^0)^2}{(a_2 f_2 \varepsilon)^2} + \frac{(\mu_{22}^0)^2}{(a_1 f_1 \varepsilon)^2} \right] a_1 a_2 d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Предположим, что из всех возможных распределений моментов, удовлетворяющих уравнениям равновесия и граничным условиям, реализуется то, которое доставляет минимум потенциальной энергии  $W$ . Минимум функционала (4.8) при условии (3.9) реализуется, если моменты удовлетворяют уравнению

$$(4.9) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{a_2 \mu_{22}^0}{(a_1 f_1 \varepsilon)^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \frac{a_1 \mu_{11}^0}{(a_2 f_2 \varepsilon)^2}.$$

Во всех рассмотренных уравнениях функции  $l_1, l_2$  из (2.2) можно интерпретировать как неоднородные характеристики материала размерности длины. Если сетка линий скольжения правильна и состоит из прямых ( $l_1 \equiv l_2 = l$ ), то неоднородные характеристики сводятся к одной постоянной, которая фигурирует в уравнениях, как постоянная материала размерности длины. С другой стороны, в моментных теориях упругости также появляется постоянная материала размерности длины. Постоянная моментной теории упругости (с точностью до несущественного множителя, который вводится для удобства) совпадает с  $l$  — параметром густоты сетки линий скольжения. В этом случае уравнение (4.9) переходит в соответствующее уравнение моментной теории упругости  $\partial \mu_{11} / \partial x_2 = \partial \mu_{22} / \partial x_1$  [8].

Уравнения равновесия совместно с уравнениями (4.1), (4.4)–(4.7), (4.9) образуют замкнутую систему относительно

$$\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{21}^0, w_1, w_2, \Omega, \Omega_{11}^0, \Omega_{22}^0, \mu_{11}^0, \mu_{22}^0.$$

В декартовых координатах система преобразуется к виду

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 &= 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0, \\ \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) &= \\ = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \cos 2\theta \right], \\ - \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) &= \\ = \frac{1-2\nu}{2\mu} \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \cos 2\theta \right], \\ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \Omega &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\mu} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4\mu} \sin 2\theta + \\ + \frac{1}{f_1 a_1 \varepsilon} S \left[ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta - \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} \right], \\ \frac{\cos 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \Omega &= \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{4\mu} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{4\mu} \sin 2\theta + \\ + \frac{1}{f_2 a_2 \varepsilon} S \left[ \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{21}}{2} \sin 2\theta + \frac{\sigma_{21} - \sigma_{12}}{2} \right], \\ \cos 2\theta \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda\Omega &= 0. \end{aligned}$$

(Для сокращения записей уравнения относительно моментов в декартовых координатах не выписаны.)

Пусть  $\sigma_{12}^0 < k$ ,  $\sigma_{21}^0 < k$ . Следовательно, локализованной деформации нет и  $S(\sigma_{12}^0) \equiv \tilde{S}(\sigma_{21}^0) \equiv 0$ ,  $\Omega = 0$ . В этом случае угол  $\theta$  из системы

(4.10) исключается и система сводится к уравнениям теории упругости. Отсюда упругую среду можно определить как среду, в которой условие непрерывности нормальных компонент перемещения (4.1) выполняется для всевозможных направлений  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Запишем систему (4.10) в приращениях

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \frac{\partial \Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \\
 & \sin 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) = \\
 & = \frac{1}{2\mu} [(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22}) \sin 2\theta - (\Delta\sigma_{12} + \Delta\sigma_{21}) \cos 2\theta]; \\
 & \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} = \frac{1-2\nu}{2\mu} (\Delta\sigma_{11} + \Delta\sigma_{22}), \\
 & \cos 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) = \rho_2 (\Delta\sigma_{21} - \Delta\sigma_{12}) + \\
 & + \rho_1 [(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22}) \cos 2\theta + (\Delta\sigma_{12} + \Delta\sigma_{21}) \sin 2\theta], \\
 & 2\Delta\Omega = \rho_2 [(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22}) \cos 2\theta + (\Delta\sigma_{12} + \Delta\sigma_{21}) \sin 2\theta] + \\
 & + \left( \rho_1 - \frac{1}{2\mu} \right) (\Delta\sigma_{21} - \Delta\sigma_{12}), \\
 & \cos 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left( \frac{\partial \Delta v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta v_1}{\partial x_2} \right) + 2\Lambda\Delta\Omega = 0,
 \end{aligned}$$

где

$$2\rho_1 = \frac{S'(\sigma_{12}^0)}{f_1 a_1 \varepsilon} + \frac{S'(\sigma_{21}^0)}{f_2 a_2 \varepsilon} + \frac{1}{\mu}; \quad 2\rho_2 = \frac{S'(\sigma_{21}^0)}{f_2 a_2 \varepsilon} - \frac{S'(\sigma_{12}^0)}{f_1 a_1 \varepsilon}.$$

Остановимся на вопросе о коэффициентах  $b_1, b_2$ , фигурирующих в уравнениях (3.7), т. е. на вопросе о функционировании линий скольжения из различных семейств. Пусть  $(\lambda_1, \lambda_2)$  — координаты некоторого исходного элемента, а  $(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$ ,  $(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$  — координаты элементов, граничащих с исходным. Условия совместности деформирования элементов  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2)$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$  приводят к уравнениям (3.1) или (4.1). При этом должно выполняться условие совместности деформирования элементов  $(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $(\lambda_1 + \Delta\lambda_1, \lambda_2 + \Delta\lambda_2)$ , приводящее к тому, что в любой фиксированный момент времени  $t$   $b_1(t)b_2(t) = 0$ , т. е. в рассматриваемой среде возможно только попеременное функционирование линий скольжения из различных семейств (турбулентное пластическое течение [9]). Поэтому приращения всех искомых переменных состоят из двух частей: одна часть (с индексом  $-$ ) удовлетворяет уравнениям (4.11), в которых положено  $b_1 = 0$ , другая (с индексом  $+$ ) — тем же уравнениям, в которых  $b_2 = 0$ . Так как обе системы линейны, то при сложении соответствующих уравнений относительно приращений с индексами  $+$  и  $-$  для суммы получим ту же систему (4.11), в которой  $\Lambda = (\Delta-\Omega - \Delta+\Omega)/(\Delta-\Omega + \Delta+\Omega)$ . При этом необходимо учесть, что  $S'(\sigma_{12}^0)$ ,  $S'(\sigma_{21}^0)$  и, следовательно,  $\rho_1, \rho_2$  зависят от знака приращений  $\Delta\sigma_{12}^0, \Delta\sigma_{21}^0$ .

Если величина  $\Lambda$  известна (например, из условий симметрии  $\Lambda = 0$  или граничных условий, как в задаче о штампе,  $\Lambda = 1$  и т. д.), то можно сразу решать систему относительно приращений без индексов, если нет, то необходимо решать системы относительно приращений с индексами  $+$  и  $-$ . При этом возникает вопрос, в течение каких промежутков времени граничные условия удовлетворяются за счет скольжения по одному

семейству и за счет скольжения по другому семейству. В каждой задаче этот вопрос решается из дополнительных соображений с учетом конкретных условий нагружения материала.

Рассмотрим вопрос о типе системы (4.11). Из последних пяти уравнений выразим  $\Delta\sigma_{km}$  через  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$ . Затем, подставляя выражения для  $\Delta\sigma_{km}$  в уравнения равновесия, получим два квазилинейных уравнения второго порядка относительно  $\Delta v_1$ ,  $\Delta v_2$ . Обозначим через  $\kappa$  тангенс угла наклона характеристики к оси  $Ox'_1$  в локальных координатах  $\theta = \pi/4$ . Тогда

$$(4.12) \quad \kappa = \pm \sqrt{\frac{-(1-v\xi_1) \pm \sqrt{(1-v\xi_1)^2 - (1-v)^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)}}{(1-v)(\xi_1 + \xi_2)}},$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_1 + \rho_2/\Lambda - 1/4\mu}{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1/4\mu};$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho_1/\Lambda + \rho_2}{\rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_1/4\mu}.$$

Тип системы (4.11) определяется знаками подкоренных выражений в формуле (4.12).

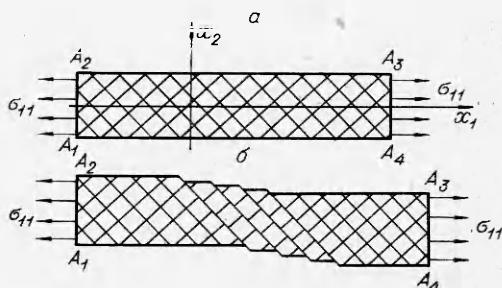
Формула (4.12) показывает, что тип системы (4.11) зависит от производных функции  $S$ . Рассмотрим механический смысл этой зависимости в случае, когда  $\sigma_{12}^0 \equiv \sigma_{21}^0$ . При этом условии

$$(4.13) \quad \xi_1 = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{\rho_1}, \quad \xi_2 = 0, \quad \Lambda = -\frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Соотношение (4.12) с учетом (4.13) показывает, что система (4.11) принадлежит к эллиптическому типу в случае, когда материал упрочняется ( $\xi_1 > 0$ ) и к гиперболическому типу в случае идеального течения материала ( $\xi_1 = 0$ ). Если материал разупрочняется и его разупрочнение не очень велико ( $-1/(1-2v) \leq \xi_1 < 0$ ), то система также принадлежит к гиперболическому типу. Если же разупрочнение материала становится достаточно большим ( $-\infty < \xi_1 < -1/(1-2v)$ ), то тип системы меняется на эллиптический.

Этот парадоксальный на первый взгляд результат можно пояснить на следующем примере. Пусть полоса  $A_1A_2A_3A_4$  растягивается в направлении  $x_1$  (фиг. 5). Предположим, что на границе и внутри области деформирования  $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = 0$ ,  $\theta = 0$ . Из уравнений (4.11) можно найти связь приращения длины полосы с приращением растягивающих напряжений

$$(4.14) \quad \frac{\Delta v_1}{\Delta\sigma_{11}} = \left[ \frac{1}{\xi_1} + (1-2v) \right] \frac{x_1}{4\mu}.$$



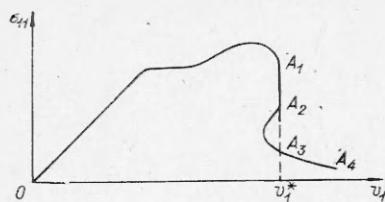
Ф и г. 5

Если материал упрочняется, то знаки  $\Delta v_1$ ,  $\Delta\sigma_{11}$  одинаковы, т. е. увеличение или уменьшение растягивающей силы приводит к увеличению или уменьшению длины полосы. Пусть теперь на площадке скольжения увеличение локализованного сдвига приводит к уменьшению касательных напряжений — материал разупрочняется. С одной стороны, увеличение локализованного сдвига приводит к увеличению длины полосы. С другой стороны, уменьшение касательных напряжений приводит к упругой разгрузке элементов, что вызывает уменьшение длины полосы.

При  $\xi_1 > -1/(1-2v)$  первый фактор превалирует над вторым, и при уменьшающейся внешней нагрузке происходит общее удлинение полосы — система (4.11) принадлежит к гиперболическому типу. Если же  $\xi_1 < -1/(1-2v)$ , то превалирующим фактором будет второй: при уменьшающейся растягивающей силе и увеличивающихся локализованных сдвигах общая длина полосы будет уменьшаться за счет упругого сжатия элементов, т. е. внешние материа ведут себя как и упрочняющийся, и тип системы меняется на эллиптический. Если  $\xi_1 = -1/(1-2v)$ , то растягивающее усилие уменьшается при постоянной длине полосы. В этих условиях система энергетически изолирована и внутри нее происходит необратимый переход запасенной упругой энергии в работу, совершающую на площадках скольжения.

Остановимся еще на одном обстоятельстве. Пусть растягивающее напряжение  $\sigma_{11}$  монотонно увеличивается от нуля и затем, если есть падающая ветвь, уменьшается. Тогда на возрастающей ветви функция  $S(\sigma_{11}/2)$  однозначна и, следовательно,  $\rho_2 = 0$ . Из уравнений (4.11) следует, что в этом случае  $\Delta\Omega = 0$ , т. е. локализованные сдвиги на обеих семействах линий скольжения одинаковы и линии функционируют симметрично (см. фиг. 5, а). Если материал начинает разупрочняться, то функция  $S(\sigma_{11}/2)$  становится неоднозначной и появляется возможность второго режима деформирования, когда  $\rho_2 \neq 0$  и  $\Delta\Omega \neq 0$  (см. фиг. 5, б). Это означает, что уменьшение касательных напряжений на одной из площадок происходит за счет увеличения сдвига, на другой — за счет разгрузки. Если учесть попаременность в функционировании линий скольжения, то можно сделать вывод, что на падающей ветви реализуется второй режим деформирования. Не останавливаясь на вопросах общей постановки краевых задач, существования, единственности и устойчивости решений (4.10), отметим, что на падающей ветви можно ожидать неединственности решения. Причем некоторые из решений будут неустойчивыми. Анализ устойчивости дает естественный критерий выбора решения.

Можно показать, что решение (4.14) при свободных поверхностях  $A_1A_4$ ,  $A_2A_3$  неустойчиво и неединственно. Так как роль этого решения иллюстративная, то предположим, что на границах  $A_1A_4$ ,  $A_2A_3$  заданы кинематические ограничения, подавляющие возмущения, приводящие к неустойчивости. Решение (4.14) указывает еще на одну особенность, присущую деформированию упругопластических разупрочняющихся материалов. Из (4.14) следует, что диаграмма «растягивающая сила — удлинение полосы» может иметь вид, изображенный на фиг. 6. Предположим, что нагружение производится с контролируемым монотонно увеличивающимся удлинением. Тогда при удлинении, равном  $v_1^*$ , в материале произойдет неконтролируемое освобождение части потенциальной упругой энергии, соответствующее переходу из точки  $A_1$  в  $A_2$  и затем в  $A_3$ . Причем



Фиг. 6

при переходе из  $A_1$  в  $A_2$  освобождаемая потенциальная энергия полностью диссирируется на линиях скольжения, при переходе из  $A_2$  в  $A_3$  диссириуется только часть энергии, другая часть переходит в кинетическую энергию элементов. Если такая «разрядка» не разрушит образец, то дальнейшее его деформирование будет проходить по ветви  $A_3A_4$ .

Рассмотрим осесимметричное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии материала вокруг круглого отверстия. Введем полярную систему координат  $(r, \beta)$  и предположим, что на границе и внутри области деформирования  $\sigma_{\beta r} = \sigma_{r\beta} = 0$ . Отсюда  $\theta = \beta$  и линии скольжения будут логарифмическими спиральами. Пусть элементы правильны и их размеры не зависят от  $\beta$ :  $f_1(\lambda_1) = f_2(\lambda_2) = 1$ ,  $l_1 = l_2 = \varepsilon r$ . Предположим также, что массовые силы отсутствуют. Тогда система (4.10) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} (\sigma_{rr} + \sigma_{\beta\beta}),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} = \frac{2}{\varepsilon r} G \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2} \right) + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2\mu},$$

где

$$2G = S(\sigma_{12}^0) + S(\sigma_{21}^0); \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{2}.$$

Выражая из первых двух уравнений полуразность главных напряжений через радиальное смещение и используя затем последнее уравнение, получим общее решение в виде

$$(4.15) \quad v_r = 2r \int \frac{w}{r} dr + C_1 r, \quad \sigma_{rr} = \tau + \frac{\mu}{1 - 2\nu} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right),$$

$$\sigma_{\beta\beta} = -\tau + \frac{\mu}{1 - 2\nu} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right),$$

$$\omega = \frac{1}{2\varepsilon r} [S(\sigma_{21}^0) - S(\sigma_{12}^0)],$$

где  $w = \frac{1 - 2\nu}{2\mu} \left( \frac{C_2}{r^2} - \tau \right)$ ,  $\tau$  удовлетворяет конечному соотношению

$$(4.16) \quad 2\mu G(\tau) + 2\varepsilon r (1 - \nu) \tau = \frac{\varepsilon C_2 (1 - 2\nu)}{r}$$

( $C_1$ ,  $C_2$  — постоянные интегрирования). На возрастающей ветви функция  $S$  однозначна и  $G = S$ ,  $\omega = 0$ , т. е. на возрастающей ветви линии скольжения из различных семейств функционируют одинаково. На падающей ветви функция  $S$  неоднозначна,  $\omega \neq 0$  и локализованные сдвиги (проскальзывания) продолжаются только по одному из семейств линий скольжения.

Если  $G(\tau)$  неопределено при некотором  $\tau = k$  (идеальное течение), то уравнение (4.16) заменяется равенством  $\tau = k$  и (4.15) переходит в обычное решение теории идеальной пластичности. При  $G(\tau) = 0$  (локализованной деформации нет, упругость) (4.15) переходит в решение теории упругости.

При наличии падающего участка диаграммы  $G(\tau)$  решение (4.16) может быть неединственным, что указывает на возможность неконтролируемого освобождения запасенной упругой энергии в определенной области деформируемого материала.

Таким образом, выше было рассмотрено деформирование материала, разделенного дискретной сеткой линий скольжения на элементы. Расстояния между линиями скольжения предполагались достаточно малыми, чтобы переход к дифференциальному уравнению не вносил большой погрешности. При численном решении задач потребуется обратный переход к «дискретной» модели. Естественно, при постановке задач для численного счета не нужно делать два перехода, а сразу ставить задачу для дискретной сетки линий скольжения. При этом можно воспользоваться двумя обстоятельствами: для упругого тела можно принять любую удобную сетку линий скольжения произвольной ориентации и густоты, для идеально пластического тела — сетку любой густоты.

Первое обстоятельство позволяет рассмотреть упругопластические задачи, когда расстояние между действительными линиями скольжения (на которых проскальзывание отлично от нуля) сравнимы с характерным размером деформируемого тела. Выше определяющие связи выписывались отдельно для напряжений — деформаций элементов и напряжений — проскальзываний между элементами. Первые связи предполагались чисто упругими или жесткими, вторые — чисто пластическими. Эти ограничения не являются принципиальными и допускают обобщение как для связей первого, так и для связей второго типа. В частности, можно учесть ползучесть, неортогональность линий скольжения, дилатационные эффекты [10] и эффекты внутреннего трения, имеющие значение для грунтов и горных пород.

Поступила 20 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин С. И. Пластическая деформация металлов. М., «Металлургия», 1960.
2. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучих материалов при больших сдвигах.— ФТПРПИ, 1974, № 3, с. 130—133.
3. Богданова-Бончева Н. Върху условията на пластичността при среди на Коцера с вътрешно триене.— «Теоретична и приложна механика». София, 1974, № 3, с. 55—66.
4. Зак М. А. Неклассические проблемы механики сплошных сред. Л., изд. Ленинград. ун-та, 1974.
5. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
6. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. Некоторые модели деформирования горных пород и грунтов.— В кн.: Некоторые проб. вычисл. и прикл. мат. Новосибирск, «Наука», 1975, с. 140—145.
7. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
8. Mindlin R. D. Influence of couple-stresses on stress concentrations.— «Experimental Mechanics», 1963, vol. 3, p. 1—7. Рус. пер.— Сб. Механика, 1964, № 4, с. 115—128.
9. Коттрел А. Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургиздат, 1958.
10. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Кинематика деформирования сыпучей среды с невязким трением.— ПМТФ, 1974, № 4, с. 119—124.