УДК 532.51
DOI: 10.15372/PMTF202415456

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВОЛНИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Рассмотрено вязкое течение жидкости между двумя волнистыми горизонтальными поверхностями, не ограниченными в продольном и поперечном направлениях. С использованием полных уравнений Навье — Стокса исследована линейная устойчивость такого течения относительно различных трехмерных возмущений. Изучены два типа волнистости стенок: продольное и поперечное периодическое гофрирование. На первом этапе находится основное решение и проводится линеаризация исходных уравнений в окрестности этого решения. На втором этапе решается обобщенная задача определения собственных значений и анализируется весь возможный спектр возмущений. Варьируемыми параметрами являются число Рейнольдса, амплитуда, период и форма гофрирования. Возмущения полей скорости и давления в общем случае характеризуются двумя волновыми числами, которые являются дополнительными параметрами. Исследовано влияние параметров и формы волнистости стенок на область, в которой начинается ламинарно-турбулентный переход.

Ключевые слова: вязкое течение, гофрированные и волнистые стенки, устойчивость, ламинарно-турбулентный переход

Введение. Течение в каналах с гофрированными стенками встречается во многих технических приложениях [1–6], например в топливных элементах, компактных теплообменниках, устройствах охлаждения компонентов микроэлектроники и т. д. Изменение волнистости стенок является одним из способов управления одно- и двухфазными течениями в каналах и используется, например, для уменьшения сопротивления и задержки перехода к турбулентному режиму при обтекании крыльев [7–9]. Эффективность разделения нефти на фракции или воздуха на компоненты в дистилляционных колоннах, заполненных структурированными насадками, во многом определяется интенсивностью перемешивания пара в каналах насадки. На поверхности раздела фаз, формируемой при растекании по ней жидкой пленки, образуются волнистые структуры, расположенные вдоль течения паровой фазы [10–14]. При их наличии процесс перемешивания в паровой фазе может происходить более интенсивно.

Работа [3] является одной из первых работ, в которых численно исследовано стационарное ламинарное течение в канале со стенками, поверхность которых задается синусоидой большой амплитуды. Основной поток пересекал как гребни, так и впадины на поверхности стенки. Предсказанные в [3] отрывные структуры наблюдались в экспериментах [4]. В работах [15–17] при изучении течения в таком же канале установлено существование нестационарных колебаний отрывных зон. В [18–20] показана возможность

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-29-00507).

перехода к турбулентному режиму вследствие появления апериодических колебаний отрывных зон. Задача об устойчивости течения в канале, в случае когда основной поток пересекает гребни и впадины волнистой поверхности стенки, рассматривалась в работах [21–23]. Для случая поперечного гофрирования, когда основной поток не пересекает гребни и впадины волнистой поверхности стенки, устойчивость рассчитывалась в работах [7, 8, 24, 25]. В указанных выше работах устойчивость анализировалась в рамках нестационарного расчета, что предполагает "перебор" начальных данных. Как следствие, расчеты ограничивались вариацией параметров задачи в небольших диапазонах.

В настоящей работе при решении уравнений Навье — Стокса находится основное решение и проводится линеаризация исходных нелинейных уравнений в окрестности этого решения. Возмущения полей скорости и давления полагаются трехмерными с двумя волновыми числами. Далее, путем решения обобщенной задачи определения собственных значений анализируется весь возможный спектр возмущений. Это позволяет исследовать устойчивость в широком диапазоне параметров задачи. Математический и вычислительный аппарат исследования был разработан при изучении двухфазного течения на гладких и волнистых поверхностях [26–28] и адаптирован к решению задач, рассматриваемых в данной работе при других граничных условиях на верхней стенке и в отсутствие поверхности раздела.

Данная работа является продолжением работ [29, 30], в которых гофрированной являлась поверхность нижней стенки канала (поверхность верхней стенки была гладкой), причем форма гофрирования была синусоидальной. В настоящей работе исследуется линейная устойчивость течения в каналах с пятью различными формами гофрирования. Для каждого из пяти каналов рассмотрены два типа гофрирования: вдоль потока и поперек него. В зависимости от амплитуды, периода и формы гофрирования рассчитано критическое число Рейнольдса, при превышении которого основное течение становится неустойчивым и возникают нарастающие во времени трехмерные возмущения различного типа.

1. Основные уравнения. Течение жидкости между двумя горизонтальными гофрированными поверхностями, не ограниченными в x- и z-направлениях (рис. 1), описывается

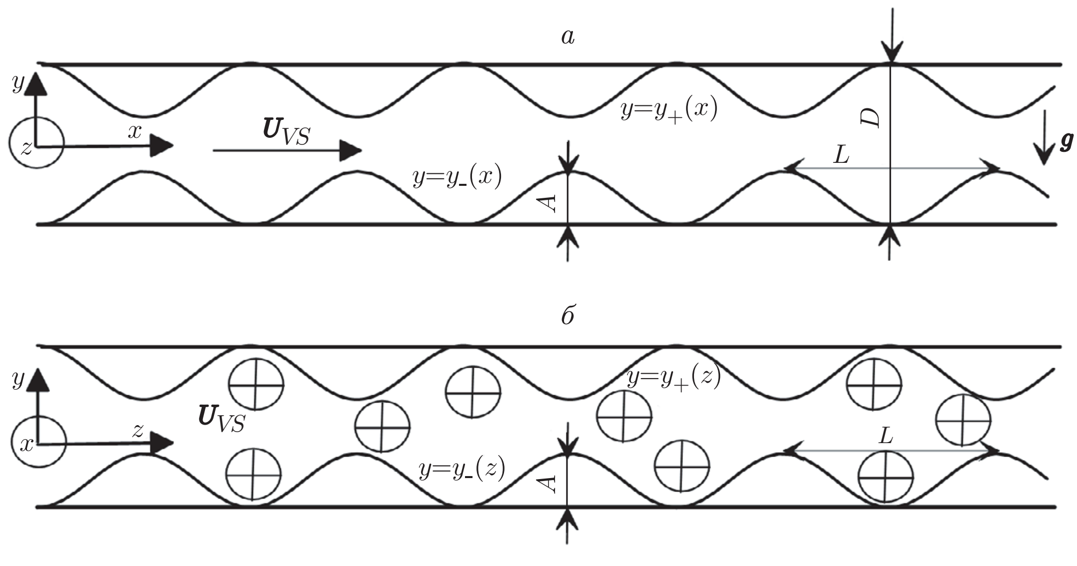


Рис. 1. Схемы расчетных областей:
а — гофрирование вдоль потока, *б* — гофрирование поперек потока

системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big); \tag{1}$$

$$\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\Big); \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big); \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{4}$$

$$u = v = w = 0, \qquad y = y_-(\zeta), \quad y = y_+(\zeta); \tag{5}$$

$$\Big\langle \int\limits_{y_-(\zeta)}^{y_+(\zeta)} u\,dy \Big\rangle = 1. \tag{6}$$

Здесь $x = x^*/L$, $y = 2y^*/D$, $z = z^*/L$, $t = u_0 t^*/L$ — безразмерные координаты и время; $u = u^*/u_0$, $v = v^*/(\varepsilon u_0)$, $w = w^*/u_0$, $P = (P^* + \rho g y^*)/(\rho u_0^2)$ — безразмерные компоненты скорости в x-, y- и z-направлениях и давление соответственно; индекс “$*$” соответствует размерным величинам; $\mathrm{Re} = u_0 D/(2\nu)$ — число Рейнольдса; $\varepsilon = D/(2L)$; L — период гофрирования; D — высота канала; $u_0 = 2U_{VS}$; U_{VS} — средняя по высоте канала скорость потока; $y_-(\zeta)$, $y_+(\zeta)$ — форма гофрирования нижней и верхней стенок соответственно; ν — кинематическая вязкость; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; $\langle\,\cdot\,\rangle$ — среднее в z-направлении.

Рассмотрены два типа гофрирования: вдоль потока и поперек него. В обоих случаях основной поток жидкости направлен вдоль оси x. В первом случае форма гофрирования стенки $y_\pm(\zeta)$ зависит от координаты x ($\zeta = x$), во втором случае — от координаты z ($\zeta = z$).

Верхняя и нижняя стенки являются периодическими либо в x-направлении для случая, показанного на рис. 1,*а*, либо в z-направлении для случая, показанного на рис. 1,*б*.

Из уравнения неразрывности (4) и условий прилипания (5) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_-(\zeta)}^{y_+(\zeta)} u\,dy - \frac{dy_+}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dx}\,u\big|_{y=y_+(\zeta)} + \frac{dy_-}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dx}\,u\big|_{y=y_-(\zeta)} + v\big|_{y=y_+(\zeta)} - v\big|_{y=y_-(\zeta)} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{y_-(\zeta)}^{y_+(\zeta)} w\,dy - \frac{dy_+}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz}\,w\big|_{y=y_+(\zeta)} + \frac{dy_-}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz}\,w\big|_{y=y_-(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{y_-(\zeta)}^{y_+(\zeta)} u\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{y_-(\zeta)}^{y_+(\zeta)} w\,dy = 0.$$

Отсюда в отсутствие среднего потока в z-направлении следует уравнение (6), которое в размерных переменных имеет вид

$$\Big\langle \int\limits_{y_-^*}^{y_+^*} u^*\,dy^* \Big\rangle = \mathrm{const} = U_{VS} D.$$

После выполнения преобразования координат $x = x$, $z = z$, $\eta = (y - f_+)/f_-$, где $f_+ = (y_+ + y_-)/2$; $f_- \equiv y_+ - f_+ = (y_+ - y_-)/2$; $\eta \in [-1, 1]$ — область течения в новых переменных, получаем уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} + (\tilde{u}\eta_\zeta + v\eta_y)\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \tilde{k}\eta_\zeta\,\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - Z + \\ + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta\,\partial \eta} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta})\,\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big)\Big]; \tag{7}$$

$$\varepsilon^2\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + (\tilde{u}\eta_\zeta + v\eta_y)\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big) = -\eta_y\,\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \\ + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta\,\partial \eta} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta})\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\Big)\Big]; \tag{8}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} + (\tilde{u}\eta_\zeta + v\eta_y)\,\frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - (1-\tilde{k})\eta_\zeta\,\frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta\,\partial \eta} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta})\,\frac{\partial w}{\partial \eta}\Big)\Big]; \tag{9}$$

$$v(t,x,z,\eta) = [\eta(f_-)_\zeta + (f_+)_\zeta]\tilde{u}(t,x,z,\eta) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_-\int\limits_{-1}^{\eta} u(t,x,z,\eta')\,d\eta'\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(f_-\int\limits_{-1}^{\eta} w(t,x,z,\eta')\,d\eta'\Big); \tag{10}$$

$$u(t,x,z,\eta) = w(t,x,z,\eta) = 0, \qquad \eta = -1, \qquad \eta = 1; \tag{11}$$

$$\Big\langle f_-(\zeta)\int\limits_{-1}^{1} u\,d\eta'\Big\rangle = 1. \tag{12}$$

Здесь $\zeta = x$ или $\zeta = z$; $\tilde{k} = 1$ или $\tilde{k} = 0$; $\tilde{u} = u$ или $\tilde{u} = w$; $P = Zx + \bar{P}$; $\eta_y = 1/f_-$; $\eta_\zeta = -[\eta(f_-)_\zeta + (f_+)_\zeta]/f_-$; $\eta_{\zeta\eta} = -(f_-)_\zeta/f_-$; $\eta_{\zeta\xi} = -(\eta_\zeta(f_-)_\zeta + \eta(f_-)_{\zeta\zeta} + (f_+)_{\zeta\zeta})/f_-$.

Далее рассматривается течение в каналах с пятью различными формами гофрирования стенки S_1–S_5 (рис. 2):

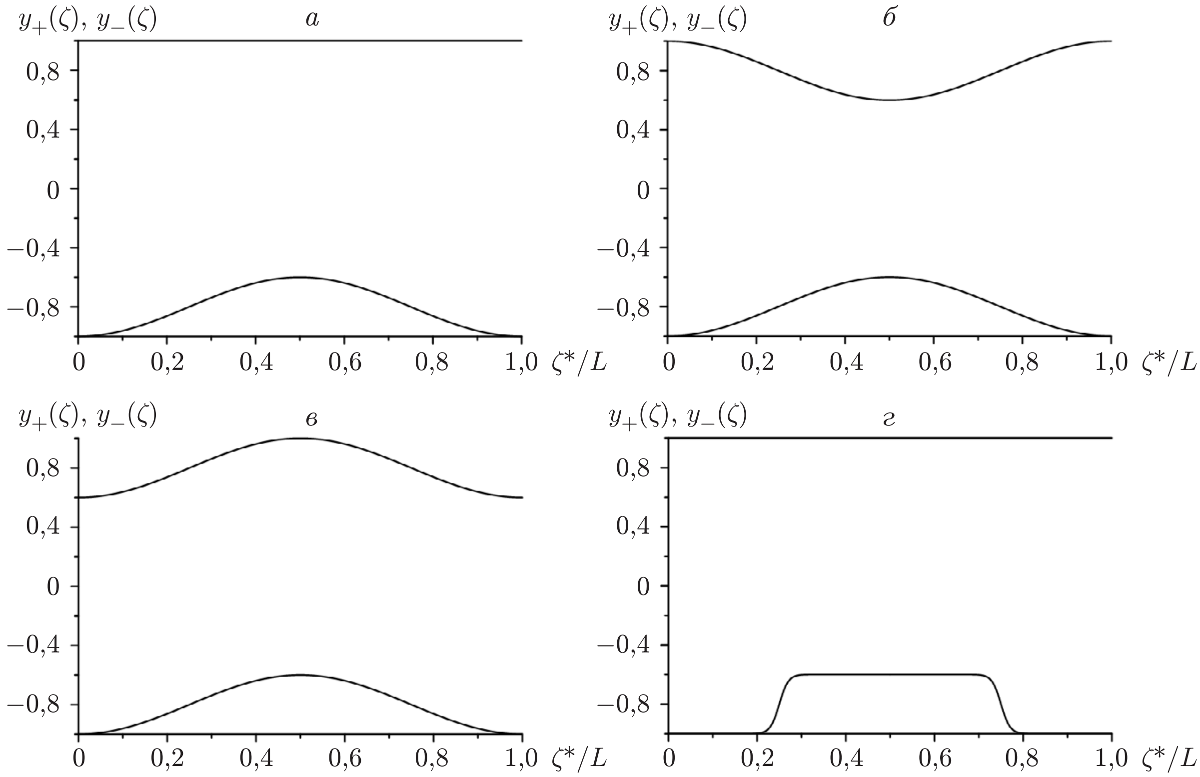
$$\mathrm{S}_1:\quad y_+ = 1, \quad y_- = -1 + \varepsilon_1 f(\zeta),$$

$$\mathrm{S}_2:\quad y_+ = 1 - \varepsilon_1 f(\zeta), \quad y_- = -1 + \varepsilon_1 f(\zeta),$$

$$\mathrm{S}_3:\quad y_+ = 1 - \varepsilon_1 f(\zeta + 1/2), \quad y_- = -1 + \varepsilon_1 f(\zeta),$$

$$\mathrm{S}_i,\ i = 4, 5:\quad y_+ = 1, \quad y_- = -1 + \varepsilon_1 \begin{cases} 1/(1 + \mathrm{e}^{-2\beta(\zeta + \zeta_i - 1/2)}), & \zeta < 1/2, \\ 1/(1 + \mathrm{e}^{-2\beta(-\zeta + \zeta_i + 1/2)}), & \zeta > 1/2. \end{cases}$$

Здесь $f(\zeta) = (1 - \cos(2\pi\zeta))/2$; $\varepsilon_1 = 2A/D$. В расчетах величины β, ζ_4, ζ_5 являются постоянными: $\beta = 50$, $\zeta_4 = 0{,}25$, $\zeta_5 = 0{,}05$. Величина ε_1, представляющая собой параметр задачи, варьируется в широком диапазоне (на рис. 2 $\varepsilon_1 = 0{,}4$). Для каждого из двух типов гофрирования (вдоль потока и поперек него) исследована устойчивость течения в каналах с формой поверхности S_1–S_5 при различных значениях числа Рейнольдса, периода и амплитуды гофрирования.



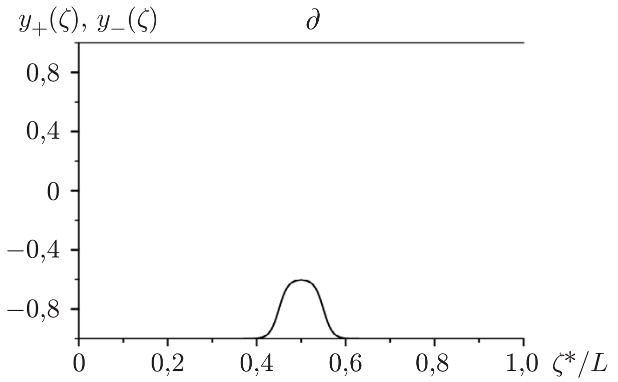


Рис. 2. Формы одного периода гофрированных стенок каналов S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*), S_4 (*г*), S_5 (*д*) при $\varepsilon_1 = 0{,}4$

Таким образом, в задаче имеются три параметра: ε, ε_1, Re и безразмерная функция $f(\zeta)$ для описания формы гофрирования. Ниже с использованием полиномов Чебышева и ряда Фурье получены стационарные решения уравнений (7)–(12).

Для каналов с гофрированием вдоль потока (см. рис. 1,*а*) основное течение имеет две компоненты скорости:

$$[u(x,z,\eta), v(x,z,\eta), w(x,z,\eta), \bar{P}(x,z,\eta), Z] = [u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z],$$

$$u_b(x,\eta) = \frac{1}{2}\,U_1(x) + \sum_{m=2}^{M} U_m(x) T_{m-1}(\eta),$$

$$U_m(x) = U_m^0 + \sum_{k=-N/2+1,\ k\neq 0}^{N/2-1} U_m^k\, \mathrm{e}^{2\pi i k x}, \qquad (U_m^{-k})^{\text{к.с}} = U_m^k, \qquad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $T_m(\eta)$ — полиномы Чебышева; индекс “к.с” означает комплексное сопряжение.

При известной аппроксимации продольной скорости $u_b(x,\eta)$ вторая компонента скорости $v_b(x,\eta)$ однозначно определяется уравнением (10), а поле давления $\bar{P}_b(x,\eta)$ — уравнением (8):

$$\bar{P}_b(x,\eta) = \bar{P}_b^0(x) + f_-(x)\int\limits_{-1}^{\eta}\Big\{ -\varepsilon^2\Big(u_b\,\frac{\partial v_b}{\partial x} + (u_b\eta_x + v_b\eta_y)\,\frac{\partial v_b}{\partial \eta'}\Big) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} + \eta_x^2\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial \eta'^2} + 2\eta_x\,\frac{\partial^2 v_b}{\partial x\,\partial \eta'} + (\eta_{x\xi} + \eta_x\eta_{x\eta})\,\frac{\partial v_b}{\partial \eta'}\Big)\Big]\Big\}\,d\eta',$$

$$\bar{P}_b^0(x) = \sum_{k=-N/2+1,\ k\neq 0}^{N/2-1} (\bar{P}_b^0)^k\,\mathrm{e}^{2\pi i k x}, \qquad ((\bar{P}_b^0)^{-k})^{\text{к.с}} = (\bar{P}_b^0)^k.$$

В случае гофрирования вдоль потока (см. рис. 1,a) общее число неизвестных в уравнениях (7)–(12) составляет $(M+1)(N-1)$, включая $M(N-1)$ гармоник поля скорости $u_b(x,\eta)$, градиент давления Z и $N-2$ гармоник $\bar{P}_b^0(x)$. Для решения задачи задается начальное приближение U_m^k, Z, $(\bar{P}_b^0)^k$. В качестве начального приближения может быть использовано решение Пуазейля для случая течения в гладком канале. За счет увеличения амплитуды гофрирования и изменения значений других параметров находятся решения для каналов с волнистыми стенками. Для уточнения начального приближения используются итерационный метод Ньютона и уравнения (7), (11), (12). Производные и интегралы в уравнениях (7)–(12) рассчитываются в (n,m)-пространстве с использованием стандартных библиотечных процедур для рядов Фурье и полиномов Чебышева. Матрица Якоби в методе Ньютона рассчитывается по разностной схеме первого порядка. На каждой итерации методом исключения решается система линейных уравнений с использованием стандартных библиотечных процедур. С учетом граничных условий прилипания (11) исходная система уравнений переопределена. Для определения $(M+1)(N-1)$ неизвестных имеем $(M+3)(N-1)$ уравнений в (n,m)-пространстве — уравнения (7), (11). Далее отбрасываются $2(N-1)$ уравнений, соответствующих последним двум полиномам Чебышева в разложении уравнения (7), аналогично тому как это сделано, например, в работах [26–29] с использованием спектрального метода. Полученные результаты справедливы в случае удовлетворительной аппроксимации функции $u_b(x,\eta)$ рядом Фурье и полиномами Чебышева. Условия $|U_m^{N/2-1}|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех m и $|U_M^k|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ для всех k выполнялись при соответствующем увеличении параметров N и M при движении по параметрам задачи.

Для каналов с гофрированием поперек потока (см. рис. 1,$б$) основное течение имеет одну компоненту скорости:

$$[u(x,z,\eta), v(x,z,\eta), w(x,z,\eta), \bar{P}(x,z,\eta), Z] = [u_b(x,\eta), 0, 0, 0, Z],$$

$$u_b(z,\eta) = \frac{1}{2}\,U_1(z) + \sum_{m=2}^{M} U_m(z) T_{m-1}(\eta),$$

$$U_m(z) = U_m^0 + \sum_{k=-N/2+1,\ k\neq 0}^{N/2-1} U_m^k\,\mathrm{e}^{2\pi i k z}, \qquad (U_m^{-k})^{\text{к.с}} = U_m^k, \qquad m = 1,\dots,M.$$

В данном случае общее число неизвестных в уравнениях (7)–(12) составляет $M(N-1)$, включая $M(N-2)$ гармоник поля скорости $u_b(x,\eta)$ и градиент давления Z. Для решения задачи задается начальное приближение U_m^k, Z. Далее для уточнения начального приближения используются итерационный метод Ньютона и уравнения (7), (11), (12).

Подставляя величины

$$u = u_b(\zeta,\eta) + \hat u(x,\eta,z)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}, \qquad v = v_b(\zeta,\eta) + \hat v(x,\eta,z)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.},$$

$$w = \hat w(x,\eta,z)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}, \qquad P = P_b(\zeta,\eta) + \hat P(x,\eta,z)\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + \text{к. с.}$$

(к. с. — комплексно-сопряженная величина) в уравнения (7)–(12) и линеаризуя их в окрестности основного решения, получаем систему уравнений с периодическими коэффициентами для нахождения спектра собственных значений и решения задачи о линейной устойчивости стационарного решения:

$$\hat v(x,z,\eta) = [\eta(f_-)_\zeta + (f_+)_\zeta]\tilde u(x,z,\eta) - {}$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{\eta} \hat u(x,z,\eta')\,d\eta'\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{\eta} \hat w(x,z,\eta')\,d\eta'\Big); \qquad (13)$$

$$\eta_y(\hat P - \hat P_0) = \int\limits_{-1}^{\eta} \Big\{\gamma\varepsilon^2\hat v + \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat v}{\partial\eta'^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat v}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat v}{\partial z^2} + {}$$
$$+ \varepsilon^2\Big(\eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2\hat v}{\partial\eta'^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2\hat v}{\partial\zeta\,\partial\eta'} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta'})\,\frac{\partial\hat v}{\partial\eta'}\Big)\Big] - {}$$
$$- \varepsilon^2\Big(u_b\,\frac{\partial\hat v}{\partial x} + (\tilde u_b\eta_\zeta + v_b\eta_y)\,\frac{\partial\hat v}{\partial\eta'} + \hat u\,\frac{\partial v_b}{\partial x} + (\tilde u\eta_\zeta + \hat v\eta_y)\,\frac{\partial v_b}{\partial\eta'}\Big)\Big\}\,d\eta'; \qquad (14)$$

$$-\gamma\hat u = -\frac{\partial\,(\hat P - \hat P_0)}{\partial x} - \frac{\partial\hat P_0}{\partial x} - \tilde k\eta_\zeta\,\frac{\partial\,(\hat P - \hat P_0)}{\partial\eta} + {}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat u}{\partial\eta^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat u}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat u}{\partial z^2} + \varepsilon^2\Big(\eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2\hat u}{\partial\eta^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2\hat u}{\partial\zeta\,\partial\eta} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta})\,\frac{\partial\hat u}{\partial\eta}\Big)\Big] - {}$$
$$- \Big(u_b\,\frac{\partial\hat u}{\partial x} + (\tilde u_b\eta_\zeta + v_b\eta_y)\,\frac{\partial\hat u}{\partial\eta} + \hat u\,\frac{\partial u_b}{\partial x} + (\tilde u\eta_\zeta + \hat v\eta_y)\,\frac{\partial u_b}{\partial\eta}\Big); \qquad (15)$$

$$-\gamma\hat w = -\frac{\partial\,(\hat P - \hat P_0)}{\partial z} - \frac{\partial\hat P_0}{\partial z} - (1-\tilde k)\eta_\zeta\,\frac{\partial\hat P}{\partial\eta} + {}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon\,\mathrm{Re}}\Big[\eta_y^2\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial\eta^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial x^2} + \varepsilon^2\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial z^2} + \varepsilon^2\Big(\eta_\zeta^2\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial\eta^2} + 2\eta_\zeta\,\frac{\partial^2\hat w}{\partial\zeta\,\partial\eta} + (\eta_{\zeta\xi} + \eta_\zeta\eta_{\zeta\eta})\,\frac{\partial\hat w}{\partial\eta}\Big)\Big] - {}$$
$$- \Big(u_b\,\frac{\partial\hat w}{\partial x} + (\tilde u_b\eta_\zeta + v_b\eta_y)\,\frac{\partial\hat w}{\partial\eta}\Big); \qquad (16)$$

$$\hat u(x,\eta) = \hat w(x,\eta) = 0, \qquad \eta = -1, \quad \eta = 1; \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{1} \hat u\,d\eta'\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(f_- \int\limits_{-1}^{1} \hat w\,d\eta'\Big) = 0. \qquad (18)$$

Здесь $\tilde u_b = u_b$ или $\tilde u_b = w_b$; $\tilde u = \hat u$ или $\tilde u = \hat w$; $\hat P_0(x,z) = \hat P(x,z,\eta)|_{\eta=-1}$ — возмущенное давление на нижней стенке.

В соответствии с теоремой Флоке решения линейной системы уравнений с периодическими коэффициентами могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(x,z,\eta) \\ \hat{w}(x,z,\eta) \\ \hat{P}_0(x,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_1^k \, \mathrm{e}^{2\pi i k\zeta} + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(\eta) \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_m^k \, \mathrm{e}^{2\pi i k\zeta} \\ \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_1^k \, \mathrm{e}^{2\pi i k\zeta} + \sum\limits_{m=2}^{M} T_{m-1}(\eta) \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_m^k \, \mathrm{e}^{2\pi i k\zeta} \\ \sum\limits_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{P}_0^k \, \mathrm{e}^{2\pi i k\zeta} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2\pi i(Qx+Q_z z)} \qquad (19)$$

(Q, Q_z — положительные вещественные параметры). Для канала с гофрированием вдоль потока (см. рис. 1,*а*) Q является параметром Флоке Q_F: $Q_F = Q \in [0, 0{,}5]$, для канала с гофрированием поперек потока (см. рис. 1,*б*) Q_z является параметром Флоке: $Q_F = Q_z \in [0, 0{,}5]$.

В результате задача сводится к обобщенной задаче определения собственных значений для комплексных матриц общего вида

$$A\hat{x} = \gamma B\hat{x}, \qquad \hat{x} = (\hat{U}_m^k, \hat{W}_m^k, \hat{P}_0^k)^{\mathrm{т}}. \qquad (20)$$

Матрицы A, B имеют размерность $(2M+1)(N-1)$ в случае $Q+Q_z \neq 0$ и $(2M+1)(N-1)-1$ в случае $Q+Q_z = 0$. Элементы этих матриц определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений $\hat{u}$, $\hat{w}$, $\hat{P}_0$ и подстановки их в уравнения (13)–(18). Для каждого такого вектора поле $\hat{v}(x,z,\eta)$ однозначно определяется уравнением (13), а поле $\hat{P}(x,z,\eta)$ — уравнениями (13), (14). Далее отбрасываем $2(N-1)$ уравнений, соответствующих последним двум полиномам Чебышева в разложении уравнений (15), (16), и вместо них используем условия прилипания (17). Уравнение (18) используется для определения $\hat{P}_0(x,z)$. Получаемые результаты справедливы в случае удовлетворительной аппроксимации функций $\hat{u}$, $\hat{w}$, $\hat{P}_0$. Условия $|\hat{U}_m^{N/2-1}|/\sup|\hat{U}_m^k| < 10^{-3}$ для всех m и $|\hat{U}_M^k|/\sup|\hat{U}_m^k| < 10^{-3}$ для всех k выполняются при соответствующем увеличении параметров N и M при движении по параметрам задачи (аналогичные условия выполняются для полей $\hat{w}$ и $\hat{P}_0$). Обобщенная задача определения собственных значений для комплексных матриц общего вида решалась численно с использованием стандартной библиотечной процедуры QZ-алгоритма, аналогично тому как это сделано, например, в работах [26–30], посвященных исследованию устойчивости.

В общем случае возмущения (19) имеют две несоизмеримые длины волны $\lambda_1^* = L$, $\lambda_2^* = L/Q_F$ в ζ-направлении ($\zeta = x$ или $\zeta = z$) и одну длину волны L/Q_z или L/Q в поперечном направлении. Для исследования устойчивости стационарного решения необходимо проанализировать $(2M+1)(N-1)$ собственных чисел задачи (20), варьируя волновые числа возмущений $\alpha = 2\pi Q\varepsilon$ и $\alpha_z = 2\pi Q_z\varepsilon$. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волновых чисел. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю: $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$.

Следует отметить, что при $Q+Q_z = 0$ возмущения являются выделенными. Такие возмущения являются периодическими в ζ-направлении, их длина волны совпадает с периодом гофрирования стенки. Рост возмущений при $Q+Q_z = 0$ свидетельствует о переходе к режиму течения с более сложным, чем в режиме основного течения, характером изменения во времени.

Для тестирования алгоритма решения задачи (20) в работах [29, 30] были воспроизведены расчеты, выполненные в работах [17, 21, 31]. В работе [31] рассматривалась устойчивость течения жидкости в канале с гладкими стенками, в [17, 21] исследовалось течение в канале с двумя стенками, поверхность которых задается синусоидой ($\varepsilon = 0{,}36$, $\varepsilon_1 = 0{,}70$). Проведенное в работах [29, 30] сопоставление полученных результатов с данными работ [17, 21, 31] показывает, что они хорошо согласуются, и свидетельствует о корректности численного алгоритма решения задачи (20).

2. Результаты расчетов. Ниже приводятся результаты расчетов параметров течения при различных направлениях гофрирования стенки канала.

2.1. *Продольное гофрирование.* На первом этапе была исследована устойчивость стационарного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$ относительно периодических возмущений с $Q = Q_z = 0$ (длина волны этих возмущений равна периоду основного решения L). В задаче имеется три параметра: $2A/D$, $D/(2L)$ и число Рейнольдса или ε_1, ε, Re. Устойчивость решений изучалась в диапазоне значений параметра $2A/D = 0{,}001 \div 0{,}400$. В этом диапазоне рассматривались четыре точки. Исследование проводилось в диапазоне значений числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100 \div 10\,000$ с шагом, равным 200. При изменении параметра $D/(2L)$ в диапазоне $0{,}05 \div 1{,}25$ с шагом 0,05 решалась задача (20) для параметров ε_1, ε, Re и анализировался спектр собственных значений γ. В случае смены знака $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ методом деления пополам уточнялось значение параметра $D/(2L)$ и строились нейтральные кривые (рис. 3). На этих кривых вещественная часть одного из собственных значений обращается в нуль: $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$ при $Q = Q_z = 0$. Для четырех значений $2A/D$ данные кривые ограничивают область параметров $(D/(2L), \mathrm{Re}) \in \Omega^i_{Q=Qz=0}$, $i = 1, \ldots, 4$, в которой основное течение является неустойчивым относительно двумерных возмущений с $Q = Q_z = 0$. Значения параметров находятся справа от соответствующих линий. Кривые *1–4* на рис. 3 построены для пяти различных форм гофрирования стенки S_1–S_5 (см. рис. 2). При малом значении амплитуды гофрирования (линии *1* на рис. 3) нейтральные кривые для форм гофрирования стенки канала S_1–S_5 подобны и представляют собой объединение области $(D/(2\lambda^*), \mathrm{Re})$ и областей “неустойчивых субгармоник” $(D/(4\lambda^*), \mathrm{Re})$, $(D/(6\lambda^*), \mathrm{Re}), \ldots$ ($\lambda^*(\mathrm{Re})$ — длина волны нейтрального возмущения в случае течения Пуазейля в гладком канале [31]). Такое объединение впервые было выявлено в работе [29] для канала с синусоидальной формой гофрирования стенок S_1. С увеличением амплитуды гофрирования области $\Omega^i_{Q=Qz=0}$ (линии *2–4* на рис. 3) распространяются в области меньших значений как числа Рейнольдса, так и периода гофрирования L и объединяются в одну область. Заметим также, что существуют параметры гофрирования, при которых основное течение устойчиво относительно возмущений с $Q = Q_z = 0$ вплоть до наибольших чисел Рейнольдса, рассмотренных в работе. Например, для значений амплитуды гофрирования $2A/D \leqslant 0{,}2$ (линии *1–3* на рис. 3) течение вдоль каналов различной формы с периодом гофрирования $D/(2L) \geqslant 0{,}35$ устойчиво относительно двумерных возмущений с $Q = Q_z = 0$ вплоть до $\mathrm{Re} \approx 10^4$ (исключение составляет линия *3* для формы гофрирования S_5 на рис. 3).

Можно сделать вывод, что форма и амплитуда гофрирования как количественно, так и качественно изменяют ход нейтральной кривой (см. рис. 3). Например, сравним случаи S_1 и S_5 (см. рис. 2). Заметим, что случай S_5 моделирует совместное течение газа и волновой пленки жидкости в горизонтальном канале. Линии *3* и *4*, соответствующие этим случаям, качественно различны, линии *1* и *2* различаются количественно.

На втором этапе исследовалась устойчивость стационарного решения $[u_b(x,\eta), v_b(x,\eta), 0, \bar{P}_b(x,\eta), Z]$ по отношению к двумерным возмущениям с конечными значениями параметра Флоке $Q \in [0{,}001, 0{,}500]$ ($Q_z = 0$). Рассматривался тот же диапазон значений амплитуды гофрирования и числа Рейнольдса, что и при изучении устойчивости по отношению к возмущениям с $Q = Q_z = 0$. На рис. 4 представлены

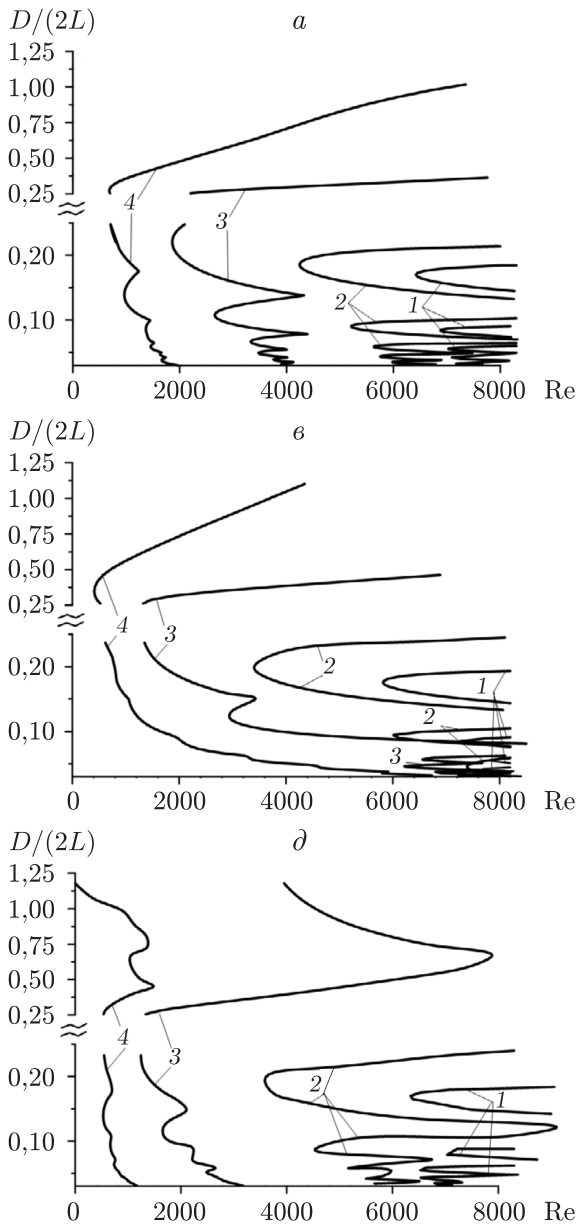


Рис. 3. Нейтральные кривые для задачи об устойчивости течения в канале с продольным гофрированием формы S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*), S_4 (*г*), S_5 (*д*) относительно двумерных возмущений ($Q = Q_z = 0$):
1 — $2A/D = 0{,}05$, *2* — $2A/D = 0{,}1$, *3* — $2A/D = 0{,}2$, *4* — $2A/D = 0{,}4$

нейтральные кривые для задачи об устойчивости течения в канале с продольным гофрированием различной формы относительно двупериодических двумерных возмущений. При расчетах устойчивости для каждого значения параметра $D/(2L)$, который менялся в диапазоне $0{,}05 \div 1{,}25$ с шагом 0,05, вычислялось значение параметра Флоке, при котором значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было минимальным. При больших значениях числа Рейнольдса такое значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было отрицательным и для каждого набора ε_1, ε, Re существовал диапазон значений параметра Флоке с неустойчивыми плоскими возмущениями. При малых значениях числа Рейнольдса такое значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было положительным и основное решение с набором параметров ε_1, ε, Re было устойчивым относительно всех возмущений с конечными значениями Q ($Q_z = 0$). Для линий *1–4* на рис. 4 как $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$, так и $\partial\,\mathrm{Real}\,(\gamma)/\partial Q = 0$. Эти линии ограничивают области параметров $\Omega^i_{Q\neq 0,\ Q_z=0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 1, \ldots, 4$ (значения параметров находятся справа от соответствующих линий), в кото-

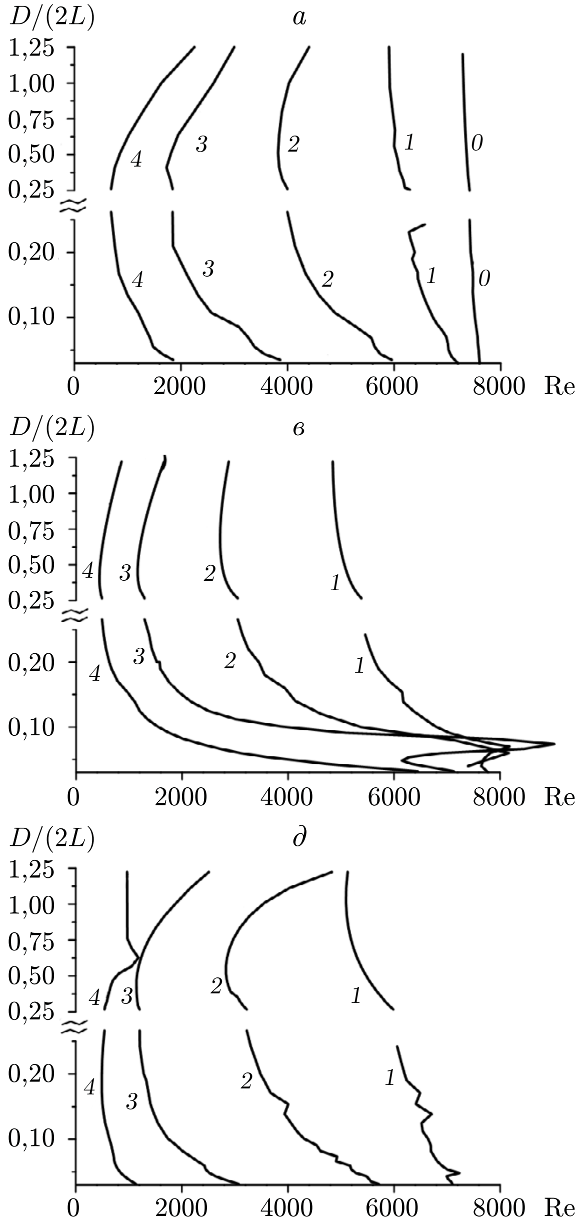


Рис. 4. Нейтральные кривые для задачи об устойчивости течения в канале с продольным гофрированием формы S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*), S_4 (*г*), S_5 (*д*) относительно двупериодических двумерных возмущений $Q \neq 0$, $Q_z = 0$:
0 — $2A/D = 0{,}02$, *1* — $2A/D = 0{,}05$, *2* — $2A/D = 0{,}1$, *3* — $2A/D = 0{,}2$, *4* — $2A/D = 0{,}4$

рых основное течение является неустойчивым относительно двупериодических плоских возмущений с конечными значениями параметра Q ($Q_z = 0$). Эти области значительно больше соответствующих областей устойчивости относительно плоских периодических возмущений с $Q = Q_z = 0$. В целом можно сделать вывод, что форма гофрирования не меняет вид нейтральных кривых на рис. 4.

Далее исследовалась устойчивость относительно трехмерных возмущений (19) при различных значениях параметра Q_z ($Q = 0$). В этом случае возмущения скорости имеют три компоненты. Линии *1–4* на рис. 5 ограничивают области $\Omega^i_{Q=0,\,Q_z\neq 0}(D/(2L), \mathrm{Re})$, $i = 1, \ldots, 4$ (значения параметров находятся справа от соответствующих линий), в которых существуют нарастающие во времени пространственные возмущения с конечными значениями параметра Q_z ($Q = 0$). Для этих линий как $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$, так и $\partial\,\mathrm{Real}\,(\gamma)/\partial Q_z = 0$. При расчетах устойчивости для каждого значения параметра $D/(2L)$

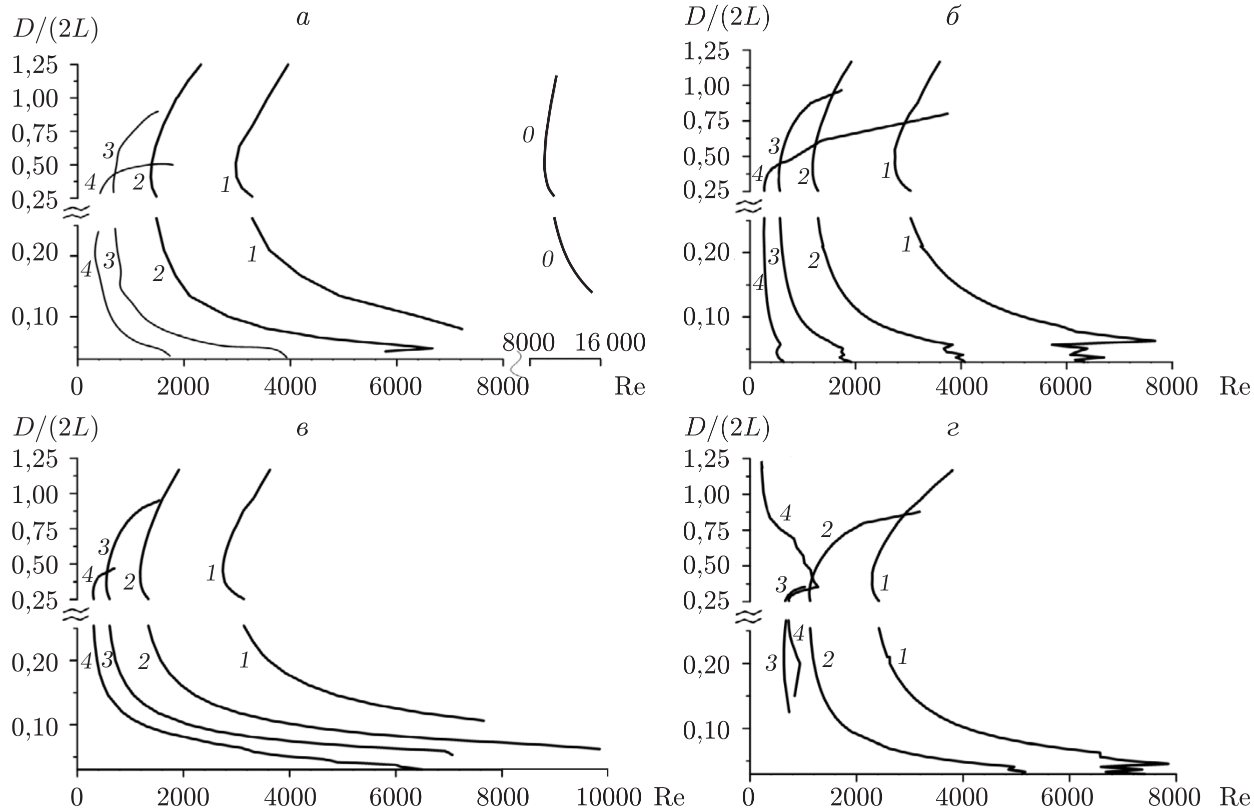


Рис. 5. Нейтральные кривые для задачи об устойчивости течения в канале с продольным гофрированием формы S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*), S_4 (*г*) относительно двупериодических трехмерных возмущений $Q_z \neq 0$, $Q = 0$:
0 — $2A/D = 0{,}02$, *1* — $2A/D = 0{,}05$, *2* — $2A/D = 0{,}1$, *3* — $2A/D = 0{,}2$, *4* — $2A/D = 0{,}4$

вычислялось значение параметра Q_z, при котором значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было минимальным. При уменьшении амплитуды гофрирования линии на рис. 5 смещаются в область больших чисел Рейнольдса для всех рассмотренных форм гофрирования. Результаты сравнения рис. 4 и 5 позволяют сделать вывод, что с точки зрения устойчивости течения вдоль канала трехмерные возмущения с конечными значениями параметра Q_z ($Q = 0$) являются более опасными, чем двумерные. Сравнение проводилось для одинаковых форм и параметров гофрирования. Неустойчивость по отношению к трехмерным возмущениям возникает при меньшем значении числа Рейнольдса. При малых значениях амплитуды гофрирования двумерные возмущения становятся более опасными (линия *0* рис. 4,*а*, 5,*а*).

2.2. *Поперечное гофрирование.* На первом этапе была исследована устойчивость стационарного решения $[u_b(z,\eta), 0, 0, 0, Z]$ относительно периодических возмущений с $Q = Q_z = 0$ (длина волны таких возмущений равна периоду основного решения L). Неустойчивость основного течения к таким возмущениям означает невозможность его реализации при рассматриваемых параметрах и свидетельствует о переходе к режиму течения с более сложным, чем в режиме основного течения, характером изменения во времени. В задаче имеется три параметра: A/L, $D/(2L)$ и число Рейнольдса или ε_1, ε, Re ($A/L = \varepsilon_1\varepsilon$). Эти параметры выбирались такими же, как при исследовании устойчивости течения в канале с продольным гофрированием.

На втором этапе исследовалась устойчивость течения относительно возмущений с конечными значениями параметра Флоке $Q_z \in [0, 0{,}5]$ ($Q = 0$). Шаг по этому параметру

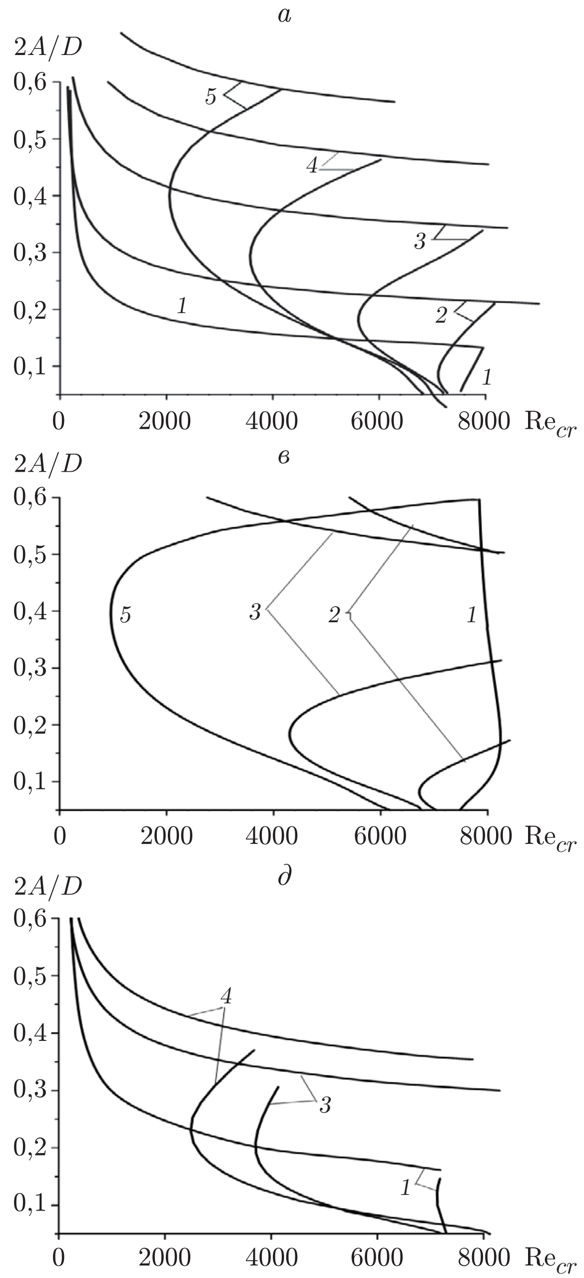


Рис. 6. Нейтральные кривые для задачи об устойчивости течения в канале с поперечным гофрированием формы S_1 (*а*), S_2 (*б*), S_3 (*в*), S_4 (*г*), S_5 (*д*) относительно трехмерных возмущений $Q > 0$ $(Q_z = 0)$:
1 — $A/L = 0{,}05$, *2* — $A/L = 0{,}1$, *3* — $A/L = 0{,}2$, *4* — $A/L = 0{,}3$, *5* — $A/L = 0{,}4$

составлял 0,01. Расчеты были проведены для пяти различных форм поперечного гофрирования стенки S_1–S_5 (см. рис. 2). Установлено, что в исследованном диапазоне параметров стационарное течение $[u_b(z,\eta), 0, 0, 0, Z]$ в каналах S_1–S_5 с поперечным гофрированием устойчиво по отношению к возмущениям как с $Q_z = 0$ $(Q = 0)$, так и с конечными значениями Q_z $(Q = 0)$.

Далее исследовалась устойчивость относительно продольных возмущений (19) при различных значениях параметра Q $(Q_z = 0)$. Линии *1*–*5* на рис. 6 ограничивают области $\Omega^i_{Q>0,\ Q_z=0}(2A/D, \mathrm{Re})$, $i = 1, \ldots, 5$ (значения параметров находятся справа от соответствующих линий), в которых существуют нарастающие во времени пространственные возмущения с конечными значениями параметра Q $(Q_z = 0)$. Для этих линий как $\mathrm{Real}\,(\gamma) = 0$, так и $\partial \,\mathrm{Real}\,(\gamma)/\partial Q = 0$. При расчетах устойчивости для каждого значения параметра $2A/D$ вычислялось значение параметра Q, при котором значение $\mathrm{Real}\,(\gamma)$ было минимальным. В результате для пяти различных форм поперечного гофрирования стенки S_1–S_5 (см. рис. 2) были построены нейтральные кривые (линии *1–5* на рис. 6).

Можно сделать вывод, что форма и параметры поперечного гофрирования как количественно, так и качественно изменяют ход нейтральной кривой (см. рис. 6). Среди случаев гофрирования S_1–S_5, рассмотренных в данной работе, кривые нейтральной устойчивости для поверхности с формой гофрирования S_3 наиболее существенно отличаются от соответствующих кривых для случая S_1. Для каждого рассмотренного значения $A/L \in [0{,}05 \div 0{,}40]$ обнаружены две области значений параметра $2A/D \in [0{,}05 \div 0{,}60]$, в которых зависимости критического числа Рейнольдса от амплитуды гофрирования качественно различны: 1) $2A/D < (2A/D)^*$; 2) $2A/D > (2A/D)^*$. В первой области зависимость $\mathrm{Re}_{cr}(A/L, 2A/D)$ от параметра $2A/D$ является немонотонной, во второй области вплоть до малых значений $\mathrm{Re}_{cr} \approx 100 \div 200$ зависимость $\mathrm{Re}_{cr}(A/L, 2A/D)$ монотонно убывает при увеличении $2A/D$. Величина $(2A/D)^*$ зависит только от параметра A/L и увеличивается с его ростом. Значения этой величины были вычислены для шести значений $A/L = 0{,}05$; $0{,}10$; $0{,}20$; $0{,}25$; $0{,}30$; $0{,}40$ и пяти различных форм гофрирования $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_5$.

Заключение. С использованием полных уравнений Навье — Стокса рассмотрена линейная устойчивость плоского течения в канале с гофрированными стенками. В рамках единого подхода исследованы два типа гофрирования: вдоль потока (основное течение имеет две компоненты скорости) и поперек потока (основное течение имеет одну компоненту скорости). В широком диапазоне значений числа Рейнольдса и параметров гофрирования проанализированы нейтральные кривые для задачи линейной устойчивости. В зависимости от параметров и формы гофрирования рассчитано критическое число Рейнольдса Re_{cr}, при превышении которого основное течение неустойчиво и существуют нарастающие во времени возмущения.

В случае продольного гофрирования найдены параметры, при которых основное стационарное течение неустойчиво по отношению к плоским периодическим возмущениям и переходит в режим с более сложным характером изменения во времени. При малых значениях амплитуды гофрирования области таких параметров $(D/(2L), \mathrm{Re})$ для каналов различной формы близки и представляют собой формальное объединение области неустойчивости гладкого канала $(D/(2\lambda^*), \mathrm{Re})$ и областей “неустойчивых субгармоник” $(D/(4\lambda^*), \mathrm{Re})$, $(D/(6\lambda^*), \mathrm{Re})$, $(D/(8\lambda^*), \mathrm{Re})$, ... При увеличении амплитуды гофрирования формальное объединение трансформируется в одну область $(D/(2L), \mathrm{Re})$. Форма и амплитуда гофрирования как количественно, так и качественно влияют на эту трансформацию.

Исследована также устойчивость по отношению к более общим плоским возмущениям с конечным значением параметра Флоке и к пространственным возмущениям.

В случае поперечного гофрирования установлено, что основное стационарное течение устойчиво по отношению к плоским как периодическим, так и двупериодическим (конечное значение параметра Флоке) возмущениям при всех рассмотренных формах и параметрах гофрирования вплоть до наибольших значений числа Рейнольдса. Проанализирована устойчивость течения по отношению к пространственным возмущениям для каждого значения A/L, рассмотренного в работе. Обнаружены две области значений параметра $2A/D$, в которых зависимости для критического числа Рейнольдса качественно различны.

Автор выражает благодарность А. З. Квон и Ю. С. Апостол за обсуждение работы и помощь при ее оформлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Boiko A. V.** Physics of transitional shear flows / A. V. Boiko, A. V. Dovgal, G. R. Grek, V. V. Kozlov. Berlin: Springer, 2011.
2. **Goldstein D. B., Tuan T.-C.** Secondary flow induced by riblets // J. Fluid Mech. 1998. V. 363. P. 115–151.
3. **Sobey I. J.** On flow through furrowed channels. Pt 1. Calculated flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96, N 1. P. 1–26.
4. **Stepanoff K. D., Sobey I. J., Bellhouse B. J.** On flow through furrowed channels. Pt 2. Observed flow patterns // J. Fluid Mech. 1980. V. 96, N 1. P. 27–32.
5. **Sparrow E. M., Hossfeld L. M.** Effect of rounding of protruding edges on heat transfer and pressure drop in a duct // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. P. 1715–1723.
6. **Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M.** Physics and applications of microfluidics in biology // Annual Rev. Biomed. Engng. 2002. V. 4, N 1. P. 261–286.
7. **Бойко А. В.** Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью / А. В. Бойко, Н. В. Клюшнев, Ю. М. Нечепуренко. М.: Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша, 2016.
8. **Григорьев О. А., Клюшнев Н. В.** Устойчивость течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 4. С. 595–606.
9. **Зверков И. Д., Крюков А. В.** Воздействие на пограничный слой крыла малоразмерного летательного аппарата с помощью волнистой поверхности. Проблемы и перспективы (Обзор) // ПМТФ. 2021. Т. 62, № 3. С. 180–198.
10. **Kistle S. F.** Liquid film coating / S. F. Kistle, P. M. Schweizer. N. Y.: Chapman and Hall, 1997.
11. **Weinstein S. J., Ruschak K. J.** Coating flows // Annual Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 29–53.
12. **De Santos J. M., Melli T. R., Scriven L. E.** Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // Annual Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 233–260.
13. **Trifonov Y. Y.** Modeling of mixture separation in column with structured packing // Multiphase Sci. Technol. 2022. V. 34, N 1. P. 23–51.
14. **Kachanov Y. S.** Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // Annual Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 411–482.
15. **Nishimura T., Ohori Y., Kawamura Y.** Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Engng Japan. 1984. V. 17, N 5. P. 466–471.
16. **Nishimura T., Ohori Y., Kajimoto Y., Kawamura Y.** Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // J. Chem. Engng Japan. 1985. V. 18, N 6. P. 550–555.
17. **Nishimura T., Murakami S., Arakawa S., Kawamura Y.** Flow observations and mass transfer characteristics in symmetrical wavy-walled channels at moderate Reynolds numbers for steady flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1990. V. 33. P. 835–845.
18. **Guzman A. M., Amon C. H.** Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle — Takens — Newhouse scenario // Phys. Fluids. 1994. V. 6, N 6. P. 1994–2002.
19. **Guzman A. M., Amon C. H.** Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regimes in converging-diverging channels // J. Fluid Mech. 1996. V. 321. P. 25–57.
20. **Amon C. H., Guzman A. M., Morel B.** Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging-diverging channel flows // Phys. Fluids. 1996. V. 8, N 5. P. 1192–1206.
21. **Cho K. J., Kim M.-U., Shin H. D.** Linear stability of two-dimensional steady flow in wavy-walled channels // Fluid Dynamics Res. 1998. V. 23, N 6. P. 349–370.

22. **Cabal A., Szumbarski J., Floryan J. M.** Stability of flow in a wavy channel // J. Fluid Mech. 2002. V. 457. P. 191–212.
23. **Floryan J. M., Floryan C.** Traveling wave instability in a diverging-converging channel // Fluid Dynamics Res. 2010. V. 42, N 2. 025509.
24. **Szumbarski J.** Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls // J. Theor. Appl. Mech. 2007. V. 45, N 3. P. 659–683.
25. **Yadav N., Gepner S. W., Szumbarski J.** Instability in a channel with grooves parallel to the flow // Phys. Fluids. 2017. V. 29, N 10. 084104.
26. **Trifonov Y. Y.** Stability of a film flowing down an inclined corrugated plate: The direct Navier — Stokes computations and Floquet theory // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 114101.
27. **Schörner M., Reck D., Aksel N., Trifonov Y.** Switching between different types of stability isles in films over topographies // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 423–436.
28. **Трифонов Ю. Я.** Волны на стекающих пленках жидкости. Расчет устойчивости к произвольным двумерным возмущениям и “оптимальные” режимы стекания // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 188–198.
29. **Трифонов Ю. Я.** Расчет линейной устойчивости течения жидкости в плоском канале с волнистыми вдоль потока стенками // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 6. С. 68–80.
30. **Трифонов Ю. Я.** Расчет линейной устойчивости течения жидкости в плоском канале с волнистыми поперек потока стенками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 5. С. 47–56.
31. **Orszag S. A.** Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 689–703.

Поступила в редакцию 9/II 2024 г.,
после доработки — 17/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.