

УДК 539.3

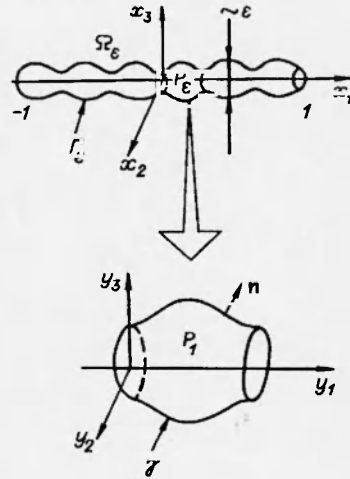
АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ БАЛОК*

А. Г. Колпаков

Сибирская государственная академия телекоммуникаций и информатики,
630009 Новосибирск

При рассмотрении задач в тонких областях возникают задачи меньшей размерности, нежели исходная [1–6]: в областях малой толщины возникают задачи теории пластинок [1–3], в областях малого диаметра — теории балок [4–6]. Для исследования применим аналог метода усреднения [7, 8]. Особенности задач выявляются при изучении ячеечной задачи (чему в собственно математической теории не уделяется значительного внимания). Анализ задачи указывает на существенное влияние микроструктуры на макроскопические свойства балки и устанавливает связь между ними. В данной работе проводится асимптотический анализ задачи термоупругости в области малого диаметра. Ранее задача термоупругости для композиционных структур рассматривалась для монолитных композитов в [9–14], для пластинок в [15–17].

Постановка задачи. Пусть линейно-термоупругий материал занимает область $\Omega_\epsilon \subset R^3$, получающуюся периодическим повторением ячейки периодичности (ЯП) P_ϵ вдоль оси Ox_1 (см. рисунок), ЯП P_ϵ получается гомотетическим сжатием с коэффициентом ϵ некоторой не зависящей от ϵ ячейки P_1 , в силу чего пропорции ЯП P_ϵ при изменении ϵ сохраняются. Ячейка P_1 имеет конгруэнтные боковые грани, параллельные плоскости Oy_2y_3 , и кусочно-гладкую свободную поверхность γ (последнее свойство автоматически распространяется на границу ЯП P_ϵ и границу области Ω_ϵ). В остальном ячейка P_ϵ достаточно произвольная, в частности, она может быть многосвязной (например, в фермах). Область Ω_ϵ по оси Ox_1 имеет протяженность от -1 до 1 , при $\epsilon \rightarrow 0$ область Ω_ϵ стягивается к отрезку на оси Ox_1 (т. е. к балке).



Уравнения равновесия для рассматриваемого трехмерного тела при условии жесткого закрепления торцов (см. рисунок) имеют вид [18]

$$\int_{\Omega_\epsilon} \sigma_{ij}^\epsilon v_{i,j} dx + \int_{\Gamma_\epsilon} (\epsilon^{-2} g) v dx = \int_{\Omega_\epsilon} (\epsilon^{-2} f) v dx \quad (1)$$

для любой $v \in V(\Omega_\epsilon) = \{v \in H^1(\Omega_\epsilon) : v(x) = 0 \text{ при } x_1 = \pm 1\}$. Определение H^1 см., например, в [19]. Здесь σ_{ij}^ϵ — локальные напряжения, связанные с локальными перемещениями u^ϵ законом Дюгамеля — Неймана [18]

$$\sigma_{ij}^\epsilon = \epsilon^{-4} a_{ijkl}(x/\epsilon) u_{k,l}^\epsilon + \epsilon^{-4} \beta^{(-4)}(x/\epsilon) \theta, \quad (2)$$

где θ — температура (в данной работе она считается заданной гладкой функцией); $\{a_{ijkl}\}$ — тензор упругих постоянных; $\{\beta_{ij}\}$ — тензор термо-

* Работа выполнена по гранту № ГКРФО 94-4.4-75 Санкт-Петербургского конкурсного центра.

упругих постоянных: $\beta_{ij} = \varepsilon^{-4} a_{ijkl} \alpha_{kl}$ ($\{\alpha_{kl}\}$ — коэффициенты теплового расширения).

З а м е ч а н и е 1 (оценка порядков). В рассматриваемом случае выбор порядков производится так, чтобы при $\varepsilon \rightarrow 0$ балка имела ненулевую жесткость, а силы не занулялись: массовые и поверхностные силы имеют порядок ε^{-2} , а упругие постоянные — порядок ε^{-4} . Вопрос о порядке величин имеет важное значение. Так, в [15, 16] классические термоупругие соотношения для пластинок получены для коэффициентов теплового расширения порядка ε . Такой выбор порядка исключает из рассмотрения обычное осевое расширение. В данном случае при выборе β_{ij} порядка ε^{-4} (соответственно α_{ij} порядка единицы) это расширение учитывается, но для уравнивания возникающих моментов прогибы балки должны иметь порядок ε^{-1} . Функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ считаются не зависящими от ε .

Периодичность структуры балки учитывается тем, что функции $a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и $\beta_{ij}(\mathbf{x}/\varepsilon)$ периодические по x_1 с периодом εt ($[0, \varepsilon t]$ — проекция ЯП на ось Ox_1).

Асимптотическое разложение. Асимптотическое разложение имеет следующий вид:

перемещения

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} w_{,\alpha}^{(-1)}(x_1) \mathbf{e}_\alpha - y_\alpha w_{,\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) \mathbf{e}_1 + \\ + \varepsilon^{-1} y_{\beta s} s_\beta \mathbf{e}_\beta \varphi^{(-1)}(x_1) + \mathbf{u}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{u}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots \quad (3)$$

($\bar{\beta} = 2$ при $\beta = 3$, $\bar{\beta} = 3$ при $\beta = 2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = -1$ ($\beta = 2, 3$)); пробная функция

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(x_1) + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots;$$

напряжения

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} \sigma_{ij}^{(-4)}(x_1, \mathbf{y}) + \varepsilon^{-3} \sigma_{ij}^{(-3)}(x_1, \mathbf{y}) + \dots,$$

где $x_1 \in [-1, 1]$ — медленная, а $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ — быстрая переменные [7, 8]; $\{\mathbf{e}_i\}$ — орты стандартной прямоугольной системы координат. Функции в правых частях (3) предполагаются периодическими по y_1 с периодом t . По поводу первых трех членов в (3) отметим, что они соответствуют локальным задачам изгиба и кручения балки (см. ниже). Здесь и далее греческие индексы принимают значения 2, 3, латинские — 1, 2, 3.

Операторы дифференцирования $\partial/\partial x_i$ для функций вида $f(x_1, \mathbf{y})$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad (\alpha = 2, 3). \quad (4)$$

Применяя соотношения (4), из (1) получим

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\sigma_{ij}^\varepsilon \varepsilon^{-1} v_{i,jy} + \sigma_{i1}^\varepsilon v_{i,1x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon^{-2} \mathbf{g} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon^{-2} \mathbf{f} \mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Здесь и далее используются обозначения: $,jy = \partial/\partial y_j$; и $,1x = \partial/\partial x_1$.

Сделаем в (5) замену переменных:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z} = (x_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2/\varepsilon, x_3/\varepsilon).$$

Тогда

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_1} (\sigma_{ij}^\varepsilon \varepsilon^{-1} v_{i,jy} + \sigma_{i1}^\varepsilon v_{i,1x}) dz + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \mathbf{v} dz = \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \mathbf{v} dz, \quad (6)$$

где Ω_1 и Γ_1 — области, получающиеся из Ω_ε и Γ_ε увеличением их сечения в ε^{-1} раз (диаметры Ω_1 и Γ_1 имеют порядок единицы).

Подставив в (6) разложение (3), находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-4}^{\infty} \int_{\Omega_1} \varepsilon^2 (\varepsilon^{m+k-1} \sigma_{ij}^{(m)} v_{i,jy}^{(k)} + \varepsilon^{m+k} \sigma_{i1}^{(m)} v_{i,1x}^{(k)}) dz + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \varepsilon^k \mathbf{g} \mathbf{v}^{(k)} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega_1} \varepsilon^k \mathbf{f} \mathbf{v}^{(k)} dz. \quad (7)$$

Подстановка (3) в закон Дюгамеля — Неймана (2) после приравнивания выражений при одинаковых степенях дает

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a_{ijkl}(\mathbf{x}/\varepsilon) u_{k,ly}^{(m+5)} + a_{ijk1}(\mathbf{x}/\varepsilon) u_{k,1x}^{(m+4)} + \begin{cases} 0, \\ \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{x}/\varepsilon) \theta \end{cases} \quad \text{при } m = -4. \quad (8)$$

Здесь и далее в суммах $m = -4, -3, \dots, k = 0, 1, \dots$

Следует принять во внимание, что

$$\varepsilon^{-4} [a_{ij\alpha 1} \varepsilon^{-1} w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) - a_{ij1\alpha} \varepsilon^{-1} (y_\alpha w_\alpha^{(-1)}(x_1))_{,\alpha y}] = \varepsilon^{-5} [a_{ij\alpha 1} - a_{ij1\alpha}] = 0,$$

$$\varepsilon^{-4} [\varepsilon^{-1} a_{ijkl} (s_\beta y_{\bar{j}} e_\beta \varphi(x_1))_{,ly}] = \varepsilon^{-5} [a_{ij23} - a_{ij32}] = 0$$

в силу симметрии упругих постоянных [18]. Из приведенных равенств следует, что в разложение напряжений (3) не входят члены порядка ε^{-5} .

Получение уравнений равновесия. Основная цель данной работы — получение задачи для нахождения функций из асимптотического разложения (3). Для этого рассмотрим задачу (7), (8) при различных k, m и специальным выбором пробной функции \mathbf{v} .

З а м е ч а н и е 2. Введем обозначения:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{m} \int_{P_1} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{— среднее по ЯП } P_1 \text{ в быстрых переменных,}$$

$$\langle f \rangle_\gamma = \frac{1}{m} \int_\gamma f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{— среднее по боковой поверхности } \gamma \text{ ЯП } P_1.$$

Имеют место следующие соотношения [5]: при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega_1} f(x_1, \mathbf{y}) dz \rightarrow \int_{-1}^1 \langle f \rangle(x_1) dx_1, \quad \int_{\Gamma_1} f(x_1, \mathbf{y}) dz \rightarrow \int_{-1}^1 \langle f \rangle_\gamma(x_1) dx_1.$$

Положим $k = 0$ (т. е. возьмем в (3) $\mathbf{v}^{(k)} = 0$ при $k = 1, 2, \dots$, что возможно в силу произвольности $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$). Для указанных k и \mathbf{v} из (7) по-

лучаем

$$\sum_{m=-4}^{\infty} \varepsilon^2 \int_{\Omega_1} \varepsilon^m \sigma_{i1}^{(m)} v_{i,1x}^{(0)} dz + \int_{\Gamma_1} g v^{(0)} dz = \int_{\Omega_1} f v^{(0)} dz.$$

Введем в рассмотрение величины $N_{ij}^{(m)} = \langle \sigma_{ij}^{(m)} \rangle$ (имеющие смысл осевых усилий [5]) и $M_{i\alpha}^{(m)} = \langle y_{\alpha} \sigma_{i1}^{(m)} \rangle$ (имеющие смысл изгибающих моментов [5]). Во введенных обозначениях, используя замечание 2 и приравняв в последнем равенстве члены при одинаковых неположительных степенях ε , получим

$$N_{i1,1x}^{(-4)} = 0, \quad N_{i1,1x}^{(-3)} = 0, \quad N_{i1,1x}^{(-2)} = \langle g_i \rangle_{\gamma} + \langle f_i \rangle. \quad (9)$$

Положим в (7) $k = 1$ (т. е. равны нулю все слагаемые в выражении для пробной функции v из (3), кроме $v^{(1)}$), а $v^{(1)}$ выберем следующим образом:

$$v^{(1)}(x_1, y) = y_2 v_2(x_1) + y_3 v_3(x_1). \quad (10)$$

Здесь $v_2, v_3 \in C^1([-1, 1])$ и $v_2(\pm 1) = v_3(\pm 1) = 0$. При указанном выборе k и v уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=-4}^{\infty} \int_{\Omega_1} \{ \varepsilon^m \sigma_{ij}^{(m)} (v_2 \delta_{2j} + v_3 \delta_{3j}) + \varepsilon^{m+1} \sigma_{i1}^{(m)} (y_2 v_{2,1x} + y_3 v_{3,1x}) \} dz + \\ + \int_{\Gamma_1} g (y_2 v_2 + y_3 v_3) dz = \int_{\Omega_1} f (y_2 v_2 + y_3 v_3) dz. \quad (11) \end{aligned}$$

Из (11), используя замечание 2 и приравняв выражения при одинаковых неположительных степенях ε , находим

$$N_{i\alpha}^{(-4)} = 0, \quad -M_{\alpha i,1x}^{(-4)} + N_{i\alpha}^{(-3)} = 0 \quad \text{при } m = -4; \quad (12)$$

$$-M_{\alpha i,1x}^{(-3)} + N_{i\alpha}^{(-2)} = \langle g_i y_{\alpha} \rangle_{\gamma} + \langle f_i y_{\alpha} \rangle \quad \text{при } m = -3 \quad (13)$$

($\alpha = 2, 3$). Соотношения (9), (12), (13) представляют собой уравнения равновесия одномерной балки.

Получение определяющих соотношений. Перейдем к установлению связи между усилиями и моментами, введенными выше, и характеристиками деформирования балки. Заметим, что основная специфика задач в тонких областях проявляется именно при получении предельных определяющих соотношений [1-6].

Положим $k = 1$, $m = -4$ и возьмем пробную функцию в виде $v = \varepsilon v^{(1)}(y)$ (остальные $v^{(k)}$ в (3) равны нулю). Для так выбранной функции v из (7) имеем задачу

$$\sigma_{ij,jy}^{(-4)} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \sigma_{ij}^{(-4)} n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (14)$$

где n — нормаль к боковой поверхности Γ_1 области Ω_1 .

Воспользуемся соотношением (8) при $m = -4$. Подстановка его в (14) с учетом (3) дает уравнение

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijp1}(y) u_{p,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij1\alpha}(y) w_{\alpha,1x}^{(-1)} + \\ + s_{\beta} a_{ij\beta\bar{\beta}}(y) \varphi_{,1x}^{(-1)}(x_1) + \beta_{ij}^{(-4)}(y) \theta(x_1))_{,jy} = 0 \quad \text{в } \Omega_1 \quad (15) \end{aligned}$$

с краевым условием

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})u_{k,ly}^{(1)} + a_{ijp1}(\mathbf{y})u_{p,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij1\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x1x}^{(-1)}(x_1) + s_{\beta}a_{ij\beta\bar{\beta}}(\mathbf{y})\varphi_{,1x}^{(-1)}(x_1) + \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{y})\theta(x_1))n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \quad (16)$$

и условием периодичности: $u^{(1)}(x_1, \mathbf{y})$ — периодическая функция по y_1 с периодом m . Через Γ_1 обозначена боковая поверхность ЯП Ω_1 (см. рисунок).

В задаче в переменных \mathbf{y} функции аргумента x_1 играют роль параметров [1, 19]. С учетом этого задача (15), (16) приводит к ячеечным задачам (ЯЗ) теории балок. В рассматриваемом случае возникают задачи, соответствующие кручению и тепловым деформациям, новые по сравнению с ЯЗ для монолитных композитов [7, 8] и пластинок [1, 2].

Введем функцию $X^{1p}(\mathbf{y})$ как решение «первой упругой ЯЗ теории балок»:

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{1p} + a_{ijp1}(\mathbf{y}))_{,jy} = 0 \quad \text{в } P_1, \quad (17)$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{1p} + a_{ijp1}(\mathbf{y}))n_j = 0 \quad \text{на } \gamma$$

(X^{1p} — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle X^{1p} \rangle = 0$).

Введем функцию $X^3(\mathbf{y})$ как решение «ЯЗ кручения балок»:

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^3 + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y})s_{\beta}y_{\beta})_{,jy} = 0 \quad \text{в } P_1, \quad (18)$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^3 + a_{ij\beta 1}(\mathbf{y})s_{\beta}y_{\beta})n_j = 0 \quad \text{на } \gamma$$

($X^3(\mathbf{y})$ — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle X^3 \rangle = 0$).

Введем функцию $\mathcal{F}(\mathbf{y})$ как решение «первой термоупругой ЯЗ теории балок»:

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})\mathcal{F}_{k,ly} + \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{y}))_{,jy} = 0 \quad \text{в } P_1, \quad (19)$$

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})\mathcal{F}_{k,ly} + \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{y}))n_j = 0 \quad \text{на } \gamma$$

($\mathcal{F}(\mathbf{y})$ — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle \mathcal{F} \rangle = 0$).

В силу линейности задачи (15), (16) и замечания о функциях аргумента x_1 решение (15), (16) можно представить в виде линейной комбинации решений ЯЗ (17)–(19) следующим образом:

$$u^{(1)} = X^{1p}(\mathbf{y})u_{p,1x}^{(0)}(x_1) + X^{2\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + \mathcal{F}(\mathbf{y})\theta(x_1) + X^3(\mathbf{y})\varphi_{,1x}^{(-1)}(x_1) + U(x_1). \quad (20)$$

Появление $U(x_1)$ в (20) связано с тем, что (15), (16) содержат производные только по переменной \mathbf{y} .

Часть решений ЯЗ (17) находится в явном виде, а именно [5]:

$$X_k^{1\alpha}(\mathbf{y}) = -\delta_{1k}y_{\alpha} \quad (\alpha = 2, 3). \quad (21)$$

Отметим, что (20) дает частное решение задачи (15), (16). Это отличает задачу для балки от задачи для пластинки. Для получения общего решения (15), (16) рассмотрим однородную задачу, соответствующую (15), (16):

$$(a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly})_{,jy} = 0 \quad \text{в } P_1,$$

$$a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}n_j = 0 \quad \text{на } \gamma$$

($\mathbf{X}(\mathbf{y})$ — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle \mathbf{X} \rangle = 0$).

Решение этой задачи есть $\mathbf{X} = y_{\beta} s_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \varphi(x_1)$ для любой функции $\varphi(x_1)$. Действительно,

$$a_{ijkl}(y_{\beta} s_{\beta} \mathbf{e}_{\beta} \varphi(x_1))_{k,ly} = (a_{ij23} - a_{ij32})\varphi(x_1) = 0, \quad (22)$$

так как в силу симметрии упругих постоянных [18] $a_{ij23} = a_{ij32}$. Отметим, что в отсутствие такой симметрии ситуация меняется [20–23].

Как видно, решение однородной ЯЗ формальным образом вводит еще одну степень свободы балки — кручение балки. Для монолитных композитов и пластинок решение однородной задачи нулевое [1, 7].

С учетом приведенных результатов общее решение задачи (15), (16) получается как сумма (20) и решения однородной задачи и может быть записано в виде (запись приводится в координатной форме)

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= X_1^{11}(\mathbf{y})u_{1,1x}^{(0)}(x_1) - y_{\alpha}u_{\alpha,1x}^{(0)}(x_1) + \\ &+ X_1^{2\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + \mathcal{F}_1(\mathbf{y})\theta(x_1) + X_1^3(\mathbf{y})\varphi_{1,x}^{(-1)}(x_1) + U_1(x_1), \\ u_{\beta}^{(1)} &= X_{\beta}^{11}(\mathbf{y})u_{1,1x}^{(0)}(x_1) + \mathcal{F}_{\beta}(\mathbf{y})\theta(x_1) + \\ &+ X_{\beta}^{2\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + X_{\beta}^3(\mathbf{y})\varphi_{1,x}^{(-1)}(x_1) + y_{\beta} s_{\beta} \varphi(x_1) + U_{\beta}(x_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив (23) в (8) для случая $m = -4$, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-4)} &= a_{ij11}(\mathbf{y})u_{1,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{11}(\mathbf{y})u_{1,1x}^{(0)}(x_1) + a_{ij\beta\beta}(\mathbf{y})s_{\beta}\varphi(x_1) + \\ &+ a_{ijkl}(\mathbf{y})\mathcal{F}_{k,ly}(\mathbf{y})\theta(x_1) + \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{y})\theta(x_1) + a_{ij1\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x1x}^{(-1)}(x_1) + \\ &+ a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y})w_{\alpha,1x1x}^{(-1)}(x_1) + a_{ij\beta\beta}(\mathbf{y})y_{\beta} s_{\beta} \varphi_{1,x}^{(-1)}(x_1) + \\ &+ a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^3(\mathbf{y})\varphi_{1,x}^{(-1)}(x_1). \end{aligned}$$

Интегрируя (24) и (24), умноженное на y_{β} , по ЯП P_1 (с учетом того, что при интегрировании по y функции аргумента x_1 рассматриваются как параметры), для изотропных материалов имеем

$$\begin{aligned} N_{11}^{(-4)} &= A_{11}^{00}u_{1,1x}^{(0)} + A_{11}^{0\alpha}w_{\alpha,1x1x}^{(-1)} + B_{11}^0\theta + I_{11}\varphi_{1,x}^{(-1)}, \\ M_{i\beta}^{(-4)} &= A_{i\beta}^{10}u_{1,1x}^{(0)} + A_{i\beta}^{11}w_{\alpha,1x1x}^{(-1)} + B_{i\beta}^1\theta + J_{i\beta}\varphi_{1,x}^{(-1)} \end{aligned} \quad (25)$$

(учтено, что $a_{i1\beta\beta} = 0$ для изотропных материалов [18]). Здесь

$$\begin{aligned} A_{ij}^{00} &= \langle a_{ij11}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{11}(\mathbf{y}) \rangle, \\ A_{i\beta}^{01} &= \langle a_{i\beta1\alpha}(\mathbf{y}) + a_{\beta k l}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}) \rangle, \\ A_{i\beta}^{10} &= \langle (a_{i111}(\mathbf{y}) + a_{\beta k l}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle, \\ A_{i\beta}^{11} &= \langle (a_{i11\alpha}(\mathbf{y}) + a_{i1kl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^{2\alpha}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle, \\ B_{ij}^0 &= \langle \beta_{ij}^{(-4)}(\mathbf{y}) + a_{ijkl}(\mathbf{y})\mathcal{F}_{k,ly}(\mathbf{y}) \rangle, \\ B_{i\beta}^1 &= \langle (\beta_{i1}^{(-4)}(\mathbf{y}) + a_{i1kl}(\mathbf{y})\mathcal{F}_{k,ly}(\mathbf{y}))y_{\beta} \rangle, \\ I_{ij} &= \langle a_{ijkl}(\mathbf{y})X_{k,ly}^3(\mathbf{y}) \rangle, \end{aligned} \quad (26)$$

$$J_{i\beta} = \langle a_{ikl}(y) X_{k,ly}^3(y) y_{\beta} \rangle.$$

Уравнения равновесия для определения $u_i^{(n)}$, $w_{\alpha}^{(-1)}$, $\varphi^{(-1)}$ имеют вид (см. (9), (12))

$$\begin{aligned} N_{11,1x}^{(-4)} &= 0 && \text{(для осевых сил),} \\ M_{1\alpha,1x1x}^{(-4)} &= 0 && \text{(для изгибающих моментов),} \\ \mathcal{M}_{,1x} &= 0 && \text{(для крутящего момента)} \end{aligned} \quad (27)$$

($\mathcal{M} = M_{23}^{(-4)} - M_{32}^{(-4)}$ — момент кручения). Для получения второго уравнения из (27) надо продифференцировать (12) при $i = 1$ и воспользоваться (9). Третье уравнение из (27) вытекает из (12) и равенства $N_{23}^{(-3)} = N_{32}^{(-3)}$, являющегося следствием симметрии напряжений.

Краевые условия вытекают из разложения (2):

$$u_1^{(0)}(\pm 1) = w_{\alpha}^{(-1)}(\pm 1) = w_{\alpha,1x}^{(-1)}(\pm 1) = \varphi^{(-1)}(\pm 1) = 0. \quad (28)$$

Решение задачи (27), (28) в общем случае не равно нулю за счет присутствия в ней термоупругих членов.

Получение членов асимптотического разложения высших порядков. Положив в (7) $k = 1$, $m = -3$ и взяв пробную функцию в виде $v = \varepsilon v^{(1)}(y)$, имеем задачу

$$\sigma_{ij,jy}^{(-3)} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad \sigma_{ij}^{(-3)} n_j = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (29)$$

В случае $m = -3$ соотношение (8) принимает вид

$$\sigma_{ij}^{(-3)} = a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(y) u_{k,1x}^{(1)}. \quad (30)$$

Подставляя в (29) выражения для $u^{(1)}$ (27), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} &= a_{ijkl}(y) u_{k,ly}^{(2)} + a_{ijk1}(y) X_k^{11}(y) u_{1,1x1x}^{(0)}(x_1) - a_{ij11}(y) y_{\alpha} u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ &+ a_{ijk1}(y) \mathcal{F}_k(y) \theta_{,1x}(x_1) + a_{ijk1}(y) U_{k,1x}(x_1) + a_{ij\beta\bar{\beta}}(y) s_{\beta} \varphi_{,1x}(x_1) + \\ &+ a_{ijk1}(y) X_k^{1\alpha}(y) w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + a_{ijk1}(y) X_k^3(y) \varphi_{,1x1x}^{(-1)}(x_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Кроме того, должно выполняться условие, что

$$u^{(2)}(x_1, y) \text{ — периодическая функция по } y_1 \text{ с периодом } m, \langle u^{(2)} \rangle = 0. \quad (32)$$

Введем функцию $Y^{(p)}(y)$ как решение «второй ЯЗ теории балок»:

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}(y) Y_{k,ly}^{(p)} + a_{ijk1}(y) X_k^{1p}(y))_{,jy} &= 0 && \text{в } P_1, \\ (a_{ijkl}(y) Y_{k,ly}^{(p)} + a_{ijk1}(y) X_k^{1p}(y)) n_j &= 0 && \text{на } \gamma \end{aligned} \quad (33)$$

($Y^{(p)}$ — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle Y^{(p)} \rangle = 0$); функцию $T(y)$ как решение «второй ЯЗ термоупругости балок»:

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}(y) T_{k,ly} + a_{ijk1}(y) \mathcal{F}_k(y))_{,jy} &= 0 && \text{в } P_1, \\ (a_{ijkl}(y) T_{k,ly} + a_{ijk1}(y) \mathcal{F}_k(y)) n_j &= 0 && \text{на } \gamma \end{aligned} \quad (34)$$

(T — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle T \rangle = 0$);

функцию $Z(y)$ как решение «второй ЯЗ кручения балок»:

$$\begin{aligned} (a_{ijkl}(y)Z_{k,ly} + a_{ijk1}(y)X_k^3(y))_{,jy} &= 0 && \text{в } P_1, \\ (a_{ijkl}(y)Z_{k,ly} + a_{ijk1}(y)X_k^3(y))n_j &= 0 && \text{на } \gamma \end{aligned} \quad (35)$$

(Z — периодическая функция по y_1 с периодом m , $\langle Z \rangle = 0$).

Используя ЯЗ (33)–(35), решение задачи (29)–(31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= X^{1p}(y)U_{p,1x}(x_1) - X^{2\alpha}(y)u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + T(y)\theta_{,1x}(x_1) + \\ &+ Y^{(1)}(y)u_{1,1x1x}^{(0)}(x_1) + X^3(y)\varphi_{,1x}(x_1) + \\ &+ Y^{(\alpha)}(y)w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + Z(y)\varphi_{,1x1x}^{(-1)}(x_1). \end{aligned} \quad (36)$$

Подстановка (36) в (31) с учетом (21) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(-3)} &= (a_{ij11}(y) + a_{ijkl}(y)X_{k,ly}^{11}(y))U_{1,1x}(x_1) - \\ &- (a_{ij11}(y)y_\alpha + a_{ijkl}(y)X_{k,ly}^{2\alpha}(y))u_{\alpha,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ &+ (a_{ijkl}(y)Y_{k,ly}^{(1)}(y) + a_{ijk1}(y)X_k^{11}(y))u_{1,1x1x}^{(0)}(x_1) + \\ &+ (a_{ijkl}(y)Y_{k,ly}^{(\alpha)}(y) + a_{ijk1}(y)X_k^{1\alpha}(y))w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) + \\ &+ (a_{ij\beta\beta}(y)s_\beta + a_{ijkl}(y)X_{k,ly}^3(y))\varphi_{,1x}(x_1) + \\ &+ (a_{ijkl}(y)Z_{k,ly}(y) + a_{ijk1}(y)X_k^3(y))\varphi_{,1x1x}^{(-1)}(x_1) + \\ &+ (a_{ijkl}(y)T_{k,ly}^{(1)}(y) + a_{ijk1}(y)\mathcal{F}_k(y))\theta_{,1x}(x_1). \end{aligned} \quad (37)$$

Интегрируя (37) по ЯП P_1 , имеем

$$\begin{aligned} N_{11}^{(-3)} &= A_{11}^{00}U_{1,1x} + A_{11\alpha}^{01}u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + D_{111}u_{1,1x1x}^{(0)} + \\ &+ D_{11\alpha}w_{\alpha,1x}^{(-1)} + I_{11}\varphi_{,1x} + G_{11}\varphi_{,1x1x}^{(-1)} + C_{11}\theta_{,1x}. \end{aligned} \quad (38)$$

Умножив равенство (37) на y_β , положив $j = 1$ и проинтегрировав полученное соотношение по P_1 , находим

$$\begin{aligned} M_{i\beta}^{(-3)} &= A_{i\beta}^{10}U_{1,1x} + A_{i\beta\alpha}^{11}u_{\alpha,1x1x}^{(0)} + d_{i\beta 1}u_{1,1x1x}^{(0)} + \\ &+ d_{i\beta\alpha}w_{\alpha,1x}^{(-1)} + J_{i\beta}\varphi_{,1x} + g_{i\beta}\varphi_{,1x1x}^{(-1)} + c_{i\beta}\theta_{,1x}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \langle a_{ijkl}(y)T_{k,ly}^{(1)} + a_{ijk1}(y)\mathcal{F}_k(y) \rangle; \\ D_{ijp} &= \langle a_{ijkl}(y)Y_{k,ly}^{(p)}(y) + a_{ijk1}(y)X_k^{1p}(y) \rangle; \\ G_{ij} &= \langle a_{ijkl}(y)Z_{k,ly}(y) + a_{ijk1}(y)X_k^3(y) \rangle; \\ c_{i\beta} &= \langle (a_{i1kl}(y)T_{k,ly}^{(1)}(y) + a_{i1k1}(y)\mathcal{F}_k(y))y_\beta \rangle; \\ d_{i\beta p} &= \langle (a_{i1kl}(y)Y_{k,ly}^{(p)}(y) + a_{i1k1}(y)X_k^{1p}(y))y_\beta \rangle; \\ g_{i\beta} &= \langle (a_{i1kl}(y)Z_{k,ly}(y) + a_{i1k1}(y)X_k^3(y))y_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Решение задачи (25)–(28) позволяет вычислить функции $u_1^{(n)}$, $w_\alpha^{(-1)}$ и $\varphi^{(-1)}$ из асимптотического разложения (3). Таким образом, для перемещений получаем $u^\varepsilon \approx \varepsilon^{-1} w_\alpha^{(-1)}(x_1) e_\alpha - y_\alpha w_{\alpha,1x}^{(-1)}(x_1) e_1 + \varepsilon^{-1} y_\beta s_\beta e_\beta \varphi^{(-1)} + u_1^{(0)} e_1$, где функции в правой части известны (после решения предельной задачи). Формальная точность предельной задачи (25)–(28) равна ε по перемещениям и ε^{-3} по напряжениям.

Решение ячеечных задач может быть выполнено как численно, так и на основании специальных методов, изложенных, например, в [15, 20–24].

ЛИТЕРАТУРА

1. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. N 6. P. 159–191.
2. Kohn R., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. 1984. V. 20, N 4. P. 333–350.
3. Колпаков А. Г. Тонкие упругие пластинки периодического строения с односторонними контактами // ПМТФ. 1991. № 5. С. 136–142.
4. Козлова М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости для тонкого неоднородного бруса // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 5. С. 6–10.
5. Колпаков А. Г. К вычислению характеристик тонких упругих стержней периодического строения // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 3. С. 440–448.
6. Колпаков А. Г. К задаче теории балок с начальными напряжениями // ПМТФ. 1992. № 6. С. 139–144.
7. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
8. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
9. Колпаков А. Г. Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 49. С. 45–55.
10. Колпаков А. Г. К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов // Пятый Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981.
11. Ene H. J. On linear thermoelasticity of composite materials // Int. J. Eng. Sci. 1983. V. 21, N 13.
12. Колпаков А. Г. Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 53–61.
13. Ene H. J., Pasa G. I. Metoda Ommogonizarii. Aplicatii la Teoria Materialelor Composite. Bucuresti, 1987.
14. Алехин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск, 1988.
15. Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций / Б. Д. Аннин, А. Л. Каламбаров, А. Г. Колпаков, В. З. Партон. Новосибирск: Наука, 1993.
16. Каламбаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Термоупругость регулярно неоднородного искривленного слоя с волнистыми поверхностями // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 1000–1008.
17. Колпаков А. Г. К задаче термоупругости неоднородных пластинок // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, вып. 3. С. 487–494.
18. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
19. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

20. Колпаков А. Г. Жесткостные характеристики напряженных неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 66–73.
21. Kolpakov A. G. Mechanics of composite frameworks // Шестой конгресс по теоретична и прикл. механике. Варна, 1989: Резюмега.
22. Kolpakov A. G. On dependence of velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Second World Congr. on Computational Mechanics. Stuttgart. 1990: Abstracts. P. 453–456.
23. Kolpakov A. G. On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // Comput. and Struct. 1992. V. 44, N 1/2. P. 97–101.
24. Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G. Numerical design of thin-walled structural members on account of their strength // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1993. V. 36, N 20. P. 3441–3449.

*Поступила в редакцию 19/VII 1994 г.,
в окончательном варианте — 26/IX 1994 г.*
