

УДК 535.015

ОСОБЕННОСТИ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СПИРАЛЬНОМ МОЛЕКУЛЯРНОМ АГРЕГАТЕ*

А. А. Заболотский

*Институт автоматизации и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su*

Рассматриваются формирование и динамика возбуждений в атомной или молекулярной наноцепочке спиральной формы. Учитывается диполь-дипольное взаимодействие круговых поляризаций оптических переходов соседних молекул. При решении выведенных уравнений Блоха в континуальном приближении используется система координат Френе — Серре. Получены решения, описывающие формирование устойчивых локализованных структур, солитонов, обусловленных кривизной цепочки, которые могут оказывать критическое влияние на люминесцентные свойства хиральной среды.

Ключевые слова: наноматериалы, спиральные структуры, экситоны, солитоны.

DOI: 10.15372/AUT20180415

Введение. Ряд оптических свойств молекулярных агрегатов нельзя понять без учёта их геометрических свойств. Сложные молекулярные комплексы, например J-агрегаты [1], бактерии, биологические комплексы [2, 3], образуют спиральные, кольцевые и другие геометрические структуры. Для агрегатов и набора не связанных в цепи молекул особенности люминесценции могут существенно различаться.

С помощью оптической циркулярной спектроскопии получается информация о структуре белков, ДНК, жидких кристаллов и молекулярных структур [4–7]. Большинство биологических молекул являются хиральными и состоят из электронно-связанных единиц, что приводит к делокализации их фотовозбуждения [4], которая влияет на оптические спектры. Поскольку связь зависит от расстояния между атомами и их относительной ориентации, то оптические спектры содержат информацию о структуре молекулярной системы. Геометрическая структура биологических и других объектов определяет механизм взаимодействия поляризаций составляющих их молекул. Полимеры с периодической структурой имеют широкий спектр приложений, обладают превосходными механическими свойствами [5] и могут найти применение в регенеративной медицине [6]. Агрегаты, состоящие из сопряжённых молекулярных блоков, могут использоваться в молекулярной электронике [7, 8]. Подобные агрегаты сочетают в себе преимущества лёгкой обработки сопряжённых полимеров с упорядоченной структурой, аналогичной молекулярным кристаллам, и имеют потенциальные приложения в оптоэлектронных устройствах размером 5–100 нм. Представляет интерес изучение спиральных или трубчатых структур со спирально закрученной поверхностью J-агрегатов красителей. Механизм переноса возбуждения в таких средах определяется диполь-дипольным взаимодействием поляризаций соседних молекул и зависит от кривизны и других геометрических факторов [1, 9]. В одно- и двумерных струк-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00379).

турах, например в магнетиках, жидких кристаллах, геометрические факторы также могут играть критическую роль. Изучение эффектов, вызванных кривизной в моделях векторного поля в одно- и двумерных геометриях, имеет долгую историю [10–13]. Для упрощения вычислений был развит эффективный формализм, нашедший применение в континуальных моделях магнетиков и других структурах. Результаты получены при изучении роли кривизны во взаимодействии дефектов в $2D$ -моделях сверхтекучести, сверхпроводников и нематических жидких кристаллов, нанесённых на криволинейные поверхности [13]. В [14, 15] построена теория электронных состояний в скрученных квантовых проводах с неодинаковыми поперечными сечениями. В [16, 17] показано, что кривизна молекулярных цепочек может сильно воздействовать на перенос энергии между ними и близко расположенными наночастицами.

В то же время влияние кривизны и кручения на вклад диполь-дипольного взаимодействия в оптических средах, состоящих из цепочек молекул с дипольным переходом, а также сопутствующие нелинейные и поляризационные эффекты остаются неисследованными. В данной работе формализм, развитый в [10–13], применяется для изучения возможности формирования локализованных возбуждений в наночастице атомов или молекул вследствие диполь-дипольного взаимодействия.

Вывод уравнений модели. Уравнение Гейзенберга для матрицы плотности $\hat{\rho}$ с компонентами $\tilde{\rho}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, описывающее двухуровневую среду, имеет вид [18]

$$i\hbar\partial_t\hat{\rho} = [\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}], \quad (1)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}[\omega_0 + (\mathbf{d}_z \cdot \hat{\mathbf{E}})]\hat{\sigma}_3 + (\mathbf{d}_x \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_1 + (\mathbf{d}_y \cdot \hat{\mathbf{E}})\hat{\sigma}_2. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{d}_x = d_x\hat{\sigma}_1$, $\mathbf{d}_y = d_y\hat{\sigma}_2$, $\mathbf{d}_z = d_z\hat{\sigma}_3$; $\hat{\sigma}_n$, $n = 1-3$, — матрицы Паули; $\hat{\mathbf{E}}$ — оператор электрического поля; « \cdot » — скалярное произведение. В случае эллиптически поляризованного поля необходимо учитывать обе части дипольного момента $d_{x,y} \neq 0$. Нелинейные эффекты в подобных средах, в том числе в рамках интегрируемых моделей, исследуются давно [18–22]. Однако работ, в которых изучалось влияние диполь-дипольного взаимодействия на экситонную динамику в оптических криволинейных средах нами не обнаружено.

После перехода к медленным огибающим $\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} \exp(-i\omega_0 t)$ система уравнений (1) приводится к системе уравнений Блоха [18]

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \times \mathbf{f}. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{f} — вектор с компонентами $f_\alpha = d_\alpha E_\alpha \hbar^{-1}$, $\alpha = x, y, z$, $E_{x,y}$ — медленные огибающие проекции вектора электрического поля и E_z — дополнительная продольная компонента поля. Вектор Блоха \mathbf{S} выражается через элементы матрицы плотности двухуровневой среды $\hat{\rho}$:

$$S_z = \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}), \quad S_x = \frac{1}{2}(\rho_{12} + \rho_{21}), \quad S_y = \frac{i}{2}(\rho_{12} - \rho_{21}),$$

где $S_z^2 + S_x^2 + S_y^2 = 1$, т. е. суммарная заселённость уровней нормирована на единицу: $2S_0 = \rho_{11} + \rho_{22} = 1$. Для действительных f_α длина вектора \mathbf{S} сохраняется: $\partial_t S_0 = 0$.

Пусть кривая, на которую нанизаны молекулы, описывается вектор-функцией $\gamma(s)$ (s — длина кривой). В дипольном приближении энергия взаимодействия молекулы в точке $\gamma(s_n)$ с дипольными полями \mathbf{F}_j других молекул, находящихся в точках $\gamma(s_j)$, $j \neq n$, имеет вид

$$\mathcal{U} = - \sum_j \sum_{j \neq n} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{F}_j, \quad (4)$$

где \mathbf{p}_j — векторы поляризации j -й молекулы. Суммирование производится по всем N_m молекулам в цепочке:

$$\mathbf{p}_j = \sum_{\alpha=x,y,z} d_\alpha S_\alpha(\gamma(s_j), t) \mathbf{e}_\alpha, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_j = \sum_{n \neq j}^{N_m} \frac{3(\mathbf{d}_j \cdot \boldsymbol{\delta}_{j-n})\boldsymbol{\delta}_{j-n} - \mathbf{d}_j}{\varepsilon |\gamma(s_n) - \gamma(s_j)|^3}. \quad (6)$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}_{j-n} = [\gamma(s_j) - \gamma(s_n)]/|\gamma(s_j) - \gamma(s_n)|$; $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ — орты декартовой системы координат; ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Геометрический формализм. Для определения роли кривизны и кручения в динамике экситонов рассмотрим цепочку молекул в виде трёхмерной спирали. В этом случае геометрические эффекты наиболее очевидны из-за постоянной кривизны и кручения. Параметризуем кривую спирали $\gamma(s)$ следующим образом:

$$\gamma(s) = \mathcal{R} \left[\mathbf{e}_x \cos \frac{2\pi s}{s_0} + \mathbf{e}_y \sin \frac{2\pi s}{s_0} \right] + \mathbf{e}_z \mathcal{C} \frac{s}{s_0} \mathcal{P}, \quad (7)$$

где \mathcal{R} и \mathcal{P} — радиус и шаг спирали соответственно; $\mathcal{C} = \pm 1$ — хиральность спирали; параметр $s_0 = \sqrt{\mathcal{P}^2 + 4\pi^2 \mathcal{R}^2}$ — длина спирали при одном вращении на 2π . Декартова система координат не оптимальна для спиральной наночастицы, поэтому переходим к локальной системе координат Френе — Серре [12], описываемой криволинейной системой координат $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b)$, где $\mathbf{e}_t = \gamma'(s)$, $\mathbf{e}_n = \gamma''(s)/|\gamma''(s)|$ и $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ — тангенциальный, нормальный и бинормальный единичные векторы соответственно (рис. 1). Здесь и далее штрих обозначает производную по координате длины дуги s . В отличие от декартова базиса локальный базис пространственно зависим, и его дифференциальные свойства определяются формулами Френе — Серре:

$$\mathbf{e}'_t(s) = \kappa \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{e}'_n(s) = -\kappa \mathbf{e}_t + \tau \mathbf{e}_b; \quad \mathbf{e}'_b(s) = -\tau \mathbf{e}_n. \quad (8)$$

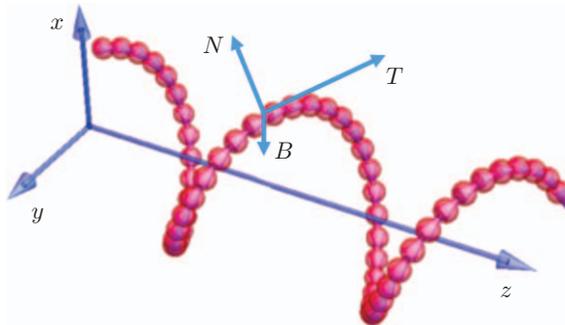


Рис. 1. Спиральная молекула. Показаны системы координат Декарта и Френе — Серре

Симметричная спираль имеет специфическую особенность: кривизна $\kappa = 4\pi^2\mathcal{R}/s_0^2$ и кручение $\tau = 2\pi\mathcal{CP}/s_0^2$ — константы (κ и τ (со знаком) однозначно определяют спиральную кривую).

В декартовых координатах в правой части выражения (4) в случае криволинейной цепочки появятся коэффициенты помимо знаменателя, явно зависящие от s . Для того чтобы их убрать, переходим к базису Френе — Серре

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{P} = T\mathbf{e}_t + N\mathbf{e}_n + B\mathbf{e}_b, \quad |\mathbf{P}| = 1. \quad (9)$$

Как правило, $d_x = \pm d_y$. Положим далее для простоты $d_x = d_y$, $d_z = 0$. Более общий случай здесь рассматриваться не будет. В пределе $1/\kappa \gg |\gamma(s_j) - \gamma(s_{j+1})| = \delta \rightarrow 0$ получаем (с точностью до знака) $\gamma(s_j) - \gamma(s_{j+1}) \rightarrow \mathbf{e}_t\delta$. В приближении взаимодействия ближайших соседей на кривой $\gamma(s)$ в пределе $\mathcal{U}_\delta \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{L}$ с учётом представления (8) и интегрирования по частям имеем следующее выражение для общей энергии взаимодействия:

$$\mathcal{L} = C \int \mathcal{E} ds, \quad s \in \gamma(s), \quad (10)$$

где

$$\mathcal{E} = (B' + \tau N)^2 + (N' - \tau B)^2 + \kappa^2 N^2; \quad (11)$$

$C = d^2/(\hbar\varepsilon\delta)$. Последнее слагаемое в правой части (11) — вклад анизотропии диполь-дипольного взаимодействия, обусловленный кривизной цепочки.

Частные случаи динамики экситонов. Заменяя $u = Ct$, перепишем уравнения динамики вектора Блоха (4) как

$$\partial_u \mathbf{P} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathbf{P}} \times \mathbf{P}. \quad (12)$$

Для спирали (7) ($\kappa = \text{const} > 0$, $\tau = \text{const} \geq 0$) система уравнений (12) с учётом (10) и (11) представима выражением

$$\partial_u \mathbf{P} = \mathbf{P} \times \hat{J} \partial_s^2 \mathbf{P} + 2\mathbf{h}, \quad (13)$$

где $\hat{J} = \text{diag}(0, 1, 1)$ и вектор $\mathbf{h}(\tau, \kappa) = (h_t, h_b, h_n)$ имеет вид

$$\mathbf{h}(\tau, \kappa) = \{\tau(BB' + NN') + \kappa^2 N, \tau T(\tau B - N'), -T[\tau(B' + \tau N) + \kappa^2 N]\}. \quad (14)$$

Для $\tau \rightarrow 0$ получаем из (13), (14)

$$\partial_u T = N''B - B''N + 2\kappa^2 BN, \quad (15)$$

$$\partial_u B = -NT'' - 2\kappa^2 TN, \quad (16)$$

$$\partial_u N = B''T. \quad (17)$$

Система уравнений (15)–(17) с учётом $T^2 + N^2 + B^2 = 1$ в приближении $\partial_s \sim \varepsilon$, $B, T \sim \varepsilon$, $\partial_u \sim \varepsilon^2$ (ε — малый параметр) приводится к нелинейному уравнению Шрёдингера

$$i\partial_u \psi + \psi'' + \kappa^2 \psi |\psi|^2 = 0, \quad (18)$$

где $\psi = (T + iB) \exp(-2i\kappa^2 t)$. Уравнение Шрёдингера (18) имеет «светлые» солитонные решения:

$$(T + iB) = \frac{\sqrt{2}\eta\kappa \exp[2i(\kappa^2 - 2\xi^2 + 2\eta^2)u - 2i\xi s + i\phi_0]}{\cosh[2\eta(s - s_0) + 8\eta\xi u]}. \quad (19)$$

Здесь η, ξ, s_0, ϕ_0 — действительные константы [21], отвечающие локализованным неподвижным или движущимся экситонным возбуждениям с вращающейся поляризацией.

Для $\kappa \rightarrow 0$ получаем из (13), (14)

$$\partial_u T = N''B - B''N + \tau(B^2 + N^2)', \quad (20)$$

$$\partial_u N = B''T + 2\tau T(\tau B - N'), \quad (21)$$

$$\partial_u B = -N''T - 2\tau T(\tau N + B'). \quad (22)$$

Система уравнений (20)–(22) в приближении $\partial_s \sim \varepsilon$, $B, T \sim \varepsilon$, $\partial_u \sim \varepsilon^2$ приводится к нелинейному уравнению Шрёдингера

$$i\partial_u \chi = \chi'' - \tau^2 |\chi|^2 \chi. \quad (23)$$

Здесь $(T + iB) = \sqrt{2}\chi(s, u) \exp^{i\tau s + iu\tau^2}$. Односолитонное решение уравнения (23) имеет вид [21]

$$\frac{\tau}{\sqrt{2}} \chi(s, u) = \frac{(\lambda + i\nu)^2 + \exp(2\nu(s - s_0 + 2\lambda u))}{1 + \exp(2\nu(s - s_0 + 2\lambda u))}, \quad (24)$$

где λ, ν, s_0 — действительные константы. Решение («тёмный» солитон) уравнения (23) описывает распространение со скоростью -2λ провала в ненулевом пьедестале.

В общем случае солитоноподобное возбуждение формируется вследствие сильного обмена энергией между компонентами вектора Блоха. На рис. 2 и 3 представлены результаты

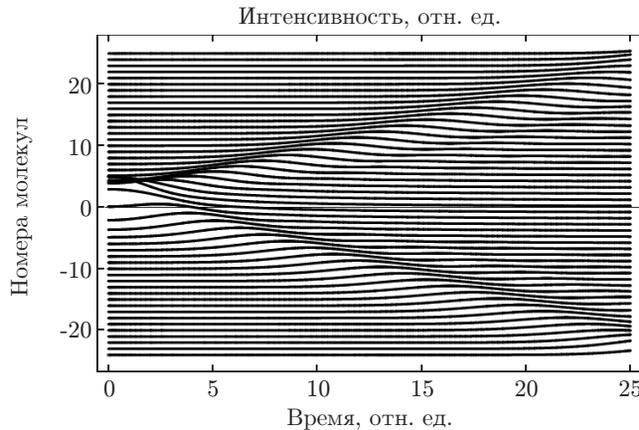


Рис. 2. Интенсивность солитона $|\psi(n, u)|^2$, распространяющегося в прямолинейной дискретной среде, состоящей из 50 молекул ($\max D(n) = 0,33$). Начальное значение $\psi(n, 0) = 0,7 / \cosh(0,7(n - 25))$

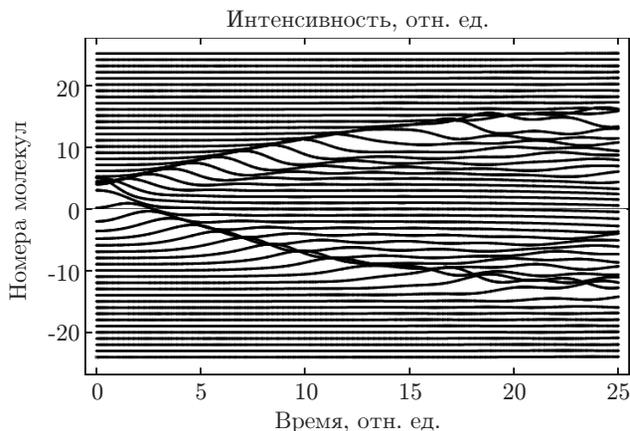


Рис. 3. Интенсивность солитона $|\psi(n, u)|^2$ в среде с кручением, $\tau = 2$ (параметры даны в подписи к рис. 2)

численного моделирования уравнения (23) для исходного дискретного случая с учётом действия суммы полей всех дипольных переходов без перехода к континуальному пределу:

$$\phi'' \rightarrow D(n) = \frac{d^2 \sum_{n \neq j} \phi(n)}{\hbar |\gamma(j) - \gamma(n)|^3}. \quad (25)$$

Обнаружено, что достаточно сильное кручение наноцепочки приводит к изменению скорости и захвату возбуждений (см. рис. 3).

Поляризация излучения спирали. Рассмотрим случай стационарного возбуждения цепочки для малого кручения ($\tau \rightarrow 0$). Положим $T(u, s) = 0$, $N(u, s) = \cos(\phi(s))$, $B(u, s) = \sin(\phi(s))$. Для $\kappa > 0$ это решение устойчиво. Тогда система (13) сводится к уравнению

$$\phi''(s) = -\kappa^2 \sin(2\phi(s)), \quad (26)$$

которое имеет простое вихревое $\phi_v(s) = \pm\pi/2$ и периодическое

$$\phi_p(s) = \text{am}(\chi, k), \quad \chi = \frac{2sK(k)}{\pi}, \quad (27)$$

решения, где $\text{am}(\chi, k)$ — амплитуда Якоби; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем k , удовлетворяющим уравнению $2kK(k) = \kappa\pi$. Эти решения отвечают состояниям поляризации молекул, возникающим вследствие спиральной структуры и исчезающим в прямолинейной цепочке. В первом случае вклад состояния ϕ_v в плотность энергии системы имеет вид $\mathcal{E}_v = 1 - \kappa^2$, во втором — $\mathcal{E}_p = 4E(k)(k\kappa\pi)^{-1} - k^{-2} - \kappa^{-2}$ ($E(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода).

Поле, создаваемое оптическими дипольными переходами двухуровневых точечных атомов с поляризациями \mathbf{P}_j , находящихся в точках $s_j \in \gamma$, имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi k^2}{\varepsilon} \left[\sum_{j=1}^{N_d} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \gamma(s_j)) \cdot \mathbf{P}_j \right], \quad (28)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — диадная функция Грина. Для размеров спирали, много меньших $|\mathbf{r}|$, в континуальном пределе на расстояниях от спирали, меньших длины волны люминесценции,

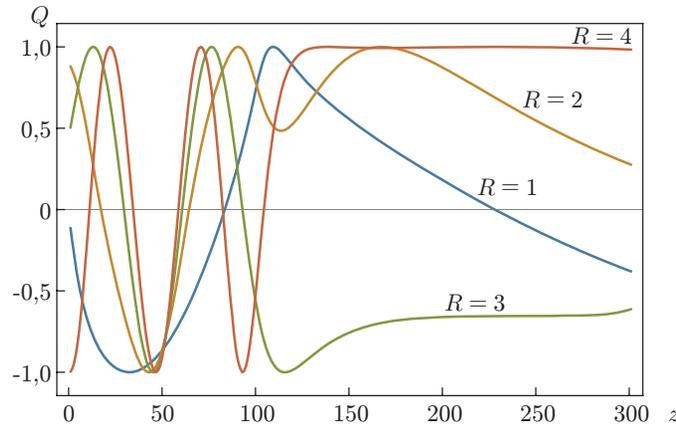


Рис. 4. Зависимости степени поляризации люминесценции $Q(z)$ на оси z от разных радиусов спирали R

из (28) получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{4d\pi}{\varepsilon_h} \int_{s \in \gamma} \frac{[3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_r)\mathbf{e}_r - \boldsymbol{\mu}]}{|\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{r}|^3} ds. \quad (29)$$

Здесь $\mathbf{e}_r(s) \approx (\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{r})/|\boldsymbol{\gamma}(s) - \mathbf{r}|$; $\boldsymbol{\mu}(s, u) = N(s, u)\mathbf{e}_n(s) + B(s, u)\mathbf{e}_b(s)$. Интеграл в правой части (29) берётся по всей цепочке. На рис. 4 приведены зависимости коэффициента поляризации $Q(z) = (|E_x|^2 - |E_y|^2)/(|E_x|^2 + |E_y|^2)$ на оси z (на интервале $z \in (0, 100)$, $\mathcal{P} = 1$) от разных радиусов спирали R в случае периодического возбуждения среды, описываемого формулой (27). Вне спирали $Q(z)$ стремится к постоянному значению, которое зависит как от геометрических параметров спирали, так и от формы возбуждения.

Заключение. В данной работе показано, что в случае спиральной молекулярной наноцепочки диполь-дипольное взаимодействие приводит к появлению экситонов в виде периодических волн и солитонов. В пределе малых амплитуд динамика экситонов описывается нелинейными уравнениями Шрёдингера, которые имеют локализованные солитонные, периодические и другие устойчивые решения, описывающие динамику экситонных возбуждений в виде «светлых» солитонов и провалов на ненулевом пьедестале в виде «тёмных» солитонов в кольцевой наноцепочке молекул. Отметим, что в прямой цепочке ($\varkappa = 0$, $\tau = 0$) такие структуры в рамках использованных условий не образуются. Кривизна и кручение молекулярной цепочки приводят к спектральным особенностям люминесценции и поглощения среды, которые должны проявиться в поляризационных эффектах.

Циркулярный дихроизм применяется для оценки вторичной структуры, формы, складывания и связывания белков и определяется как неравномерное поглощение левого и правого циркулярно поляризованного света. Свет изменяет поляризацию при прохождении через хиральную среду. Как показано в данной работе, асимптотика поляризации люминесценции экситонов спиральной молекулы сильно зависит от формы начального возбуждения молекулярной среды. Численный анализ продемонстрировал, что в случаях однородного и стационарного возбуждений асимптотика степени поляризации поля ($z \rightarrow \infty$) не зависит от кривизны или кручения спирали. Для периодического или локализованного солитонного возбуждения асимптотика критическим образом зависит от кривизны или кручения спирали. Это свойство может быть применено при детектировании взаимодействия спиральной молекулы с окружающими наноструктурами, имеющими меньшие размеры, например с квантовыми точками. Как правило, возбуждения локализуются вблизи дефектов

или деформаций молекулярной цепочки. Измерение степени эллиптичности поляризации позволит получить информацию о наличии дефектов. Такие геометрические свойства наносистемы могут быть использованы для управления и контроля динамики экситонов и люминесценции среды путём изменения кривизны цепочки с помощью механического и теплового воздействий или формирования первоначально заданных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Knoester J.** Modeling the optical properties of excitons in linear and tubular J-aggregates // Intern. Journ. Photoenergy. 2006. ID 61364. P. 1–10.
2. **McDermott G., Prince S. M., Freer A. A. et al.** Crystal structure of an integral membrane light-harvesting complex from photosynthetic bacteria // Nature. 1995. **374**, N 6522. P. 517–521.
3. **Kirstein S., von Berlepsch H., Bottcher B. et al.** Chiral J-aggregates formed by achiral cyanine dyes // Chem. Physics and Phys. Chemistry. 2000. **1**, N 3. P. 146–150.
4. **Lightner D. A., Gurst J. E.** Organic Conformational Analysis and Stereochemistry from Circular Dichroism Spectroscopy. N. Y.: Wiley-VCH, 2000. 488 p.
5. **De Greef T. F. A., Meijer E. W.** Materials science: Supramolecular polymers // Nature. 2008. **453**, N 7192. P. 171–173.
6. **Silva G. A., Czeisler C., Niece K. L. et al.** Selective differentiation of neural progenitor cells by high-epitope density nanofibers // Science. 2004. **303**, N 5662. P. 1352–1355.
7. **Meijer E. W., Schenning A. P. H.** Marriage material in electronics // Nature. 2002. **419**, N 6905. P. 353–354.
8. **Hoeben F. J. M., Jonkheijm P., Meijer E. W., Schenning A. P. H.** About supramolecular assemblies of pi-conjugated systems // Journ. Chem. Rev. 2005. **105**, N 4. P. 1491–1546.
9. **Gaididei Yu. B., Rasmussen K. O., Christiansen P. L.** Nonlinear excitations in two-dimensional molecular structures with impurities // Phys. Rev. E. 1995. **52**, N 3. P. 2951–2962.
10. **Carbou G.** Thin layers in micromagnetism // Math. Models and Methods in Appl. Sci. 2001. **11**, N 9. P. 1529–1546.
11. **Sternberg S.** Curvature in Mathematics and Physics. Mineola — New York: Dover Publications, Inc., 2012. 415 p.
12. **Kamien R.** The geometry of soft materials: A primer // Rev. Mod. Phys. 2002. **74**, Is. 4. P. 953–971.
13. **Turner A. M., Vitelli V., Nelson D. R.** Vortices on curved surfaces // Rev. Mod. Phys. 2010. **82**, Is. 2. P. 1301–1348.
14. **Entin M. V., Magarill L. I.** Spin-orbit interaction of electrons on a curved surface // Phys. Rev. B. 2001. **64**. 085330.
15. **Entin M. V., Magarill L. I.** Electrons in a twisted quantum wire // Phys. Rev. B. 2002. **66**. 205308.
16. **Заболотский А. А.** Резонансный перенос энергии между сферической наночастицей и J-агрегатом // Автометрия. 2017. **53**, № 3. С. 81–88.
17. **Заболотский А. А.** Контроль экситонов в изогнутом пучке молекулярных агрегатов диполь-дипольным взаимодействием с квантовыми точками // ЖЭТФ. 2017. **152**, вып. 4. С. 676–684.
18. **Alen L., Eberly J. H.** Optical Resonances and Two-Level Atoms. N. Y.: Wiley & Sons, 1975. 233 p.

-
19. **Заболотский А. А.** Самоиндуцированная прозрачность циркулярно поляризованных фемтосекундных импульсов // Письма в ЖЭТФ. 2003. **77**, вып. 9. С. 558–562.
 20. **Zabolotskii A. A.** Evolution of the unidirectional electromagnetic pulses in an anisotropic two-level medium // Phys. Rev. E. 2000. **77**. 036603.
 21. **Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.** Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
 22. **Zabolotskii A. A.** Inverse scattering transform for the Yajima — Oikawa equations with nonvanishing boundary conditions // Phys. Rev. A. 2009. **80**. 063616.

Поступила в редакцию 6 февраля 2018 г.
