

усилению различий топографий возмущений в жидкости на заданной глубине и на поверхности пластинка — жидкость. Точка максимального отклонения от невозмущенного уровня на фиксированной глубине отстает от нагрузки сильнее, чем соответствующая ей точка максимального прогиба пластинки. Холмистость гребней изгибных возмущений и желоба прогиба сглаживаются с ростом глубины, при этом точки максимумов амплитуд изгибных возмущений удаляются от трассы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн.— Киев: Наук. думка, 1980.
2. Букатов А. Е. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 5.
3. Доценко С. Ф. О гравитационно-упругих и гравитационно-капиллярных неустановившихся корабельных волнах // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 5.
4. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Влияние равномерно сжатой плавающей упругой пластинки на развитие трехмерных волн в однородной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1984.— № 6.
5. Букатов А. Е., Ярошенко А. А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // ПМТФ.— 1986.— № 5.
6. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова.— Л.: Гидрометеиздат, 1967.
7. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии.— Л.: Гидрометеиздат, 1980.

Поступила 2/II 1988 г.

УДК 539.3

О КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ УПРУГО АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

А. И. Димов, А. Ф. Ревуженко

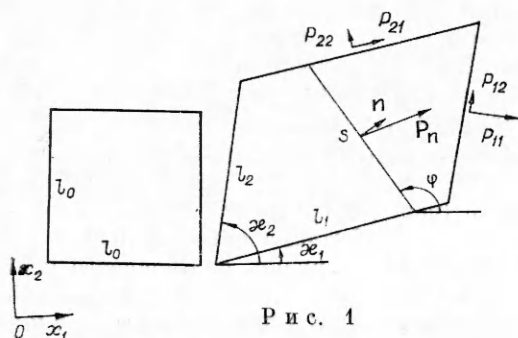
(Новосибирск)

Рассматривается последовательное описание эксперимента по однородному деформированию плоского образца. Обобщение на неоднородные состояния приводит к замкнутой системе уравнений, связывающей скорости изменения напряжений и деформаций. В качестве тестовых решаются задачи о деформировании эллиптической области с заданными на границе скоростями. Параметры материала определяются из поставленных экспериментов на двухосное растяжение резины. Показаны корректность предложенной модели и возможность решения задач о больших деформациях и поворотах.

1. Попытаемся построить уравнения конечных деформаций, исходя только из физического эксперимента и последовательного описания его результатов. Ограничимся плоским случаем. Возьмем квадратный образец однородного материала размером $l_0 \times l_0$ (например, лист резины). К противоположным сторонам приложим попарно одинаковые равномерно распределенные силы. В результате образец изменит свои размеры и примет форму параллелограмма. В эксперименте измеряем новые значения длин сторон l_1 , l_2 , угол между ними ($\pi/2 - \delta$) и действующие силы. Для определенности последние представим в виде двух составляющих, направленных по нормали и вдоль сторон (рис. 1). Таким образом, непосредственно измеряемые экспериментальные данные позволяют определить четыре функции:

$$(1.1) P_{ij} = F_{ij}(l_1, l_2, \delta, l_0), \\ i, j = 1, 2.$$

В силу однородности материала и равномерности распределения



Р и с. 1

нагрузок зависимость от последнего аргумента имеет вид

$$(1.2) \quad P_{ij} = l_0 F_{ij}(l_1/l_0, l_2/l_0, \delta).$$

Здесь уже предполагается, что поведение материала не зависит от истории нагружения: F_{ij} — функции, а не функционалы.

Поскольку из опыта известны все силы, исходные и новые размеры образца, то при обработке результатов можно использовать любые комбинации измеренных величин, например:

$$(1.3) \quad \sigma_{11}^0 = P_{11}/l_2, \quad \sigma_{12}^0 = P_{12}/l_2, \quad \sigma_{21}^0 = P_{21}/l_1, \quad \sigma_{22}^0 = P_{22}/l_1, \quad E_1 = l_1/l_0, \\ E_2 = l_2/l_0.$$

Отношения l_i/l_0 и угол δ можно считать параметрами нагружения, зависящими от времени t . Скорость изменения по t будем обозначать точкой.

Величины \dot{l}_1, \dot{l}_2 , как и l_1, l_2 , непосредственно измеряются в эксперименте (или задаются программой опыта). Поэтому для обработки используем также отношения \dot{l}_i/l_i :

$$(1.4) \quad \dot{l}_i/l_i = \dot{l}_i/l_0 \cdot l_0/l_i = \dot{E}_i/E_i = \dot{\varepsilon}_i^0 \quad (\varepsilon_i^0 = \ln E_i).$$

Зависимости (1.1)–(1.3) дают

$$(1.5) \quad \dot{\sigma}_{1i}^0 = \frac{E_1 \partial F_{1i}}{E_2 \partial E_1} \dot{\varepsilon}_1^0 + \left(\frac{\partial F_{1i}}{\partial E_2} - \sigma_{1i}^0 \right) \dot{\varepsilon}_2^0 + \frac{1}{E_2} \frac{\partial \bar{F}_{1i}}{\partial \delta} \dot{\delta}, \\ \dot{\sigma}_{2i}^0 = \left(\frac{\partial F_{2i}}{\partial E_1} - \sigma_{2i}^0 \right) \dot{\varepsilon}_1^0 + \frac{E_2 \partial F_{2i}}{E_1 \partial E_2} \dot{\varepsilon}_2^0 + \frac{1}{E_1} \frac{\partial \bar{F}_{2i}}{\partial \delta} \dot{\delta}.$$

Введем лабораторную декартову систему координат Ox_1x_2 . Компоненты скорости точек образца обозначим v_1, v_2 . В силу однородности они линейно зависят от координат: $v_i = \alpha_{ij}x_j$. Коэффициенты α_{ij} удобнее записывать в виде производных $v_{i,j}$. Рассечем мысленно образец некоторой прямой с нормалью \mathbf{n} и обозначим через \mathbf{P}_n вектор усилия, с которым одна часть образца действует на другую, s — длину разграничивающей линии, σ_{n1}, σ_{n2} — компоненты вектора $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{P}_n/s$, $\varphi, \kappa_1, \kappa_2$ — соответственно углы наклона нормали \mathbf{n} и сторон образца к оси Ox_1 (см. рис. 1). Из условий равновесия очевидно, что вектор $\boldsymbol{\sigma}_n$ не зависит от положения рассекающей линии. Его проекции

$$\sigma_{n1} = \frac{\cos(\varphi - \kappa_1)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} (\sigma_{11}^0 \sin \kappa_2 + \sigma_{12}^0 \cos \kappa_2) + \frac{\cos(\varphi - \kappa_2)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} (\sigma_{21}^0 \cos \kappa_1 - \sigma_{22}^0 \sin \kappa_1), \\ \sigma_{n2} = \frac{\cos(\varphi - \kappa_1)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} (-\sigma_{11}^0 \cos \kappa_2 + \sigma_{12}^0 \sin \kappa_2) + \frac{\cos(\varphi - \kappa_2)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} (\sigma_{21}^0 \sin \kappa_1 + \sigma_{22}^0 \cos \kappa_1).$$

Для нормали \mathbf{n} , направленной вдоль оси Ox_i , индекс n заменим на i . Компоненты σ_{ij} образуют тензор напряжений Коши:

$$(1.6) \quad \sigma_{11} = \frac{1}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} [\sigma_{11}^0 \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 + (\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 - \sigma_{22}^0 \sin \kappa_1 \cos \kappa_2], \\ \sigma_{12} = \frac{1}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} [(\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0) \cos \kappa_1 \cos \kappa_2 + \sigma_{12}^0 \cos \kappa_1 \sin \kappa_2 + \sigma_{21}^0 \sin \kappa_1 \cos \kappa_2], \\ \sigma_{21} = \frac{1}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} [(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 + \sigma_{12}^0 \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 + \sigma_{21}^0 \cos \kappa_1 \sin \kappa_2], \\ \sigma_{22} = \frac{1}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} [-\sigma_{11}^0 \sin \kappa_1 \cos \kappa_2 + (\sigma_{12}^0 + \sigma_{21}^0) \sin \kappa_1 \sin \kappa_2 + \sigma_{22}^0 \cos \kappa_1 \sin \kappa_2].$$

Усилия P_{ij} и их изменения связаны условием отсутствия вращающего момента. Наиболее просто эти условия выглядят в терминах σ_{ij} : $\sigma_{12} =$

$= \sigma_{21}$, $\dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{21}$. Из кинематических определений следует

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_j^0 &= \frac{v_{1,1} + v_{2,2}}{2} + \frac{v_{1,1} - v_{2,2}}{2} \cos 2\kappa_j + \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2} \sin 2\kappa_j, \\ \dot{\kappa}_j &= \frac{v_{2,1} - v_{1,2}}{2} + \frac{v_{2,2} - v_{1,1}}{2} \sin 2\kappa_j + \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2} \cos 2\kappa_j, \quad \dot{\delta} = \dot{\kappa}_1 - \dot{\kappa}_2. \end{aligned}$$

Перейдем к скоростям в равенствах (1.6). Учитывая выражения для $\dot{\sigma}_{ij}^0$ из (1.5) и $\dot{\varepsilon}_j^0$, $\dot{\delta}$ из (1.7), получим

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} + \sigma_{12}(v_{2,1} - v_{1,2}) &= B_{11}v_{1,1} + B_{12}v_{2,2} + B_{13} \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2}, \\ \dot{\sigma}_{22} - \sigma_{12}(v_{2,1} - v_{1,2}) &= B_{21}v_{1,1} + B_{22}v_{2,2} + B_{23} \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2}, \\ \dot{\sigma}_{12} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}(v_{2,1} - v_{1,2}) &= B_{31}v_{1,1} + B_{32}v_{2,2} + B_{33} \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2}, \end{aligned}$$

где

$$(1.9) \quad \begin{aligned} B_{1k} &= \frac{\cos \kappa_1 \sin \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{11}^k - \frac{\sin \kappa_1 \cos \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{22}^k + \frac{\cos \kappa_1 \cos \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{12}^k, \\ B_{2k} &= -\frac{\sin \kappa_1 \cos \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{11}^k + \frac{\cos \kappa_1 \sin \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{22}^k + \frac{\sin \kappa_1 \sin \kappa_2}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{12}^k, \\ B_{3k} &= \frac{1}{2} \frac{\cos(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} (\Phi_{22}^k - \Phi_{11}^k) + \frac{1}{2} \frac{\sin(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sin(\kappa_2 - \kappa_1)} \Phi_{12}^k, \quad k = 1, 2, 3, \\ \Phi_{11}^1 &= \frac{E_2}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial E_1} \cos^2 \kappa_1 + \left(\frac{\partial F_{11}}{\partial E_2} - \sigma_{11}^0 \right) \cos^2 \kappa_2 - \frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} \sin \kappa_1 \cos \kappa_1 + \\ &\quad + \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} + 2\sigma_{12}^0 \right) \sin \kappa_2 \cos \kappa_2, \\ \Phi_{11}^2 &= \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial E_1} \sin^2 \kappa_1 + \left(\frac{\partial F_{11}}{\partial E_2} - \sigma_{11}^0 \right) \sin^2 \kappa_2 + \frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} \sin \kappa_1 \cos \kappa_1 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} + 2\sigma_{12}^0 \right) \sin \kappa_2 \cos \kappa_2, \\ \Phi_{11}^3 &= \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial E_1} \sin 2\kappa_1 + \left(\frac{\partial F_{11}}{\partial E_2} - \sigma_{11}^0 \right) \sin 2\kappa_2 + \frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} \cos 2\kappa_1 - \\ &\quad - \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{11}}{\partial \delta} + 2\sigma_{12}^0 \right) \cos 2\kappa_2, \\ \Phi_{22}^1 &= \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial E_1} - \sigma_{22}^0 \right) \cos^2 \kappa_1 + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial E_2} \cos^2 \kappa_2 - \left(\frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} + 2\sigma_{21}^0 \right) \sin \kappa_1 \cos \kappa_1 + \\ &\quad + \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} \sin \kappa_2 \cos \kappa_2, \\ \Phi_{22}^2 &= \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial E_1} - \sigma_{22}^0 \right) \sin^2 \kappa_1 + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial E_2} \sin^2 \kappa_2 + \left(\frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} + 2\sigma_{21}^0 \right) \sin \kappa_1 \cos \kappa_1 - \\ &\quad - \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} \sin \kappa_2 \cos \kappa_2, \\ \Phi_{22}^3 &= \left(\frac{\partial F_{22}}{\partial E_1} - \sigma_{22}^0 \right) \sin 2\kappa_1 + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial E_2} \sin 2\kappa_2 + \left(\frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} + 2\sigma_{21}^0 \right) \cos 2\kappa_1 - \\ &\quad - \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{22}}{\partial \delta} \cos 2\kappa_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}^1 &= -\sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 + \left(\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial E_1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial E_1} + \sigma_{21}^0 \right) \cos^2 \kappa_1 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial E_2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial E_2} + \sigma_{12}^0 \right) \cos^2 \kappa_2 - \\
&\quad - \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial \delta} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial \delta} \right) (\sin \kappa_1 \cos \kappa_1 - \sin \kappa_2 \cos \kappa_2), \\
\Phi_{12}^2 &= -\sigma_{12}^0 - \sigma_{21}^0 + \left(\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial E_1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial E_1} + \sigma_{21}^0 \right) \sin^2 \kappa_1 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial E_2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial E_2} + \sigma_{12}^0 \right) \sin^2 \kappa_2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial \delta} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial \delta} \right) (\sin \kappa_1 \cos \kappa_1 - \sin \kappa_2 \cos \kappa_2), \\
\Phi_{12}^3 &= \left(\frac{E_1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial E_1} + \frac{\partial F_{21}}{\partial E_1} + \sigma_{21}^0 \right) \sin 2\kappa_1 + \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial E_2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial E_2} + \sigma_{12}^0 \right) \sin 2\kappa_2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{E_2} \frac{\partial F_{12}}{\partial \delta} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial F_{21}}{\partial \delta} \right) (\cos 2\kappa_1 - \cos 2\kappa_2).
\end{aligned}$$

Здесь в левой части выделены яуманновские производные тензора напряжений [1]. Коэффициенты B_{ij} в системе (1.8) есть мгновенные упругие модули материала в данном состоянии. Для изотропного материала их выражение в главных осях тензора напряжений получено в [2, 3]. Следует подчеркнуть, что (1.1) и (1.8), (1.9) — одни и те же соотношения, описывающие в разных терминах поведение конечного образца при произвольных деформациях. При выводе (1.8), (1.9) дополнительные гипотезы не вводились и использовались только новые естественные определения и данные макроопыта. Такая более сложная форма записи (1.1) потребовалась в связи с тем, что она допускает обобщение на неоднородные состояния.

Пусть в деформируемом теле имеется произвольное распределение напряжений. Выделим достаточно малый элемент, в пределах которого распределение скоростей можно считать линейным, а напряженное состояние — однородным. Для него справедливы все рассмотренные выше построения (градиентные модели исключаются). При этом параметры состояния E_i , ε_i^0 , κ_i , δ , σ_{ij}^0 , σ_{ij} становятся функциями координат x_1 , x_2 . Поскольку производная по времени, обозначенная точкой, относится к фиксированному материальному элементу, то в неоднородном случае ей соответствует полная производная $\dot{} + v_i \partial / \partial x_i$, где, как обычно, $\partial / \partial t$ — частная производная при фиксированных координатах x_i . Соотношения (1.8), (1.9) вместе с уравнениями равновесия

$$(1.10) \quad \frac{\dot{}}{\partial x_1} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = 0$$

образуют замкнутую систему относительно пяти неизвестных: $\partial \sigma_{11} / \partial t$, $\partial \sigma_{12} / \partial t$, $\partial \sigma_{22} / \partial t$, v_1 , v_2 . Ее решение дает изменение состояния деформируемого тела за один малый шаг нагружения. В качестве известных в системе фигурируют параметры σ_{ij} , σ_{ij}^0 , κ_i , E_i , характеризующие уже достигнутое состояние. После решения задачи их новые значения пересчитываются по формулам (1.4), (1.5), (1.7), (1.8). Таким образом, система (1.8) — (1.10) и формулы (1.4), (1.5), (1.7) позволяют решать задачи о произвольных деформациях анизотропного упругого тела.

Далее, формулы (1.1) должны удовлетворять ограничениям общего характера, формулировка которых позволяет сузить класс необходимых экспериментов по их определению. Первое ограничение такого характе-

ра энергетическое: на любом замкнутом пути деформирования работа должна равняться нулю. Рассмотрим такие пути в окрестности некоторого однородного состояния ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^H$), когда изменением упругих коэффициентов B_{km} ($k, m = 1, 2, 3$) в (1.8) можно пренебречь. Пусть при $0 \leq t \leq 1$ распределение скоростей

$$(1.11) \quad v_i = \dot{x}_i = h\varphi_{ij}(t)x_j, \quad h \ll 1.$$

Требование замкнутости контура $x_i(0) = x_i(1)$ дает

$$(1.12) \quad \Phi_{ij}(1) + h \int_0^1 \varphi_{im} \Phi_{mj} dt = O(h^2) \quad \left(\Phi_{ij}(t) = \int_0^t \varphi_{ij}(\tau) d\tau \right).$$

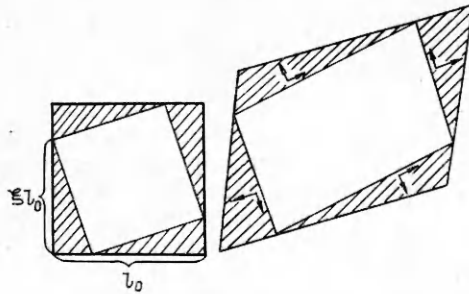
Рассматривая (1.8) и (1.11) как обыкновенные дифференциальные уравнения, разложим их решение по малому параметру h и составим выражение для работы внешних сил: $W = \int_0^1 \sigma_{ij} v_{i,j} V dt$ ($V = V_0(1 + h\Phi_{11} + h\Phi_{22}) + O(h^2)$ — объем). Условия равенства этой работы нулю для любых функций $\varphi_{ij}(t)$, удовлетворяющих (1.12), имеют вид $B_{12} + \sigma_{11} = B_{21} + \sigma_{22}$, $B_{31} + \sigma_{12} = B_{13}/2$, $B_{32} + \sigma_{12} = B_{23}/2$ (в силу произвольности начальных напряжений σ_{ij}^H индекс n можно опустить). С учетом последних равенств связи (1.8) можно переписать как

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \sigma_{12} \left(\frac{3}{2} v_{1,2} - \frac{1}{2} v_{2,1} \right) + \sigma_{11} v_{2,2} &= \\ &= K_{11} v_{1,1} + K_{12} v_{2,2} + K_{13} (v_{1,2} + v_{2,1}), \\ \dot{\sigma}_{22} + \sigma_{12} \left(\frac{1}{2} v_{1,2} - \frac{3}{2} v_{2,1} \right) + \sigma_{22} v_{1,1} &= K_{12} v_{1,1} + K_{22} v_{2,2} + K_{23} (v_{1,2} + v_{2,1}), \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{\sigma_{11}}{2} \left(\frac{1}{2} v_{1,2} - \frac{3}{2} v_{2,1} \right) - \frac{\sigma_{22}}{2} \left(\frac{3}{2} v_{1,2} - \frac{1}{2} v_{2,1} \right) + \frac{\sigma_{12}}{2} (v_{1,1} + v_{2,2}) &= \\ &= K_{13} v_{1,1} + K_{23} v_{2,2} + K_{33} (v_{1,2} + v_{2,1}) \end{aligned}$$

($K_{11} \dots K_{33}$ — известные комбинации B_{km} и σ_{ij}).

При переходе от (1.8) к (1.13) в левой части естественным образом выделились компоненты симметричного тензора, который является объективной производной напряжений. Условие потенциальности есть просто условие симметрии тензора 4-го ранга, связывающего ее со скоростями деформаций. В [2] также вводится мера изменения напряжений, для которой матрица мгновенных упругих модулей симметрична. Компоненты этой скорости отличаются от левой части (1.13) слагаемыми $(1/2)(\sigma_{ik} v_{k,j} + \sigma_{jk} v_{k,i})$.

Второе ограничение общего характера относится к случаю, когда среда изотропна. Выделим на образце в исходном состоянии «новый» образец — квадрат меньших размеров, определяемый параметром $0 \leq \xi \leq 1$ (рис. 2). Заштрихованные треугольники будем рассматривать как часть нагружающего устройства. Тогда условия равновесия и однородности деформации позволяют найти усилия, приложенные к «новому» образцу, и все его геометрические характеристики. В силу изотропии при любом $0 \leq \xi \leq 1$ они должны быть связаны теми же зависимостями (1.1). Это дает четыре функциональных уравнения на четыре функции F_{ij} . Их общее решение удается найти, используя следующее обстоятельство.



Р и с. 2

При любой фиксированной деформации исходного образца, достигнутой к моменту $t = t^0$, свободный параметр ξ может быть выбран так, чтобы соответствующий «новый» образец стал при $t = t^0$ прямоугольным. Верно и обратное: если для исходного образца ограничиться только классом нагружений без сдвига, то, пользуясь произволом ξ , всегда можно найти такой «новый» образец, который испытает любую наперед заданную деформацию. Это означает, что для получения полных характеристик изотропного материала достаточно провести эксперименты только на двухосное растяжение. После этого надо выразить функции $F_{ij}(\dots, \delta)$ через $F_{ij}(\dots, 0)$ и подставить в (1.9). Этот путь связан с громоздкими выкладками. Тот же окончательный результат получается, если от соотношений, описывающих опыт на двухосное нагружение, перейти к уравнениям типа (1.13) непосредственно. Для интерпретации опыта в качестве аргументов удобнее взять $k_i = l_0^2/l_i^2 = E_i^{-2}$:

$$(1.14) \quad \sigma_{11}^0 = G(k_1, k_2), \quad \sigma_{22}^0 = G(k_2, k_1), \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 \equiv 0.$$

Пусть система координат $Ox'_1x'_2$, оси которой направлены вдоль ступен образца, повернута относительно лабораторной на угол α . Тогда формулы (1.6) дают

$$(1.15) \quad \sigma_{11} = G(k_1, k_2) \cos^2 \alpha + G(k_2, k_1) \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{22} = G(k_1, k_2) \sin^2 \alpha + G(k_2, k_1) \cos^2 \alpha, \quad \sigma_{12} = [G(k_1, k_2) - G(k_2, k_1)] \sin \alpha \cos \alpha.$$

Здесь возникает проблема описания сложного догружения. Если в момент t образец растянут вдоль осей Ox'_1, Ox'_2 до значений $k_1(t_0), k_2(t_0)$ и испытывает произвольное однородное догружение, характеризуемое малыми смещениями $v_i dt$, то в общем случае он перестает быть прямоугольным. Так как состояние рассматриваемого образца выходит за рамки опыта на двухосное нагружение, непосредственно использовать соотношения (1.14) в следующий момент $t^0 + dt$ нельзя. Эту трудность удается преодолеть, используя понятие «нового» образца. Как указывалось выше, последний всегда можно выбрать так, что к моменту $t^0 + dt$ он деформируется в прямоугольник. Тогда его ориентация и размеры определяют значения $\alpha(t^0 + dt), k_1(t^0 + dt), k_2(t^0 + dt)$. Таким образом, α, k_i как функции времени описывают не эволюцию состояний какого-то элемента, состоящего из одних и тех же материальных частиц, а процесс деформирования в целом:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} \dot{k}_1 &= -2k_1[v_{1,1} \cos^2 \alpha + (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin \alpha \cos \alpha + v_{2,2} \sin^2 \alpha], \\ \dot{k}_2 &= -2k_2[v_{1,1} \sin^2 \alpha - (v_{1,2} + v_{2,1}) \sin \alpha \cos \alpha + v_{2,2} \cos^2 \alpha], \\ \dot{\alpha} &= \frac{v_{2,1} - v_{1,2}}{2} + \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \left[\frac{v_{1,1} - v_{2,2}}{2} \sin 2\alpha - \frac{v_{1,2} + v_{2,1}}{2} \cos 2\alpha \right]. \end{aligned}$$

Если продифференцировать равенства (1.15), то с использованием (1.16) их можно привести к виду (1.13). При этом получаются следующие значения упругих модулей:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} K_{11} &= Q_1 \frac{\sin^2 2\alpha}{2} + Q_2 \cos 2\alpha + Q_3, \quad K_{12} = -Q_1 \frac{\sin^2 2\alpha}{2} + H, \\ K_{22} &= Q_1 \frac{\sin^2 2\alpha}{2} - Q_2 \cos 2\alpha + Q_3, \quad K_{33} = -Q_1 \frac{\sin^2 2\alpha}{2} + Q_4, \\ K_{13} &= [-Q_1 \cos 2\alpha + Q_2] \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad K_{23} = [Q_1 \cos 2\alpha + Q_2] \frac{\sin 2\alpha}{2}, \end{aligned}$$

где

$$(1.18) \quad Q_1 = -\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} [G(k_1, k_2) - G(k_2, k_1)] - k_1 \frac{\partial G(k_2, k_1)}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial G(k_2, k_1)}{\partial k_2} - Q_2,$$

$$Q_2 = -k_1 \frac{\partial G(k_1, k_2)}{\partial k_1} + k_2 \frac{\partial G(k_2, k_1)}{\partial k_2}, \quad Q_3 = -k_1 \frac{\partial G(k_1, k_2)}{\partial k_1} - k_2 \frac{\partial G(k_2, k_1)}{\partial k_2}, \quad Q_4 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right) G(k_1, k_2) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right) G(k_2, k_1), \quad H =$$

$$= G(k_1, k_2) - 2k_2 \frac{\partial G(k_1, k_2)}{\partial k_2}.$$

здесь использовано условие существования потенциала, которое в данном случае имеет вид $H(k_1, k_2) = H(k_2, k_1)$.

Соотношения (1.17) показывают, что в общем случае модули K_{13} , $K_{23} \neq 0$, т. е. при наличии начальных напряжений среда по отношению к малой догрузке ведет себя как анизотропная, хотя и является изотропной «в большом». Этот факт можно трактовать как анизотропию, наведенную имеющимися в среде напряжениями [3, 4] в противовес «врожденной» анизотропии, описываемой уравнениями (1.8), (1.9).

Таким образом, для изотропного упругого тела замкнутая система уравнений относительно $\partial \sigma_{11}/\partial t$, $\partial \sigma_{22}/\partial t$, $\partial \sigma_{12}/\partial t$, v_1 , v_2 имеет вид (1.10), (1.13), (1.17), (1.18). Пересчет на следующий шаг параметров σ_{ij} , k_i , α , фигурирующих в коэффициентах этой системы, осуществляется по (1.13), (1.16).

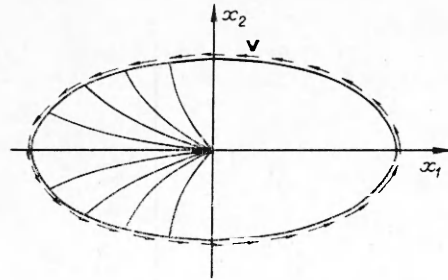
2. Для определения функции G были поставлены опыты на двухосное растяжение резины в условиях плоского напряженного состояния. Образец размером 120×120 мм и толщиной 0,4 мм располагался горизонтально и растягивался семью тягами вдоль каждой стороны. Для обеспечения параллельности тяг имелась возможность перемещения их вдоль меняющих свою длину сторон образца. Деформации измерялись в середине образца на базе 80 мм. Усилия P_1 , P_2 передавались через блоки от подвешенных грузов. Максимальная деформация ($E_1 - 1$) в опыте составляла 60%. Резина обнаружила свойство ползучести. Поэтому перед каждым замером делалась выдержка не менее 2 мин. Этого было достаточно, чтобы деформация ползучести снизилась до погрешности измерений 1–2%.

Для обработки результатов за основу взят простейший вид функции G , удовлетворяющий условиям существования упругого потенциала, изотропии и несжимаемости — диаграмма Муни:

$$(2.1) \quad G(k_1, k_2) = 2 \sqrt{k_1 k_2} \left[C_1 \left(\frac{1}{k_1} - k_1 k_2 \right) + C_2 \left(\frac{1}{k_1 k_2} - k_2 \right) \right]$$

(постоянные материала C_1 , C_2 рассчитаны методом наименьших квадратов на основе 52 замеров: $C_1 = 155$ Н/м, $C_2 = 7,23$ Н/м). При этом среднеквадратичная невязка уравнений (2.1) равна 1,34 Н/м, что по отношению к характерным значениям σ_1 , σ_2 находится на уровне ошибок измерения.

3. Для проверки теоретических построений и разработанного алгоритма проведена серия численных расчетов. В качестве тестовой решалась



Р и с. 3

безразмерная задача о деформировании эллиптической области с полуосями $a = 1/\lambda$, $b = 1$, $\lambda < 1$ (рис. 3). Подробно эта задача рассматривалась в [5]. На границе задавались обе компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(x_1, x_2)$. Вектор направлен по касательной к границе и определялся либо равенством А: $|\mathbf{v} \times \mathbf{r}| = 1$ (кеплеровский закон обращений), либо равенством В: $|\mathbf{v}| = 1$ (\mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из центра эллип-

са). В исходном состоянии начальные напряжения отсутствуют. Через определенное время Tn ($n = 1, 2, \dots$) все граничные точки возвращаются в свое исходное положение. Для задачи A $T = 2\pi/\lambda$, для B $T = L$ (L — длина границы). Необходимым условием корректности модели и алгоритма является выполнение следующих требований: в обеих задачах через время T все внутренние точки должны возвращаться в свое исходное положение; все компоненты напряжений через время $Tn/2$ должны обращаться в нуль; материальные точки, расположенные вначале на осях, в моменты $t = Tn/4$ проходят через оси; в задаче A распределение напряжений, деформаций и их скоростей (в смысле любых определений) должно быть всегда однородным [6]. Расчеты проводились для областей с полуосями $a = 2; 1,6; 1,2$ и $b = 1$. Применялся метод конечных элементов с линейной интерполяцией перемещений. На каждом шаге нагружения решалась задача (1.10), (1.13), (1.17), (1.18), после чего пересчитывались напряжения и деформации во всей области. При использовании определяющих уравнений в форме (1.13) матрица жесткости получается симметричной. Выполнение этого свойства, а также уравнений равновесия периодически контролировалось численно в ходе решения задачи.

Система относительно перемещений решалась методом последовательной верхней релаксации с ускоряющим множителем 1,4—1,6. За начальное приближение бралось решение на предыдущем шаге, при этом точность 10^{-5} в равномерной метрике достигалась обычно за 30—50 итераций.

Для увеличения точности аппроксимации применялась схема предиктор — корректор. При решении задачи B , шаге нагружения $\Delta t = T/400$ и дискретизации области на 310 элементов напряжения при $t = T/2$ обнулялись с точностью 0,6 % по отношению к максимальным, появляющимся за все время нагружения. На рис. 3 показаны последовательные стадии деформирования материальной кривой, которая в начальный момент совпадала с малой полуосью эллипса. По методике [5, 6] были поставлены эксперименты на резине, которые показали удовлетворительное совпадение с расчетом.

В задаче A распределение напряжений, деформаций и их скоростей получилось однородным. При $t = T/2$ напряжения возвратились к нулевым значениям с точностью до 0,7 %.

Для сравнения задача B решалась в рамках уравнений, не учитывающих наведенную анизотропию материала: в соотношениях (1.8) модули B_{km} брались из линейной упругости: $B_{13} = B_{23} = B_{31} = B_{32} = 0$, $B_{11} = B_{22} = \lambda + 2\mu$, $B_{12} = B_{21} = \lambda$, $B_{33} = 2\mu$ (λ , μ — константы Ламэ). При этом матрица жесткости получается несимметричной. Все внутренние точки возвращаются к исходным положениям, но напряжения при $t = T/2$ не обращаются в нуль, а составляют 10—15 % от максимальных.

В настоящее время при решении задач с большими деформациями применяются два основных подхода. Первый исходит из конечных соотношений между выбранными мерами напряжений и деформаций и оперирует с существенно нелинейными уравнениями [7—9]. При этом обычно используются лагранжевы координаты, так как это позволяет решать задачу для области с известной границей.

При втором (инкрементальном) подходе рассматривается весь процесс деформирования тела из начальной конфигурации в конечную. Он представляется последовательностью малых шагов догружения, в пределах каждого из которых отклик среды на внешнее воздействие можно считать линейным, а область, занимаемую телом, неизменной. Это позволяет свести исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач с известными границами. Кроме того, такой способ описания естествен и с механической точки зрения, так как реально процесс нагружения всегда осуществляется постепенно и деформируемое тело проходит всю последовательность промежуточных состояний между начальным и конечным. Этот подход возможен как в лагранжевых [10—13], так и в эйлеровых [14] координатах. Данная работа выполнена с использованием эйлеровых координат в рамках второго подхода.

Итак, последовательное описание эксперимента на однородное нагружение приводит к естественной замкнутой модели, которая предсказывает появление наведенной анизотропии, что необходимо для правильного учета эффектов сложного нагружения. Модель и алгоритм удовлетворяют сформированным тестовым требованиям, согласуются с опытом и позволяют решать задачи о больших деформациях упругого анизотропного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.— М.: ИЛ, 1963.
2. Хилл Р. Некоторые вопросы поведения изотропных упругих твердых тел при наложении малой деформации на конечную // Проблемы механики твердого деформированного тела.— Л.: Судостроение, 1970.
3. Балабух Л. И., Яковенко М. Г. Об учете деформационной анизотропии в задачах устойчивости изотропных упругих тел // Механика деформируемых тел и конструкций.— М.: Машиностроение, 1975.
4. Никитин Л. В. Об анизотропии упругой среды с начальными напряжениями // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1983.— № 12.
5. Ревуженко А. Ф., Чаньшев А. И., Шемякин Е. И. Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования.— Новосибирск: Наука, 1985.
6. Ревуженко А. Ф. Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ.— 1986.— № 5.
7. Doyl T. C., Ericksen J. L. Nonlinear elasticity // Adv. Appl. Mech.— 1956.— V. 4.— P. 53.
8. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.
9. Черных К. Ф. Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // ПМ.— 1977.— Т. 13, № 1.
10. Green A. E., Rivlin R. S., Shield R. T. General theory of a small elastic deformation superposed on finite elastic deformations // Proc. Roy. Soc. A.— 1952.— V. 211, N 1104.
11. Гузь А. Н. К вопросу о линеаризованных задачах теории упругости // ПМ.— 1972.— Т. 8, № 1.
12. Гузь А. Н. Об аналогиях между линеаризованными и линейными задачами упругости при однородных начальных состояниях // ПМ.— 1972.— Т. 8, № 5.
13. Баев Л. В., Коробейников С. Н. Выпучивание круговой цилиндрической оболочки за пределом упругости при действии осевой силы и бокового давления // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГи СО АН СССР, 1982.— Вып. 55.
14. Gdala M. S., Oravas G. A' E., Dokainish M. A. A consistent Eulerian formulation of large deformation problems in statics and dynamics // Intern. J. Nonlinear Mech.— 1983.— V. 18.— P. 21.

Поступила 25/VI 1987 г.,
в окончательном варианте — 19/XI 1987 г.

УДК 532. 72; 669.015.23

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСПАРЕНИИ КАПЛИ В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ ВЕЩЕСТВА

С. Д. Трайтак

(Москва)

В [1] рассмотрена задача о массообмене капли со средой, находящейся в поле звуковой волны с амплитудой смещения много меньше и длиной волны много больше радиуса капли. Возникающие при этом в окрестности капли стационарные вторичные течения и диффузионный перенос летучего вещества можно изучать в приближении динамического и диффузионного погранслоев. В [1] показано, что для многих встречающихся на практике случаев вклад от пульсационного переноса диффундирую-