ЛИТЕРАТУРА

1. **Johnson J. N.** Dynamic fracture and spallation in ductile solids // J. Appl. Phys.— 1981.— V. 52, N 4.
2. **Уилкинс М. Л.** Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидромеханике.— М.: Мир, 1967.
3. **Carrol M. M., Holt A. C.** Static and dynamic pore-collapse for ductile porous materials // J. Appl. Phys.— 1972.— V. 43, N 4.
4. **Белов Н. Н., Корнеев А. И., Николаев А. П.** Численный анализ разрушений в плитах при действии импульсных нагрузок // ПМТФ.— 1985.— № 3.
5. **Иванов А. Г., Клещевников О. А. и др.** Откол в стали // ФГВ.— 1981.— № 6.
6. **Белов Н. Н., Корнеев А. И., Симоненко В. Г.** Исследование влияния прослойки из пористого материала на откольное разрушение металлических плит.— М., 1985.— Деп. в ВИНИТИ 25.12.85, № 8859—В85.
7. **Шубин Е. П.** О закономерностях изменения импульса давления на поверхности преграды вблизи заряда ВВ // ФГВ.— 1965.— № 3.
8. **Баум Ф. М., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др.** Физика взрыва.— М.: Наука, 1975.
9. **Райнхарт Дж.** Некоторые экспериментальные данные о напряжениях, вызванных взрывом // Механика.— 1953.— № 4.

Поступила 4/II 1987 г.

УДК 539.4

УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ ШАРОВЫХ ПОР

В. А. Буряченко, А. М. Липанов

(*Москва*)

Рассматривается композитная среда, состоящая из однородной изотропной матрицы и шаровых пор, насыщенных газом. Характер расположения пор принимается статистически-однородным. Ранее с помощью предложенного метода эффективного поля [1—3] получены уравнения состояния газонасыщенных пористых сред в предположении малых деформаций пор и среды в целом [1]. В случае общих типов больших деформаций естественно рассматривать методы решения при помощи последовательных приближений [4], что было сделано для композитных сред методом условных моментных функций [5]. Сильным допущением метода условных моментных функций является предположение об однородности полей напряжений в пределах каждого компонента, что приводит к значительным погрешностям в оценке эффективных параметров линейно-упругих сред в сравнении с методом эффективного поля [1, 2]. Анализ произвольно больших деформаций рассмотрен для частного случая изотропного деформирования материала с шаровыми порами и несжимаемой матрицей с использованием ячеистой модели [6, 7]. В данной работе решена аналогичная задача с учетом действия давления газа в порах с помощью привлечения идей метода эффективного поля [1, 2], хорошо себя зарекомендовавшего при исследовании линейных задач микронеоднородных сред.

1. Физическая модель. В ряде практически важных задач представляет интерес исследование объемного деформирования резиноподобных материалов с малой ($\leqslant 1\%$) пористостью. Для определенности будем описывать деформационные свойства матрицы потенциалом Муни [4]. В линейных задачах газонасыщенных пористых сред показано [1], что для шаровых пор в несжимаемой матрице эффекты бинарного взаимодействия включений при малой пористости несущественны и эффективный объемный модуль определяется решением линейно-упругой задачи об одиночном включении, находящемся в матрице с заданным на бесконечности некоторым эффективным полем напряжений. Поэтому можно считать допустимой ячеистую модель [6, 7], предполагающую эквивалентность деформационных свойств пористой среды и толстостенной сферической оболочки с отношением объемов поры и шарового элемента, равного пористости композитной среды. В данной работе используем позитивные идеи метода эффективного поля и поместим шаровой элемент в матрицу с заданным на бесконечности эффективным полем напряжений, отличным от действующего. Параметры этого поля найдем самосогласованным методом эффективного поля [1, 3]. Метод позволяет отказаться от постулирования связи относительных размеров шарового элемента с пористостью среды, но предполагает пористость столь малой, что при возможной большой деформации поверхности пор деформации поверхности шарового элемента малы.

2. Метод эффективного поля в линейных задачах микронеоднородных сред. Приведем некоторые полезные в дальнейшем соотношения, следующие из [1, 2]. Пусть в линейно-упругой среде с модулем L_0 распределено пуассоновское множество $X = (x_k, r_k, V_k)$ шаровых пор v_k с центрами в x_k, радиусами r_k, характеристическими функциями V_k и давлением p газа в порах. Тогда уравнение состояния материала имеет вид

$$\sigma(x) = (1 - V(x))L_0\varepsilon(x) - V(x)q. \tag{2.1}$$

Здесь $q = p\delta_{ij}$ — двухвалентный тензор; $V(x) = \bigcup\limits_k V_k(x)$; σ и ε — тензоры напряжений деформаций. При изотропности компонент

$$L_0 = (3k_0,\ 2\mu_0) = 3k_0N_1 + 2\mu_0N_2,$$

$$N_1 = (1/3)\delta_{ij}\delta_{kl},\ N_2 = (1/3)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - (2/3)\delta_{ij}\delta_{kl}).$$

Уравнение (2.1) отличается от принятого в [8]

$$\sigma(x) = (1 - V(x))L_0(x)\varepsilon(x) + (L_2\varepsilon(x) - q_0)V(x), \tag{2.2}$$

где $L_2 = (3k_2,\ 2\mu_2)$ — изотропный модуль упругости поровой фазы; $\mu_2 = 0$ — модуль сдвига; $k_2 \neq 0$; $q_0 = p_0\delta_{ij}$; p_0 — давление газа в недеформированном исходном материале. Использование текущего давления p (2.1), а не начального p_0 (2.2) приводит к «исчезновению» объемного модуля поровой фазы и упрощению дальнейших выкладок.

Подстановка (2.1) в уравнение равновесия $\operatorname{div}\sigma = 0$ и последующее решение полученных соотношений методом эффективного поля [1] позволяют оценить эффективные параметры L_*, ε_q уравнения макросостояния

$$\langle\sigma\rangle = L_*(\langle\varepsilon\rangle - \varepsilon_q),\ \varepsilon_q = \left(L_*^{-1} - L_0^{-1}\right)_q \tag{2.3}$$

($\langle\ldots\rangle$ означает операцию осреднения по микрообъему пористой среды). В случае шаровых пор одного размера получим [1] $L_* = (3k_*,\ 2\mu_*)$, где

$$3k_* = (4\mu_0/c)\,[1 - (29/24)\,c]; \tag{2.4}$$

$$2\mu_* = 2\mu_0\,\{1 + (5/3)\,c\,[1 - (35/24)\,c]^{-1}\}^{-1}. \tag{2.5}$$

Здесь члены в квадратных скобках, описывающие бинарное взаимодействие включений, несущественны при малой пористости $c = \langle V\rangle$ по сравнению с членами, полученными из решения задачи об одиночной поре, находящейся в матрице с заданным на бесконечности эффективным полем $\bar{\varepsilon}$ [1], равным в данном случае

$$\bar{\varepsilon} = D^{\varepsilon}(\langle\varepsilon\rangle + J),\ D^{\varepsilon} = ([1 - (29/24)c]^{-1},\ [1 - (35/24)c]^{-1}),\ J = ((5/24)cp,\ 0). \tag{2.6}$$

Действительно, при пористости $c = 1$ % объемный модуль k_*, оцененный по (2.4), с учетом и без учета бинарного взаимодействия включений равен 131,7 μ_0 и 133,3 μ_0 соответственно. Модуль сдвига μ_* при малой пористости слабо зависит от c; при уменьшении c в 4 раза (от 2 до 0,5%) μ_* увеличивается лишь на 2,5 % — от 0,97 μ_0 до 0,99 μ_0.

Проанализируем необходимую в дальнейшем задачу о деформировании композитной среды, состоящей из линейно-упругой матрицы с модулем L_0 и пуассоновским множеством $X = \left(x_k, r_k', V_k, L_1^{(k)}, \alpha^{(k)}\right)$ шаровых включений v_k' с центрами в x_k, радиусами r_k', характеристическими функциями V_k, модулями $L_0 + L_1^{(k)}$ и параметром $\alpha^{(k)}$, так что локальное уравнение состояния имеет вид

$$\sigma(x) = L(x)(\varepsilon(x) - \alpha(x)). \tag{2.7}$$

Здесь $\alpha(x) = 0$, $L(x) = L_0$ при $V(x) = 0$ и $L(x) = L_0 + L_1^{(k)}$, $\alpha(x) = \alpha^{(k)}$ при $x \in v_k$. Уравнение (2.7) формально совпадает с уравнением термоупругости композитной среды [2] с нулевым коэффициентом линейного расширения матрицы. Это позволяет для оценки эффективных параметров композитной среды L_*, α_* в уравнении

$$\langle\sigma\rangle = L_* (\langle\varepsilon\rangle - \alpha_*) \tag{2.8}$$

использовать метод эффективного поля [2]

$$L_* = L_0 (I + L_0 D \langle BM_1 V\rangle)^{-1}, \quad \alpha_* = D \langle B\alpha V\rangle, \tag{2.9}$$

где выражения для тензора концентрации напряжений B на изолированном включении в бесконечной матрице и тензора концентрации напряжений D, описывающего влияние окружающих включений, приведены в [2]; $M_1(x) = (L_0 + L_1^{(k)})^{-1} - L_0^{-1}$ при $x \in V_k$.

3. Расчет шарового элемента. Рассмотрим толстостенную сферическую оболочку с внутренним и внешним радиусами в недеформированном состоянии R_1 и R_2. Деформационные свойства материала описываются потенциалом Муни с константами a_1, a_2

$$W = a_1(I_1 - 3) + a_2(I_2 - 3) \tag{3.1}$$

(I_i ($i = 1, 2, 3$) — инварианты, ассоциированные с тензором деформаций Лагранжа, которые в условиях центрально-симметричного деформирования связаны с удлинениями λ соотношениями $I_1 = 3\lambda^2$, $I_2 = 3\lambda^4$, $I_3 = \lambda^6$). Параметр удлинения λ определяет зависимость расстояний до центра оболочки точек элемента до и после деформирования $R = \lambda^{-1}r$, для внутренней и внешней поверхностей оболочки получим $r_1 = \lambda_1 R_1$ и $r_2 = \lambda_2 R_2$.

В случае нагружения оболочки внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 решение для больших деформаций шарового элемента известно [6, 9]:

$$-p_2 = a_1[1/\lambda_2^4 + 4/\lambda_2 - (1/\lambda_1^4 + 4\lambda_1)] + 2a_2[1/\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - (1/\lambda_1^2 - 2\lambda_1)] - p_1. \tag{3.2}$$

Для несжимаемого материала имеет место равенство $r_1^3 - R_1^3 = r_2^3 - R_2^3$, тогда с помощью параметра $\gamma = R_1^3/R_2^3$, характеризующего относительную долю объема поры в недеформированном шаровом элементе, найдем

$$\lambda_1^3 = (\lambda_2^3 - 1)/\gamma + 1. \tag{3.3}$$

Соотношения (3.2), (3.3) позволяют по заданным p_1, p_2 найти λ_1, λ_2. В дальнейшем выберем γ столь малым, что в выражении $\lambda_2 = 1 + \xi$ ξ мало и $\lambda_1^3 = 3\xi/\gamma + 1$. Тогда шаровой элемент можно заменить линейно-упругим шаром, деформационные свойства которого описываются уравнением (2.7) с модулями

$$L(x) = L^э = (3k^э, 2\mu^э), \ \alpha(x) = \alpha^э = 3\xi^э\delta_{ij}, \tag{3.4}$$

где $\xi^э$ найдено из решения (3.2), (3.3) при $p_2 = 0$ и $k^э = p_2/(1 + \xi^э - \lambda_2)$; $\mu^э = \mu_*$; вследствие малого влияния пористости на μ_* при малых c для $\mu^э$ использовано выражение (2.5), полученное при малых деформациях пор.

4. Оценка эффективных параметров среды. Согласно физической модели газонасыщенной пористой среды, будем считать, что ее изотропное деформирование эквивалентно изотропному деформированию композитной среды, состоящей из матрицы с модулем $L_0 = (3k_0, 2\mu_0)$, $k_0 = \infty$, $\mu_0 = 2(a_1 + a_2)$ и пуассоновского множества шаровых включений с модулем $L^э$ и параметром $\alpha^э$ (3.4). Для определенности рассмотрим включения одного размера со степенью наполнения $c^э = c_0/\gamma$ (c_0 — пористость в недеформированном состоянии). Тогда уравнение изотропного деформирова-

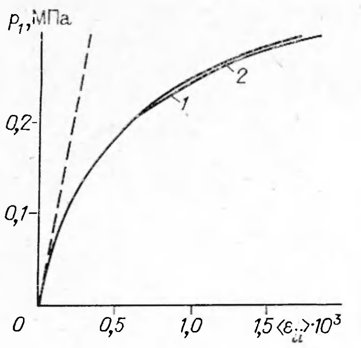

Рис. 1

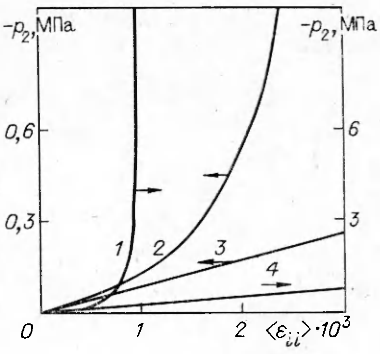

Рис. 2

ния описывается уравнениями (2.8), (2.9), в которых тензоры B, D известным образом выражаются через L_0, $L^э$, $c^э$ [2].

Параметр α_* в (2.8) зависит от давления газа p_1, которое в свою очередь определяется деформацией поровой фазы. В случае, если задана получаемая экспериментально среднеобъемная концентрация газа w в макрообласти, то, согласно законам Генри и Менделеева — Клапейрона [1],

$$p_1 = w\left[\left(1 - c\lambda_1^3\right)\Gamma + c\lambda_1^3\mu'/R'T\right]. \tag{4.1}$$

Здесь в квадратных скобках первое слагаемое с константой Генри Г описывает вклад средней концентрации растворенного в твердой фазе газа, а второе учитывает наличие в поровой фазе газа с молекулярным весом μ' при температуре T; R' — газовая постоянная. Формула (4.1) очевидным образом обобщается на смесь газов.

Заметим, что отдельные принятые в работе допущения непринципиальны и могут быть ослаблены. Действительно, существенным допущением является предположение о малых деформациях наружной поверхности шарового элемента, что позволило свести задачу к линейной (2.7) и решить ее методом эффективного поля [2]. Это предположение при больших деформациях пор приводит к необходимости выбора достаточно малого γ (3.3), что возможно лишь при малой пористости. Принятие же допущения о несжимаемости матрицы и использование потенциала Муни (3.1) потребовались лишь при аналитическом решении задачи для шарового элемента (3.2), (3.3). В общем случае может быть рассмотрен любой упругий потенциал энергии деформирования W с численным решением задачи для шарового элемента (3.4).

В качестве примера рассмотрим различные случаи изотропного нагружения газонасыщенной пористой среды. Пусть $\langle\sigma\rangle = 0$ и найдем макродеформацию среды $\langle\varepsilon\rangle$ и поровой фазы $c\left(\lambda_1^3 - 1\right)$ при различных значениях p_1. Примем характерные для каучука значения $a_1 = 0{,}1$ МПа, $a_2 = 0{,}01$ МПа [6] и $c = 10^{-3}$. На рис. 1 кривые *1* и *2* (для $\gamma = 10^{-2}$ и $2\times\times10^{-3}$) рассчитаны по нелинейной теории (2.8), (3.4), а штриховая — по линейным соотношениям (2.3), (2.4). Небольшое отличие между кривыми объясняется самосогласованностью оценок D, B (2.9), полученных методом эффективного поля. С помощью рис. 1 можно оценить различие расчетов по линейной и нелинейной моделям при умеренных значениях p_1, а использование дополнительно соотношения (4.1) позволяет найти необходимое для данного режима нагружения значение среднеобъемной концентрации газа w. На рис. 2 представлены кривые *1*, *4* и *2*, *5* объемного деформирования среды при $p_1 = 0$, $c = 10^{-3}$ и $c = 5\cdot10^{-3}$ соответственно. Линии *3*, *4* рассчитаны по линейной теории (2.3), (2.4), а *1*, *2* — по нелинейной. При отрицательном гидростатическом напряжении кривые $\langle\sigma_{ii}\rangle = \langle\sigma_{ii}\rangle(\langle\varepsilon_{ii}\rangle)$ имеют вертикальную асимптоту, которая при малых c равна $\langle\varepsilon_{ii}\rangle = c_0$ и стремится к оси ординат $\langle\varepsilon_{ii}\rangle = 0$ при уменьшении c_0. При изотропном расширении вертикальной асимптоты нет, даже при $c = 10^{-3}$ изотропное расширение среды может превысить значение $\langle \varepsilon_{ii} \rangle = 0{,}1$. Так как материал всегда содержит некоторое количество пор, то отсюда следует, что абсолютно изотропно нерастяжимых материалов не существует. Тогда возникает вопрос о правомочности использования потенциала Муни в области больших изотропных растяжений. Кроме того, параметры различных упругих потенциалов изотропно деформируемых материалов определяют, как правило, при гидростатическом сжатии [10]. Вследствие проведенного анализа использование найденных параметров в области большого гидростатического растяжения представляется некорректным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Уравнения механики газонасыщенных пористых сред // ПМТФ.— 1986.— № 4.
2. **Буряченко В. А., Липанов А. М.** Концентрация напряжений на эллипсоидальных включениях и эффективные термоупругие свойства композитных материалов // ПМ.— 1986.— Т. 22, № 11.
3. **Буряченко В. А.** Корреляционная функция полей напряжений в матричных композитах // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 3.
4. **Грин А., Адкинс Д.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды.— М.: Мир, 1965.
5. **Маслов Б. П.** Эффективные постоянные в теории геометрически нелинейных твердых тел // ПМ.— 1981.— Т. 17, № 5.
6. **Hashin Z.** Large isotropic deformation of composites and porous media // Intern. J. Solids and Structure.— 1985.— V. 21, N 7.
7. **Кристенсен Р.** Введение в механику композитов.— М.: Мир, 1982.
8. **Хорошун Л. П.** К теории насыщенных пористых сред // ПМ.— 1976.— Т. 12, № 12.
9. **Green A. E., Zerna W.** Theoretical elasticity.— Oxford: Clarendon Press, 1954.
10. **Черных К. Ф., Шубина И. М.** Об учете сжимаемости резины // Механика эластомеров.— Краснодар: Кубан. ун-т, 1978.— Вып. 263.

Поступила 24/III 1987 г.

УДК 539.378

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Л. А. Сараев

(*Куйбышев*)

Прогнозирование неупругих свойств материалов со случайными неоднородностями — одно из актуальных направлений современной механики деформируемого твердого тела. Моделирование макроскопических определяющих соотношений и вычисление эффективных характеристик таких сред помогают во многих случаях достаточно точно оценивать деформационные свойства, предельное состояние и несущую способность элементов конструкций, изготовленных из композиционных, порошковых и других конструкционных материалов. Макроскопическое поведение многокомпонентных жесткопластических и упругопластических композитов в рамках теории течения исследовано в [1, 2].

В настоящей работе рассматривается применение метода обобщенного сингулярного приближения теории случайных полей для описания малых упругопластических деформаций композиционных материалов с произвольным числом составляющих компонентов. В корреляционном приближении аналогичная задача решена в [3, 4].

Пусть микронеоднородная среда, заполняющая объем V, ограниченный поверхностью S, образована n различными упругопластическими компонентами, соединенными между собой с идеальной адгезией. Определяющие соотношения для материала каждого ее компонента задаются уравнениями

$$s_{ij} = 2\mu_s(\varepsilon_{kl})e_{ij}, \quad \sigma_{pp} = 3K_s\varepsilon_{pp} \quad (s = 1, 2, \dots, n). \tag{1}$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{pp}$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{pp}$; σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций; $\mu_s(\varepsilon_{kl})$ — модуль пластичности сдвига; K_s — объемный модуль s-го компонента ($K_s = \mathrm{const}$).