

УДК 519.6:533.7

ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ С ИНДУЦИРОВАННОЙ ОТРЫВНОЙ ЗОНОЙ ВОЗЛЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В.И. ПИНЧУКОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН,
Новосибирск*

Рассчитывается гиперзвуковое течение вязкого сжимаемого газа возле тела вращения с элементом, индуцирующим переднюю отрывную зону. Используется неявная симметричная схема для решения уравнений сжимаемого газа в произвольных криволинейных координатах. Схема имеет на стационарных решениях шестой порядок аппроксимации. Приводится сравнение интегрального коэффициента сопротивления для тела с элементом и без него.

Один из способов улучшения аэродинамического качества тел при движении с большими сверхзвуковыми и гиперзвуковыми скоростями заключается в формировании передней отрывной зоны. В результате — давление за головным скачком уплотнения уменьшается, что влечет падение силы сопротивления. Примеры исследований течений возле тел различной конфигурации с аэродинамическими элементами, индуцирующими передний отрыв, имеются в [1 – 7]. В вычислительном плане эти задачи характеризуются аэродинамическими особенностями (скачки, пограничные и сдвиговые слои), а также сложной формой тела. При исследовании подобных задач весьма распространен подход, основанный на записи исходных уравнений в произвольных криволинейных координатах в форме законов сохранения и сквозном счете течений без выделения особенностей. Одной из реализаций этого подхода является используемая здесь неявная монотонная схема высокого порядка.

Для построения разностных сеток проводятся координатные преобразования, согласованные с границами тела, а также удаление частей расчетной области, что позволяет получить разностные сетки в областях сложной формы без чрезмерного искажения ячеек. С целью сохранения точности схемы на неортогональных и неоднородных разностных сетках коэффициенты координатных преобразований аппроксимируются с тем же порядком, что и газодинамические переменные. Отметим, что многоточечные формулы для их вычисления удовлетворяют условию зануления невязки разностной схемы на постоянных в пространстве распределениях газодинамических параметров, т. е. выполняется “геометрический” закон сохранения.

1. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим компактную неявную схему интегрирования уравнений Навье — Стокса, являющуюся модификацией схемы [8 – 10]. Ограничимся случаем декартовых координат. Для произвольных криволинейных координат схема

излагается в [11]. Систему уравнений вязкого теплопроводного газа запишем в консервативной форме:

$$y^m f_t + (y^m F)_x + (y^m G)_y = mV + (A^x f_x + A^y f_y)_x + (B^x f_x + B^y f_y)_y, \quad (1)$$

где $m = 1$ в осесимметричном случае и $m = 0$ в плоском; вектор V имеет лишь одну ненулевую компоненту — в уравнении для вертикальной компоненты импульса; матрицы A, B приведены в [12] (они также содержат множитель y^m).

Введем обозначения $f_{ik}^n = f(n\tau, i\Delta x, k\Delta y)$, $\delta_x^\pm f_{ik}^n = \pm f_{i\pm 1k}^n \mp f_{ik}^n$, $\delta_y^\pm f_{ik}^n = \pm f_{ik}^{n\pm 1} \mp f_{ik}^n$, $\Delta_x^\pm = \delta_x^\pm / \Delta x$, $\Delta_y^\pm = \delta_y^\pm / \Delta y$. Как правило, при записи схемы в точке с индексами i, k, n эти индексы будут опускаться, т. е. будут приводиться, например, индексы $i + 1/2, k + 1$ и т.д. Рассмотрим неявную схему

$$y_{ik}^m \left[E - \Delta_x^- 2(\tau\sigma a)_{i+1/2}^2 \Delta_x^+ \right] \left[E - \Delta_y^- 2(\tau\sigma b)_{k+1/2}^2 \Delta_y^+ \right] (f_{ik}^* - f_{ik}^n) = \tau (V + \Delta_y^- N_{k+1/2} + \Delta_x^- M_{i+1/2} - L^n), \quad (2)$$

$$y_{ik}^m \left[E - \Delta_x^- c_{i+1/2}^x \Delta_x^+ \right] \left[E - \Delta_y^- c_{k+1/2}^y \Delta_y^+ \right] (f_{ik}^{n+1} - f_{ik}^n) = y^m (f_{ik}^* - f_{ik}^n) - \sigma\tau (L_{ik}^* - L_{ik}^n), \quad 1/2 \leq \sigma \leq 1, \quad (3)$$

где

$$c^x = \mu\gamma / (\rho \text{Pr}) + 8Ka\Delta x + a \min(0,5; 1,5) |\delta_x^+ \delta_x^- P| / (|\delta_x^+ P| + |\delta_x^- P|),$$

$$c^y = \mu\gamma / (\rho \text{Pr}) + 8Kb\Delta y + b \min(0,5; 1,5) |\delta_y^+ \delta_y^- P| / (|\delta_y^+ P| + |\delta_y^- P|).$$

В уравнении (2) величины M, N содержат диссипативные слагаемые различного рода:

$$M_{i+1/2} = A_{i+1/2}^x \Delta_x^+ f_{ik} + A_{i+1/2}^y \Delta_y^0 f_{i+1/2} + \delta_x^+ \delta_x^- \Delta x K a_{i+1/2} \delta_x^+ \delta_x^- \delta_x^+ f_{ik} - M_{i+1/2}^{\text{cor}}, \quad (4)$$

а именно, физические вязкие члены, малую диссипацию шестого порядка и корректирующие слагаемые $M^{\text{cor}}, N^{\text{cor}}$, отличные от нуля лишь вблизи зон “негладкого” решения, например, ударных волн, и предназначенные для подавления осцилляций вблизи разрывов решения (общий алгоритм их построения, позволяющий гарантировать монотонность схем произвольного порядка аппроксимации, описывается в [8, 11, 13 – 15]).

Стабилизирующий оператор уравнения (2) соответствует аппроксимациям динамических членов L . Коэффициенты стабилизирующего оператора уравнения (3) c^x, c^y включают слагаемые, которые, в соответствии анализом устойчивости Фурье, отвечают физическим вязким членам, искусственной диффузии шестого порядка (см. (4)) и монотонизирующим членам $M^{\text{cor}}, N^{\text{cor}}$. Параметры a и b — это максимальные по модулю собственные значения матриц $DF/Df, DG/Df$, т. е. $a = \sqrt{\gamma P / \rho} + |u|$, $b = \sqrt{\gamma P / \rho} + |v|$, $K = 0,8$ — эмпирический коэффициент, Pr — число Прандтля.

В уравнениях (2), (3) L — симметричные компактные аппроксимации динамических слагаемых уравнений (1):

$$L = \Delta_x^0 Q^x R^y (Fy^m)_{ik} + \Delta_y^0 Q^y R^x (Gy^m)_{ik}, \quad Q^x = E + v\delta_x^+ \delta_x^-, \quad (5)$$

$$Q^y = E + \nu \delta_y^+ \delta_y^-, \quad R^x = E + \kappa \delta_x^+ \delta_x^-, \quad R^y = E + \kappa \delta_y^+ \delta_y^-. \quad (6)$$

Выбором параметров ν , κ можно задавать второй, четвертый или шестой порядки аппроксимации приведенных выше формул для плоских невязких стационарных решений. Здесь используются значения $\kappa = 1/5$, $\nu = 1/30$, определяющие шестой порядок.

Наряду с соотношениями (5), (6) рассмотрим также упрощенные формулы второго порядка, в которые превращаются (5), (6) при $\kappa = \nu = 0$:

$$L = \Delta_x^0 (Fy^m)_{ik} + \Delta_y^0 (Gy^m)_{ik}. \quad (7)$$

Эти формулы будут использованы в расчете точного решения для выяснения сравнительной роли разных источников погрешности. Анализ Фурье позволяет при $\sigma \geq 1/2$ установить абсолютную устойчивость данной схемы для уравнений с постоянными коэффициентами. Схема при $\sigma = 1/2$ имеет второй порядок по времени.

При записи схемы вблизи границ расчетной области разностные уравнения включают значения зависимых переменных в узлах, расположенных вне расчетной области. Эти значения определялись с помощью кубической экстраполяции, что эквивалентно введению в схему локальной аппроксимационной погрешности второго порядка.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Реальная скорость уменьшения погрешности расчетных данных даже на гладких решениях в силу разных причин может не соответствовать формальному порядку аппроксимации во внутренних узлах расчетной области. Для оценки скорости сходимости схемы и влияния на погрешность криволинейных координатных сеток произведен расчет двумерного невязкого истечения газа от линейного источника в вакуум. Источник находится в точке $x = 0$, $y = 0$, решение определяется в области $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 0,6$. На границе $x = 1$ все искомые величины задаются в соответствии с точным решением, на линии симметрии $y = 0$ используется соотношение $\nu = 0$, остальные параметры здесь и параметры на границах $x = 2$, $y = 0,6$ определяются по внутренним узлам с помощью экстраполяционных формул. Вначале для расчетов были использованы формулы различных порядков. Выяснилось, что четвертый и более высокий порядки аппроксимации вызывают прекращение сходимости по времени, поэтому были применены формулы третьего порядка, причем при использовании (для сравнения) формул второго порядка погрешность значительно возросла, особенно вблизи границы $y = 0$.

Точное решение отыскивается с помощью соотношений

$$u = wx/r, \quad r = wy/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$P = \rho^\gamma, \quad w = M \sqrt{\gamma + \gamma M_A^2 (\gamma - 1)/2} / \sqrt{1 + M^2 (\gamma - 1)/2},$$

$$\rho = [1 + M_A^2 (\gamma - 1)/2]^{1/(\gamma-1)} / [1 + M^2 (\gamma - 1)/2]^{1/(\gamma-1)},$$

здесь M — число Маха определяется из уравнения $w\rho r = M_A \sqrt{\gamma r_A}$, где индекс A означает значение величины в точке $x = 1$, $y = 0$. Расчет проведен для $M_A = 3$ по схемам второго (7) и шестого (5), (6) порядков аппроксимации. Максимальное отклонение расчетных значений плотности и давления от точных,

$r = \max_{ik} |f_{ik} - f_{ik}^{\text{точ}}| / \max_{ik} (f_{ik})$, приведено в таблице для разного количества сеточных узлов.

Максимальное отклонение расчетных значений ρ и p от точных

Число узлов	Вид погрешности	Расчет по формулам		
		(6), (7)	(6), (7)	(8)
33 × 23	$r_p \cdot 10^5$	12,8	5,13	47,2
	$r_p \cdot 10^5$	12,2	6,52	98,4
45 × 33	$r_p \cdot 10^5$	4,15	2,27	20,5
	$r_p \cdot 10^5$	4,20	2,76	24,5
65 × 45	$r_p \cdot 10^5$	3,64	1,07	10,5
	$r_p \cdot 10^5$	2,84	0,916	22,7
89 × 65	$r_p \cdot 10^5$	3,19	0,479	6,12
	$r_p \cdot 10^5$	3,02	0,361	9,80
129 × 89	$r_p \cdot 10^5$	1,70	0,114	4,11
	$r_p \cdot 10^5$	1,26	0,131	5,11

Как правило, максимальные погрешности достигаются возле границ расчетной области. Первые два столбца чисел соответствуют формулам шестого порядка аппроксимации. Во втором столбце приведены данные, полученные при заданных на всех границах точных значениях газодинамических параметров, когда исчезает погрешность экстраполяционного определения зависимых переменных на границах. В третьем столбце приведены данные, соответствующие схеме второго порядка. Соотношение погрешностей на разных сетках для обычных граничных условий (первый и третий столбцы) говорит о том, что в итоге, несмотря на локальный шестой или второй порядок внутри области, схема имеет второй порядок. По-видимому, определяющее влияние на величину погрешности оказывают аппроксимации уравнений возле границ и краевые условия, не соответствующие порядку схемы для внутренних узлов. Поэтому во втором столбце, где приведены данные без погрешности экстраполяции, но с остающейся погрешностью урезания схемного шаблона возле границ, ошибка значительно меньше и скорость ее падения выше, однако она также не соответствует шестому порядку. Следует отметить: использование схемы локально высокого порядка оправдывается тем, что на всех сетках она имеет меньшую погрешность, чем схема второго порядка.

Рассмотрим результаты численного моделирования обтекания головной части затупленного тела вращения с элементом, индуцирующим переднюю отрывную зону. На рис. 1 изображены расчетная область и разностная сетка в физической плоскости. Часть узлов в расчете не участвуют. Расчетная сетка состоит из прямолинейных отрезков, соединяющих узлы на границах $A - B$ и $H - G, F - E, D - C$, и криволинейных подвижных координатных линий второго семейства, которые перестраиваются в соответствии с движением границы $A - B$, совпадающей с ударной волной.

В качестве граничных условий используются следующие: на границе $A - B$ — соотношения Ренкина — Гюгоно и экстраполяционное соотношение для давления; на границе $B - C$ — экстраполяционные соотношения типа $\partial^k f / \partial x^k = 0, k = 2$ для большинства вариантов, $k = 1$ в случае, если через данную границу из расчетной области выходит ударная волна; на границах $H - G, G - F, F - E, E - D, D - C$ — ставились два типа условий. Как правило, использовались условия прилипания, теплоизоляции, экстраполяционное условие

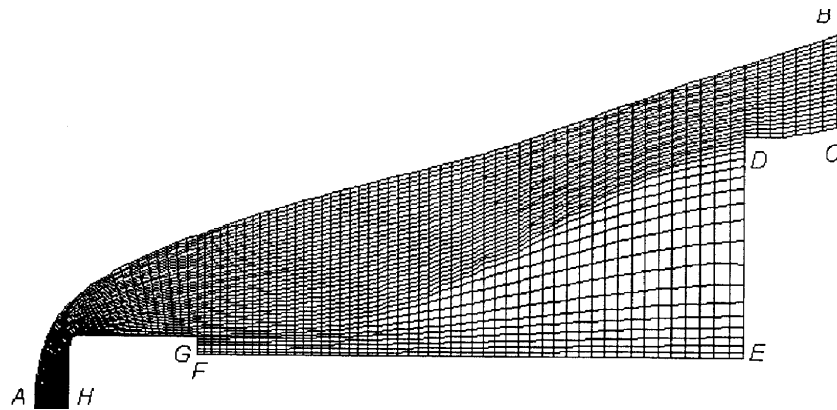


Рис. 1. Расчетная сетка.

для давления $\partial^2 P / \partial n^2 = 0$. Для исследования эффектов разреженности, влияние которых может сказываться для рассматриваемых течений с высокими числами Маха и умеренными числами Рейнольдса, в отдельных вариантах использовались

условия скольжения $u^t = \frac{\partial u^t}{\partial n} 1,26 \mu / (P \rho)^{0,5}$, $T - T_w = \frac{\partial T}{\partial n} 1,26 \mu 2 \gamma / [\text{Pr}(\gamma + 1)(P \rho)^{0,5}]$; здесь u^t — касательная к границе скорость.

Расчеты выполнены для $M_\infty = 12$, $\text{Re} = 12700$ (значения M и Re вычисляются по радиусу тела в сечении D и параметрам невозмущенного потока) на сетке из 91×39 узлов. Проведение настоящих расчетов характеризуется двумя особенностями.

Во-первых, при больших числах Маха в уравнении для полной энергии две ее компоненты — кинетическая и внутренняя — значительно отличаются друг от друга, что приводит к необходимости использования небольшого временного шага, в противном случае возможно появление отрицательных значений внутренней энергии. Поэтому первые итерации проводились при числах Куранта $K \approx 0,1 - 0,3$, далее они увеличивались приблизительно до единицы. Как известно, отрывные течения требуют относительно большого количества итераций для установления решения, в частности здесь производилось $\approx 7000 - 13000$ итераций.

Во-вторых, подвижность границы $A - B$, совпадающей с ударной волной, при фиксированных узлах в области $F - G - D - E$ порождало ухудшение “гладкости” координатного преобразования. Это вызывало понижение точности расчетов и замедление сходимости на завершающих итерациях. Поэтому после предварительного грубого установления решения производилась коррекция сетки с целью восстановления ее “гладкости”. Дальнейшие итерации также выполнялись при подвижной границе $A - B$, однако смещение ее было уже небольшим и не вызывало существенного ухудшения разностной сетки.

Ниже приведены суммарные коэффициенты сопротивления для вариантов с постоянными геометрическими размерами ($r_F = 0,3$, $r_D = 1,5$, $x_F - x_H = 0,7$, $L_{EF} = x_E - x_F = 3$) и переменным радиусом щитка аэродинамического элемента r_G :

r_G	0,5	0,4	0,304	—
C_{di}	0,383	0,347	0,372	1,640
C_{dv}	0,395	0,358	0,379	1,651

Коэффициенты сопротивления рассчитываются по формулам $C_{d(i,v)} = 2F_{d(i,v)} / (\rho u^2 \pi r_D^2)$, F_{di} — определяется давлением, F_{dv} — включает, кроме сил давления, также силы вязкого трения. В последнем столбце приведены коэффициенты сопротивления для тела без цилиндрического элемента. Из приведенных данных видно, что имеет место оптимум суммарных коэффициентов сопротивления по радиусу щитка r_G . Следует отметить, что структура течения для первых трех вариантов одинакова и включает обширную отрывную зону между щитком и основной частью тела, причем отрыв и присоединение потока приблизительно соответствуют угловым точкам G и D . В качестве примера на рис. 2 изображены линии тока для первого из вариантов.

Ниже приведены суммарные коэффициенты сопротивления для вариантов с постоянными геометрическими размерами $r_G = 0,4$, $r_F = 0,3$, $r_D = 1,5$, $x_F - x_H = 0,7$ и переменной длиной аэродинамического элемента $L_{EF} = x_E - x_F$. В последнем столбце как базовые для сравнения указаны коэффициенты сопротивления тела без цилиндрического элемента

L_{FE}	2	2,5	3	3,5	—
C_{di}	0,490	0,389	0,347	0,295	1,640
C_{dv}	0,496	0,397	0,358	0,306	1,651

Видно, что при увеличении длины иглы коэффициенты сопротивления падают. По-видимому, это объясняется тем, что расположение внешнего скачка определяется телом эквивалентной формы, включающим, кроме иглы и щитка, также отрывную зону, причем при увеличении длины иглы угол наклона скачка уменьшается, что приводит к падению давления за скачком. Естественно, это вызывает соответствующее падение коэффициентов сопротивления.

Следует отметить, что при уменьшении длины иглы структура течения начинает меняться. На рис. 3, *a* изображены линии тока для $L_{EF} = 2,5$. Видно, что отрывная зона начинает распространяться вперед, причем внутри нее за уступом образуется вторичная отрывная зона. Для контроля зависимости погрешности решения от количества сеточных узлов этот вариант просчитан также на сетке с 181×77 узлами (рис. 3, *b*). На рис. 4 приведены изолинии плотности, полученные на основной (91×39) и мелкой сетках. Следует отметить наличие на рисунках серии характерных Z -образных изгибов изолиний, которые соответствуют волне сжатия, отходящей от поверхности цилиндрического насадка и превращающейся в

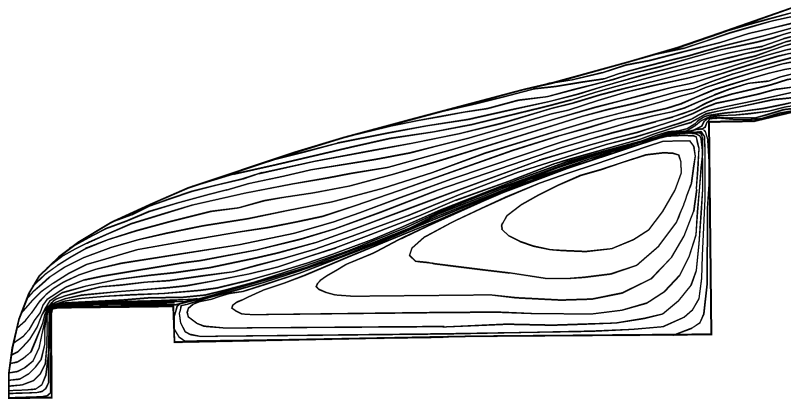


Рис. 2. Линии тока.
 $L_{FE} = 3$, $r_G = 0,5$.

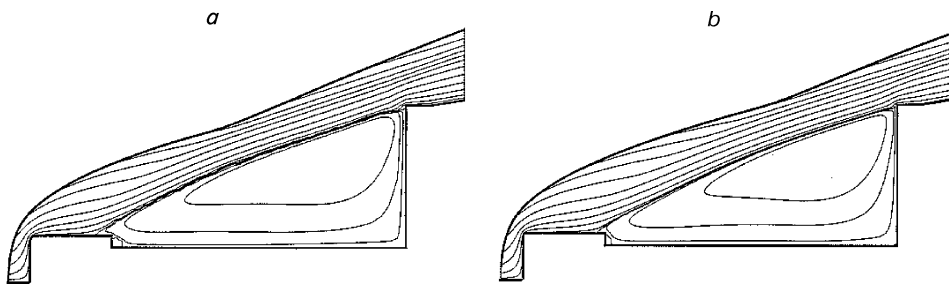


Рис. 3. Линии тока.
a — сетка 91 × 39, *b* — сетка 181 × 77.

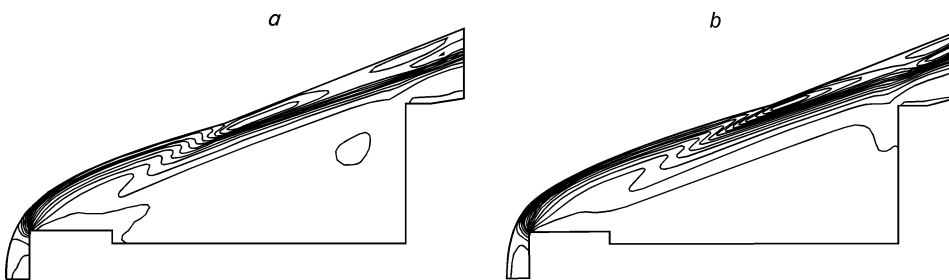


Рис. 4. Изолинии плотности.
a — сетка 91 × 39, *b* — 181 × 77.

ударную волну, которая достигает головного скачка. Эта достаточно типичная для подобных течений волна сжатия объясняет отрыв потока от поверхности насадка, который может индуцироваться только встречным градиентом давления. Естественно, максимальное отличие решений на разных сетках наблюдается вблизи внутреннего скачка.

Для исследования влияния эффектов разреженности вариант просчитан с разными граничными условиями. На рис. 5 изображены линии тока, полученные с условиями прилипания и скольжения. В последнем случае для температуры на стенке использовалось значение $T_w = 25 = 0,83T_0$, где T_0 — температура торможения. Видно, что условия скольжения привели к некоторому сдвигу точки отрыва вниз по потоку и уменьшению отрывной зоны.

Ниже приведены суммарные коэффициенты сопротивления для иглы с коническим насадком:

L_{FE}	2,5	3,0	3,5	—
C_{di}	0,522	0,413	0,339	1,640
C_{dv}	0,528	0,421	0,349	1,651

Расчеты выполнены при постоянных геометрических размерах $r_G = 0,4$, $r_F = 0,3$, $r_D = 1,5$, $x_F - x_H = 0,7$ и переменной длине аэродинамического элемента $L_{EF} = x_E - x_F$. В последнем столбце для сравнения указаны коэффициенты сопротивления тела без цилиндрического элемента.

Представляет интерес сравнение одинаковых вариантов течения возле тел, отличающихся лишь формой насадка. В случае конического насадка, казалось бы, коэффициент сопротивления должен уменьшаться, так как давление за ударной волной возле конуса меньше давления за прямой ударной волной. Однако реальная картина обратная. Отметим также, что при одинаковой длине иглы длина

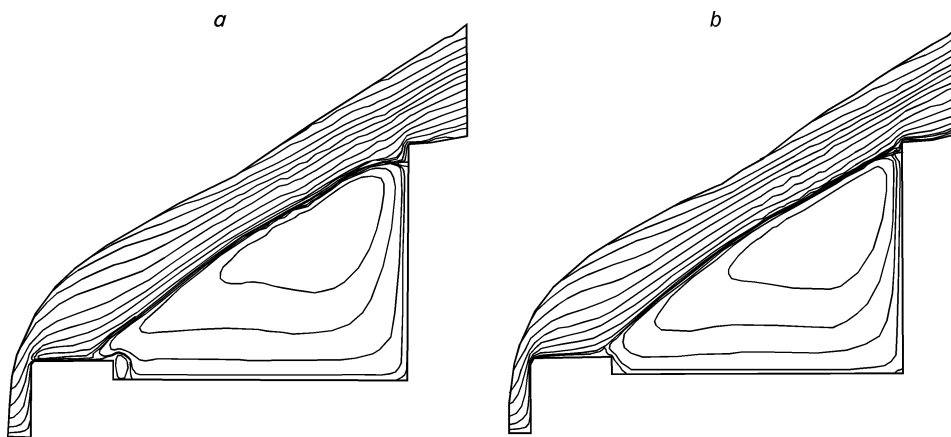


Рис. 5. Линии тока.
a — условия прилипания, *b* — условия скольжения.

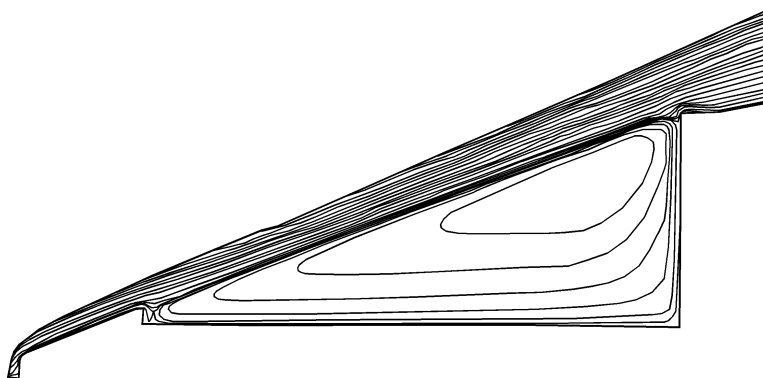


Рис. 6. Линии тока.
 $L_{EF} = 3, r_G = 0,4$.

отрывной зоны возле тел с коническим насадком меньше или такая же, как возле тел с цилиндрическим насадком. В частности, если при обтекании тела с цилиндрическим насадком поток отрывается во всех трех вариантах от угловой точки G , то в случае тела с коническим насадком такая картина имеет место лишь для $L_{EF} = 2,5$; в варианте $L_{EF} = 3,5$ поток отрывается от поверхности цилиндра, а вариант $L_{EF} = 3$ является переходным. На рис. 6 изображены линии тока для последнего случая.

Таким образом, исследования показали эффективность способа снижения коэффициента сопротивления посредством использования элементов, индуцирующих переднюю отрывную зону. Для математического моделирования сложных отрывных течений, рассмотренных в работе, требуется высокоточный численный метод. К числу таковых можно отнести изложенный выше компактный монотонный метод повышенного порядка аппроксимации.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

f — вектор консервативных переменных уравнений вязкого газа;	ν, κ, σ — параметры схемы, влияющие на ее порядок аппроксимации;
F, G — векторы потоков уравнений вязкого газа;	K — число Куранта;
x, y — декартовы координаты;	u_s — скорость скольжения на твердой стенке;

u, v — декартовы компоненты скорости;
 ρ — плотность газа;
 P — давление;
 μ — коэффициент вязкости;
 γ — показатель адиабаты;
 Pr — число Прандтля;
 $\Delta r, \Delta y$ — размеры ячейки разностной сетки;

T_w — температура стенки;
 M_∞ — число Маха невозмущенного потока;
 Re — число Рейнольдса (вычисляется по радиусу тела в сечении D и параметрам невозмущенного потока);
 C_{d_i}, C_{d_v} — идеальный и полный (т. е. с учетом сил вязкости) интегральные коэффициенты сопротивления.

Работа выполнена при поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития для независимых государств, образованных на территории бывшего Советского Союза (CRDF) (Грант RM1-212), и РФФИ (Грант № 97-01-00711).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов А.Н., Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин А.Н. Математическое моделирование колебательных режимов при обтекании тела с иглой // Матем. моделир. — 1989. — Т. 1, № 1. — С. 13 – 23.
2. Мышенков В.И. Численное исследование отрывного течения перед цилиндром с иглой // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. — № 6. — С. 162 – 166.
3. Пасконов В.И., Черанева Н.А. Численное исследование отрывных ламинарных течений вязкого газа при сверхзвуковом обтекании тел с передними иглами // Там же. — 1984. — № 2. — С. 126 – 131.
4. Давыдов Ю.М., Коробицын Г.П., Постников В.Г. Обтекание затупленных тел с иглами и кавернами // Инж.-физ. журн. — 1979. — Т. 37, № 4. — С. 712 – 716.
5. Карловский В.Н., Сахаров В.И. Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел с выдвинутой вперед иглой // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1986. — № 3. — С. 119 – 127.
6. Shang J.S., Hankey W.L., Svith R.E. Flow-oscillations of spike-tipped bodies. — AIAA Paper 62-1980.
7. Забродин А.В., Черкашин В.А. Расчет сверхзвукового обтекания тела с выступающей иглой. — М., 1980. — 44 с. — (Препр. / ИПМ АН СССР; № 73).
8. Пинчуков В.И. Квазимонотонные схемы повышенной точности для решения задач аэродинамики. — Новосибирск, 1988. — 38с. — (Препр. / ИТПМ СО АН СССР; № 19-88).
9. Пинчуков В.И. Схемы 2 – 6-го порядков для уравнений газовой динамики // Моделирование в механике. — Новосибирск, 1992. — С. 95 – 100. — (Сб. науч. тр. / ИТПМ СО РАН; Т. 6(23), № 1).
10. Пинчуков В.И. Нелинейные разностные фильтры и их использование при численном интегрировании разрывных решений // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 3. — С. 312 – 315.
11. Пинчуков В.И. Численные методы аэрогидромеханики высоких порядков аппроксимации. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 1997. — 148 с.
12. Пинчуков В.И. Об одной схеме решения уравнений вязкого теплопроводного газа // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1983. — Т. 23, № 4. — С. 901 – 909.
13. Пинчуков В.И. О монотонизации одного семейства неявных схем // Там же. — 1990. — Т. 29, № 5. — С. 672 – 679.
14. Пинчуков В.И. О построении монотонных схем типа предиктор-корректор произвольного порядка аппроксимации // Матем. моделир. — 1991. — Т. 3, № 9. — С. 95 – 104.
15. Пинчуков В.И. Коррекция потоков в многомерных задачах гиперболического и параболического типов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1996. — Т. 36, № 4. — С. 26 – 40.

Статья поступила в редакцию 8 января 1998 г.