

## ЛИТЕРАТУРА

1. Neuringer J. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. — Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 12.
2. Суязов В. М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости. — ПМТФ, 1970, № 2.
3. Суязов В. М. Об уравнениях движения взаимопроникающих электромагнитных жидкостей. — Магнитн. гидродинамика, 1971, № 2.
4. Суязов В. М. Движение ферросуспензии с деформируемыми частицами во вращающихся однородных магнитных полях. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 1.
5. Bean C. P., Livingston J. D. Superparamagnetism. — J. Appl. Phys., 1959, vol. 30, N 4.
6. Суязов В. М. К теории эффективной вязкости магнитной жидкости. — В кн.: Материалы II Всесоюз. школы-семинара по магнитным жидкостям. М.: Изд-во МГУ, 1981.
7. Майоров М. М. Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 4.
8. Исаев С. В., Кашевский Б. Э. Внутреннее трение и гидродинамика коллоида анизотропного ферромагнетика в магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1980, № 4.
9. Майоров М. М. Экспериментальное исследование магнитной проницаемости феррожидкости в переменном магнитном поле. — Магнитн. гидродинамика, 1979, № 2.
10. Цеберс А. О. О моделях намагничивания ферроколлоида в гидродинамическом потоке. — Магнитн. гидродинамика, 1975, № 4.
11. Berkovsky V. M., Vislovich A. N., Kashevsky B. E. Magnetic fluid as continuum with internal degrees of freedom. — IEEE Transactions on Magnetism, 1980, vol. 16, N 2.
12. Кашевский Б. Э. О моделях магнитной релаксации в феррогидродинамике. — Магнитн. гидродинамика, 1978, № 4.

УДК 632.517.

## ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

Ю. Н. Григорьев

(Новосибирск)

В работах [1—5] в качестве модели двумерной турбулентности рассматривались системы прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости. Имеется ряд примеров, подтверждающих содержательность этой модели. В частности, в ее рамках получены некоторые результаты, интересные с точки зрения статистической теории турбулентности [1], динамической метеорологии [4], численного моделирования обтекания тел при больших числах Рейнольдса [5].

В цитируемых работах в основном изучались вихревые системы в состоянии статистического равновесия. Вместе с тем реальная гидродинамическая турбулентность есть существенно неравновесное состояние жидкости, эволюция которого характеризуется статистической необратимостью. В этой связи представляет интерес исследование неравновесной эволюции в модельных системах методами кинетической теории [7, 8]. Некоторые асимптотические решения иерархии БГКИ-уравнений для системы прямолинейных вихрей рассмотрены в [1].

В настоящей работе неравновесные статистические свойства данной модели исследованы на основе уравнения Лиувилля для ансамбля вихревых нитей. Анализ и суммирование рядов формальной временной теории возмущений выполнены с помощью диаграммной техники Пригожина — Балеску. Для подавления расходимостей на больших временах использовалась процедура перенормировки. Получено замкнутое эволюционное уравнение для функции распределения завихренности, содержащее конвективный оператор Гельмгольца и квазилинейный эллиптический оператор 2-го порядка с нелокальными коэффициентами. Уравнение в явной форме учитывает физический эффект знакопеременной вихревой вязкости, так как местный знак матрицы диссипативных коэффициентов определяется мгновенным распределением завихренности. Показано, что во всей области течения при отсутствии внутренних границ эволюция идет с возрастанием информационной энтропии и распределение завихренности стремится к стационарному.

1. В неограниченной плоскости  $(x, y)$  рассмотрим систему  $N$  точечных вихрей с одинаковой интенсивностью циркуляции  $\kappa$ . Декартовы координаты вихрей  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  канонически сопряжены относительно гамильтониана [6]

$$H_N = - \sum_{i < j}^N V_{ij} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad V_{ij} = \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|.$$

Динамические уравнения для системы вихрей имеют вид

$$(1.1) \quad d\mathbf{r}_i/dt = -\kappa \mathbf{e} \times \nabla_i H_N, \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный орт нормали к плоскости движения вихрей.

Пусть  $f_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$  — плотность вероятности совместного распределения для системы  $N$  вихрей с условием нормировки

$$(1.2) \quad \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N f_N = 1$$

Эквивалентное (1.1) статистическое описание движения системы дается уравнением Лиувилля [7], которое будем использовать в одной из двух форм:

$$(1.3) \quad \frac{\partial f_N}{\partial t} = -\kappa \mathbf{e} \times \sum_{i < j}^N \nabla_i V_{ij} \cdot (\nabla_i - \nabla_j) f_N = -\kappa \sum_{i < j}^N L_{ij} f_N \equiv -\kappa L f_N;$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial f_N}{\partial t} = \kappa \sum_{i < j}^N [\{V_{ij}, f_N\}_i + \{V_{ij}, f_N\}_j] \equiv \kappa \{H_N, f_N\}.$$

Здесь  $\{V_{ij}, f_N\}_i$  — скобки Пуассона, вычисляемые по  $(x_i, y_i)$ .

Будем полагать полную завихренность в жидкости равной нулю, что соответствует условию квазинейтральности в плазме [7]. При этом получаемые из (1.4) первые два уравнения цепочки ББГКИ имеют вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial F_1(\mathbf{r}_1, t)}{\partial t} = \kappa c \left[ \{\psi(\mathbf{r}_1, t), F_1(\mathbf{r}_1, t)\} + \int d\mathbf{r}_2 \{V_{12}, F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) - F_1(\mathbf{r}_1, t) F_1(\mathbf{r}_2, t)\} \right];$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)}{\partial t} = \kappa \{H_2, F_2\} + \kappa c \left[ \{\psi(\mathbf{r}_1, t) + \psi(\mathbf{r}_2, t), F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)\} + \int d\mathbf{r}_3 \{V_{13} + V_{23}, F_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, t) - F_1(\mathbf{r}_3, t) F_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)\} \right].$$

Здесь  $c$  — средняя плотность вихрей;  $\kappa c F_1(\mathbf{r}, t)$  имеет физический смысл локальной завихренности, осредненной по статистическому ансамблю  $f_N(t)$  [1, 4]. Действительно, в нашем случае завихренность в системе точечных вихрей имеет вид

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \kappa \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad F_1(\mathbf{r}, t) = \Omega^{-1} \int d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_N f_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t).$$

Следовательно, в пределе  $N, \Omega \rightarrow \infty, N\Omega^{-1} \rightarrow c$

$$\begin{aligned} \langle \omega(\mathbf{r}, t) \rangle &= \lim_{N, \Omega \rightarrow \infty} \kappa \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \\ &= \lim_{N, \Omega \rightarrow \infty} \kappa N \Omega^{-1} F_1(\mathbf{r}, t) = \kappa c F_1(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Функция

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}_2 V_{12} n(\mathbf{r}_2, t)$$

определяется через фактор неоднородности  $n(\mathbf{r}, t) = F_1(\mathbf{r}, t) - 1$ .

Гамильтониан  $H_N$  содержит только члены вида  $V_{ij}$ , и система вихрей является сильно взаимодействующей. В связи с этим в (1.5)  $\{H_1, F_1\} \equiv 0$ , что затрудняет построение замкнутого эволюционного уравнения для  $F_1$  обычными методами [7, 8]. В [1] анализ ББГКИ-уравнений для точечных вихрей основывался на формальном асимптотическом разложении по малому параметру, который вводился сингулярным образом в первый член уравнения для  $F_s, s \geq 2$  (см. (1.6)). Вопрос о выводе замкнутого уравнения для  $F_1(\mathbf{r}, t)$  при этом не затрагивался.

2. Вывод замкнутых кинетических уравнений для систем с сильным взаимодействием обычно основывается на некоторых гипотезах [9, 10].

Они позволяют выделить существенные черты искомых уравнений и служат основой для проведения формального асимптотического анализа, результаты которого проверяются на фактическом материале.

В нашем случае, так как  $\kappa F_1(\mathbf{r}, t)$  есть средняя локальная плотность завихренности в турбулентном потоке, представляется физически оправданным, чтобы уравнение для  $F_1$  содержало конвективный оператор Гельмгольца [11].

Легко проверить (ср. [12]), что в пределе  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow \infty$  при ограниченной средней завихренности ( $\kappa c \rightarrow O(1)$ ) (1.6) и последующие уравнения цепочки удовлетворяются тождественно распределениями вида

$$F_s = \prod_{i=1}^{s-1} F_1(\mathbf{r}_i, t),$$

если  $F_1$  удовлетворяет уравнению

$$(2.1) \quad dF_1(\mathbf{r}, t)/dt = \kappa c \{ \psi(\mathbf{r}, t), F_1(\mathbf{r}, t) \} \equiv -\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla F_1(\mathbf{r}, t),$$

где 
$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \kappa c \varepsilon \times \nabla \cdot \int d\mathbf{r}_1 V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) n(\mathbf{r}_1, t)$$

— средняя гидродинамическая скорость, индуцированная локально некомпенсированной завихренностью. При этом (2.1) имеет форму уравнения с самосогласованным полем [7] и с точностью до однородного множителя  $\kappa c$  совпадает с уравнением Гельмгольца для поля вихря в плоском случае.

Приведенные соображения позволяют принять следующие асимптотические соотношения между параметрами системы:

$$(2.2) \quad \kappa c \sim O(1), \quad \kappa \sim O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1.$$

Используя метод Боголюбова, на основе (2.2) можно получить последовательность замкнутых относительно  $F_1$  уравнений, в которой (2.1) будет уравнением нулевого приближения.

Действительно, следуя [7], введем разложение

$$(2.3) \quad F_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, t) = F_s^{(0)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, F_1) + \kappa F_s^{(1)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s, F_1) + \dots, s \geq 2,$$

где принято, что  $F_s^{(i)}$  зависят от времени лишь неявно через функцию  $F_1(\mathbf{r}, t)$ .

Эволюционное уравнение для  $F_1$  будем искать в виде

$$(2.4) \quad \partial F_1(\mathbf{r}, t)/\partial t = L_0(F_1) + \kappa L_1(F_1) + \dots$$

При этом из (1.5), (2.3) следует

$$(2.5) \quad L_0(F_1) = \kappa c \left[ \{ \psi(\mathbf{r}_1, t), F_1(\mathbf{r}_1, t) \} + \int d\mathbf{r}_2 \{ V_{12}, F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) - F_1(\mathbf{r}_1, t) F_1(\mathbf{r}_2, t) \} \right],$$

$$L_1(F_1) = \kappa c \int d\mathbf{r}_2 \{ V_{12}, F_2^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) \} \dots$$

Операция дифференцирования  $F_s$  по времени на основе (2.3), (2.4) представляется в виде операторного ряда

$$(2.6) \quad \frac{\partial F_s}{\partial t} = \frac{\delta F_s}{\delta F_1} \frac{\partial F_1}{\partial t} = D_0 F_s^{(0)} + \kappa (D_1 F_s^{(0)} + D_0 F_s^{(1)}) + \dots, s \geq 2,$$

где в оператор  $D_0$  входит  $L_0(F_1)$ , в  $D_1 - L_1(F_1)$  и т. д.

Подстановка (2.3), (2.6) в (1.6) дает в нулевом порядке по  $\kappa$ :

$$(2.7) \quad D_0 F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) = \kappa c \left[ \{ \psi(\mathbf{r}_1, t) + \psi(\mathbf{r}_2, t), F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) \} + \int d\mathbf{r}_3 \{ V_{13} + V_{23}, F_3^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, F_1) - F_1(\mathbf{r}_3, t) F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) \} \right].$$

Непосредственно проверяется, что при

$$F_3^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, F_1) = \prod_{i=1}^3 F_1(\mathbf{r}_i, t)$$

решением (2.7) будет

$$F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) = \prod_{i=1}^2 F_1(\mathbf{r}_i, t).$$

Действительно, при этом в силу определения  $D_0$  и (2.5) имеем

$$D_0 F_2^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, F_1) = F_1(\mathbf{r}_1, t) L_0(\mathbf{r}_2, t) + F_1(\mathbf{r}_2, t) L_0(\mathbf{r}_1, t) = F_1(\mathbf{r}_1, t) \kappa \times \\ \times \{\psi(\mathbf{r}_2, t), F_1(\mathbf{r}_2, t)\} + F_1(\mathbf{r}_2, t) \kappa \{\psi(\mathbf{r}_1, t), F_1(\mathbf{r}_1, t)\},$$

откуда следует, что выбранное  $F_2^{(0)}$  обращает (2.7) в тождество. Одновременно подстановка найденного решения (2.7) в нулевое приближение уравнения (2.4) дает уравнение (2.1).

Таким образом, постулированные выше соотношения (2.2) между параметрами системы приводят, по крайней мере в нулевом приближении, к разумному физическому результату, что дает основание использовать их в дальнейших построениях.

Использованная здесь процедура формально совпадает с методом Боголюбова для плазмы. Известно, что для пространственно-неоднородных систем этого типа метод Боголюбова в следующем приближении приводит к чрезвычайно громоздким выкладкам и необходимости вводить дополнительные предположения. Поэтому ниже используется адекватный ему метод Пригожина — Балеску, который в этом смысле имеет некоторые преимущества, в частности, позволяет указать порядки характерных времен, на которых существенно влияние отдельных членов искомого уравнения; в [9, 10] он применялся к системам с сильным взаимодействием.

3. Воспользуемся методом Пригожина — Балеску в варианте формализма резольвенты. Система обозначений совпадает с принятой в [8]. Исходным аппаратом является фурье-анализ в классе функций, периодических в квадрате площади  $\Omega$ . Для функции совместного распределения  $N$  вихрей  $f_N$  и потенциала межвихревого взаимодействия  $V_{ij}$  разложения в ряд Фурье представим в виде

$$(3.1) \quad f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \Omega^{-N} \left[ \rho_0 + \frac{4\pi^2}{\Omega} \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \rho(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j} + \dots \right];$$

$$(3.2) \quad V(|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j|) = 4\pi^2 \Omega^{-1} \sum_{\mathbf{l}} V(\mathbf{l}) e^{i\mathbf{l}(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j)},$$

где  $\mathbf{k}_j = 2\pi\Omega^{-1/2} \mathbf{n}_j$ ,  $\mathbf{n}_j$  — целочисленные векторы.

Условие нормировки (1.2) дает  $\rho_0 = 1$ . Фурье-коэффициенты в разложении (3.1) связаны с приведенными функциями распределения, в частности,

$$f(\mathbf{r}, t) = c F_1(\mathbf{r}, t) = c \left( 1 + \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{k}, t) \right).$$

С использованием (3.1), (3.2) можно получить фурье-представление формального решения уравнения Лиувилля (1.3) в виде ряда теорий возмущений:

$$(3.3) \quad \rho(\{\mathbf{k}\}, t) = (2\pi)^{-1} \oint dz e^{-izt} \sum_{n=0}^{\infty} (-\kappa)^n \sum_{\{\mathbf{k}'\}} \left( \frac{4\pi^2}{\Omega} \right)^{v'-v} \times \\ \times \langle \{\mathbf{k}\} | R_0(z) [LR_0(z)]^n | \{\mathbf{k}'\} \rangle \rho(\{\mathbf{k}'\}, 0).$$

Матричные элементы в (3.3) определены по базису плоских волн, в частности,

$$(3.4) \quad \langle \{\mathbf{k}\} | L | \{\mathbf{k}'\} \rangle = \sum_{n < j} \langle \{\mathbf{k}\} | L_{nj} | \{\mathbf{k}'\} \rangle, \\ \langle \{\mathbf{k}\} | L_{nj} | \{\mathbf{k}'\} \rangle = 4\pi^2 \Omega^{-1} e \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n) V(|\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n|) i(\mathbf{k}'_n - \\ - \mathbf{k}'_j) \delta_{\mathbf{k}'_n + \mathbf{k}'_j - \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_j} \prod_{p \neq n, j} \delta_{\mathbf{k}'_p - \mathbf{k}_p}.$$

Матричный элемент невозмущенной резольвенты  $R_0(z)$  в данном случае тривиален:

$$(3.5) \quad \langle \{\mathbf{k}\} | R_0(z) | \{\mathbf{k}'\} \rangle = -\frac{1}{iz} \delta_{(\mathbf{k})-(\mathbf{k}')}.$$

Структура (3.3) — (3.5) позволяет использовать для их графического представления те же диаграммы, что и в [8]. Из выражения (3.4) для матричного элемента оператора взаимодействия следует, что в данном случае (ср. [8]) имеются три нетривиальные одновершинные диаграммы (фиг. 1). Соответствующие им матричные элементы имеют вид

$$C. \quad \langle \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_j | L_{nj} | \mathbf{k}'_n \rangle = 4\pi^2 \Omega^{-1} \mathbf{e} \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n) V(|\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n|) i k'_n \delta'_{\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_j},$$

$$D. \quad \langle \mathbf{k}_n, | L_{nj} | \mathbf{k}'_n, \mathbf{k}'_j \rangle = 4\pi^2 \Omega^{-1} \mathbf{e} \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n) V(|\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n|) \bar{\mathbf{x}} \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}'_j) \delta'_{\mathbf{k}'_n + \mathbf{k}'_j - \mathbf{k}_n},$$

$$E. \quad \langle \mathbf{k}_n, \mathbf{k}_j | L_{nj} | \mathbf{k}'_n, \mathbf{k}'_j \rangle = 4\pi^2 \Omega^{-1} \mathbf{e} \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n) V(|\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}_n|) \times \times i(\mathbf{k}'_n - \mathbf{k}'_j) \delta'_{\mathbf{k}'_n + \mathbf{k}'_j - \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_j}.$$

В силу этих соотношений и представления (3.3) топологические индексы вершин  $C, D, E$  равны соответственно 0; 1; 0 [8].

4. Рассмотрим характерные времена для данной модели. Так как моделируется двумерная турбулентность, в качестве характеристик процессов хаотизации можно взять интенсивности  $\varepsilon$  и  $\eta$  в каскадах энергии и энтропии [13]. Комбинация параметров  $\kappa, c, \varepsilon, \eta$  дает безразмерный комплекс  $\Gamma = c^{1/2} \eta^{-1/2} \varepsilon^{1/2}$ . При этом величины, имеющие размерность времени, представимы в виде

$$(4.1) \quad T_m = \varepsilon^{1/2} (\kappa^2 c \eta)^{-1/2} \Gamma^m.$$

При  $m = -1$  из (4.1) имеем  $\tau_i = (\kappa c)^{-1}$ , а при  $m = 0$   $\tau_r = (\kappa^2 c)^{-1/2} \varepsilon^{1/2} \eta^{-1/2}$ . Время  $\tau_i$  есть период обращения пары вихрей на среднем расстоянии  $c^{-1/2}$  друг от друга и естественно отождествляется с характерным временем взаимодействия. Время  $\tau_r$ , содержащее интенсивности каскадных процессов, можно рассматривать как характерное время релаксации. При  $\eta \sim \varepsilon \sim O(1)$  из предположения (2.2) следует, что  $\tau_i \ll \tau_r$ . Но в реальной турбулентности эти времена могут быть одного порядка. В данном случае для отбора из (3.3) взаимодействий, определяющих конвективный перенос и релаксацию, достаточно лишь вида зависимости  $\tau_i, \tau_r$  от  $\kappa, c$ .

Покажем, что для вывода уравнения (2.1) необходимо отобрать из (3.3) и просуммировать все вклады в  $\rho(\mathbf{k}, t)$ , пропорциональные  $(\kappa c)^n$ . Аналогично [14] можно получить, что в этом случае учитываются все величины порядка  $(t/\tau_i)^n/n!$ .

Искомые вклады изображаются всевозможными диаграммами, содержащими только вершины типа  $D$  и имеющими одну внешнюю линию слева. Переход от диаграммного ряда (фиг. 2) к соответствующим математическим выражениям (3.3) дает

$$(4.2) \quad \rho(\mathbf{k}_n, t) = (2\pi)^{-1} \oint dz e^{-izt} \frac{1}{iz} \rho(\mathbf{k}_n, 0) + \oint dz e^{-izt} \frac{\bar{\mathbf{x}}}{iz} (-\kappa) \times \\ \times \sum_{\mathbf{k}_j} \sum_{j=1}^N \langle \mathbf{k}_n, | L_{nj} | \mathbf{k}'_n, \mathbf{k}'_j \rangle \left\{ \frac{1}{-iz} \left[ \rho(\mathbf{k}'_n, 0) \rho(\mathbf{k}'_j, 0) + (-\kappa) \sum_{\mathbf{k}_m} \sum_{m=1}^N \langle \mathbf{k}'_n, \mathbf{k}'_j \times \right. \right. \\ \left. \left. \times | L_{nm} | \mathbf{k}''_n, \mathbf{k}''_m \rangle \frac{1}{-iz} \rho(\mathbf{k}''_n, 0) \rho(\mathbf{k}'_j, 0) \rho(\mathbf{k}''_m, 0) + \dots \right] \right\}.$$

Чтобы получить вклады нужного порядка, справа учтены лишь факторизованные части фурье-коэффициентов [8].

После дифференцирования по  $t$  первый член в (4.2) обращается в нуль по теореме Коши. Во втором члене первый оператор вершины выносится за знак интеграла, а оставшееся выражение интерпретируется как вклад порядка  $(\kappa c)^n$  в  $\rho(\mathbf{k}'_n, t) \rho(\mathbf{k}'_j, t)$ . Перейдя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $N/\Omega \rightarrow c$ , получаем следующее уравнение в фурье-образах:

$$(4.3) \quad \frac{\partial \rho(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = 4\pi^2 \kappa c e \times \int d\mathbf{k}_1 i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) V(|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|) i(2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \times \\ \times \rho(\mathbf{k}_1, t) \rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, t).$$

Переход к исходным переменным осуществляется обратным преобразованием Фурье  $\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{k}, t) = c^{-1} [f(\mathbf{r}, t) - c] \equiv n(\mathbf{r}, t)$ . Правая часть (4.3) с помощью подстановок

$$\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2, \quad \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) = (4\pi^2)^{-1} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)\mathbf{r}}$$

представляется в виде

$$- \kappa c e \times \int d\mathbf{r}_1 \left[ \int d\mathbf{k}_2 e^{i\mathbf{k}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} i\mathbf{k}_2 V(k_2) \right] \left[ \int d\mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} i\mathbf{k}_1 \rho(\mathbf{k}_1, t) \right] \times \\ \times \left[ \int d\mathbf{k}_3 e^{i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}_1} \rho(\mathbf{k}_3, t) \right].$$

В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = - \kappa c e \times \nabla \int d\mathbf{r}_1 V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) n(\mathbf{r}_1, t) \nabla f(\mathbf{r}, t)$$

которое с точностью до множителя  $c$  совпадает с уравнением (2.1).

Как известно, уравнение с самосогласованным полем не описывает релаксационного процесса. Поэтому дополнительно к (4.2) рассмотрим всевозможные вклады в  $\rho(\mathbf{k}, t)$ , составленные из «псевдодиагональных» [8] фрагментов (фиг. 3).

Формальная оценка временной зависимости этих вкладов показывает, что при суммировании учитываются величины порядка

$$(4.4) \quad \sum_n \frac{1}{n!} (t/\tau_r)^{2n},$$

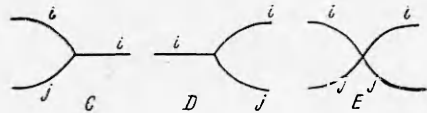
которые действительно существенны на временах  $t \sim \tau_r$ . Однако процедура вывода замкнутого уравнения для  $\rho(\mathbf{k}, t)$ , примененная выше, приводит в данном случае к появлению справа в (4.3) дополнительного немарковского члена вида

$$\int_0^t d\theta G_0(t - \theta) \rho(\mathbf{k}, \theta),$$

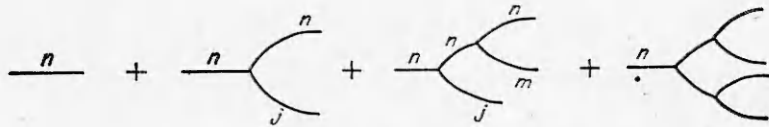
где  $G_0(\theta)$  не зависит от времени. Это означает неограниченность времени взаимодействия вихрей и дает расходимость при  $t \rightarrow \infty$ . Кроме того, уравнение вновь не описывает процесса релаксации, так как дополнительный член обратим во времени. Это непосредственно видно из (4.4), куда входят только четные степени  $t$ .

5. Появление расходимости связано с попыткой описать сильно взаимодействующую систему последовательностью разделенных во времени бинарных процессов. Расходимость можно подавить, если учесть коллективный характер взаимодействия вихрей. Это можно сделать путем перенормировки функции распространения (пропагатора) [9], для которой при этом возникает замкнутое уравнение.

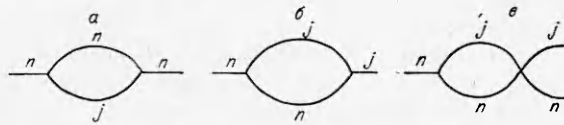
Рассмотрим диаграммное представление перенормированного пропагатора на фиг. 4. Здесь учтены вклады всевозможных диагональных фрагментов, соединенных в произвольном числе, которые образованы введением элементарных диаграмм фиг. 3, а, б между вершинами типа D и C.



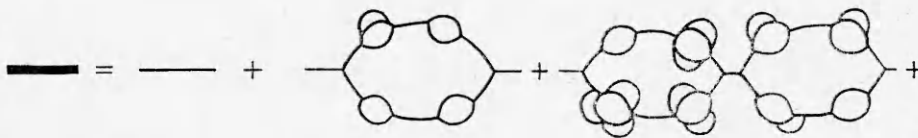
Ф и г. 1



Ф и г. 2



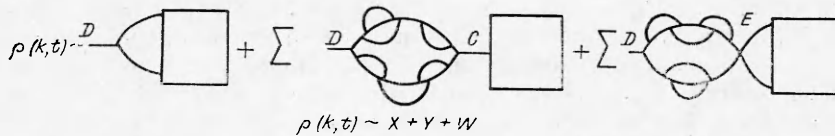
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

Соответствующее фиг. 4 аналитическое выражение операторного ряда имеет вид

$$(5.1) \quad G(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-1} \oint dz e^{-izt} \frac{1}{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Phi(\mathbf{k}, z) \frac{1}{-iz} \right]^n G(\mathbf{k}, 0), \quad G(\mathbf{k}, 0) = I,$$

где  $I$  — тождественный оператор;

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-\kappa)^{2(m+1)} \langle \mathbf{k} | L_D [R_0(z) L]^{2m} R_0(z) L_C | \mathbf{k} \rangle,$$

т. е.  $\Phi(\mathbf{k}, z)$  представляется бесконечной суммой всевозможных диаграмм (фиг. 5).

После дифференцирования (5.1) по времени с использованием представления пропагатора (5.1) и теоремы о свертке для преобразования Лап-



ласа получим

$$(5.2) \quad \frac{\partial G(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = (2\pi)^{-1} \oint dze^{-izt} \Phi(\mathbf{k}, z) \frac{1}{-iz} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Phi(\mathbf{k}, z) \frac{1}{-iz} \right]^n G(\mathbf{k}, 0) = \\ = \int_0^t d\theta Z(\mathbf{k}, t - \theta) G(\mathbf{k}, \theta);$$

$$(5.3) \quad Z(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-1} \oint dze^{-izt} \Phi(\mathbf{k}, z).$$

Преобразуем операторный ряд (5.3) с помощью факторизационной теоремы Резибуа [15]. Каждую диаграмму фиг. 5 путем отбрасывания крайних вершин  $D$  и  $C$  можно разделить на две независимые ветви. Диаграммы, входящие в  $\Phi(\mathbf{k}, z)$ , группируются в классы, каждый из которых включает в себя все диаграммы, имеющие фиксированное число вершин в каждой ветви и полученные всевозможными перестановками вершин одной ветви по отношению к вершинам другой с сохранением порядка их следования в ветвях. По теореме Резибуа вклад каждого класса равен вкладу одной из его диаграмм, в котором вклад внутренней части равен произведению вкладов независимых ветвей. Просуммировав факторизованные вклады по всем классам, получаем, что в силу структуры диаграмм фиг. 5, входящих в  $\Phi(\mathbf{k}, z)$ , полный суммарный вклад ветвей равен произведению вкладов пропагаторов (см. фиг. 4). Поэтому ряд (5.3) можно представить в виде

$$Z(\mathbf{k}_i, t) = \sum_{j=1}^N \sum_1 (-\kappa)^2 \langle \mathbf{k}_i | L_{ij} | \mathbf{k}_i - \mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j \rangle G(\mathbf{k}_i - \mathbf{l}_i, t) \times \\ \times G(\mathbf{l}_j, t) \langle \mathbf{k}_i - \mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j | L_{ij} | \mathbf{k}_i \rangle.$$

После предельного перехода к неограниченной области получаем уравнение для перенормированного пропагатора

$$(5.4) \quad \frac{\partial G(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -4\pi^2 \kappa^2 c \int_0^t d\theta P(\mathbf{k}, t - \theta) G(\mathbf{k}, \theta), \\ P(\mathbf{k}, \theta) = \int d\mathbf{l} [\text{el}(\mathbf{k} - 2\mathbf{l}) V^2(\mathbf{l}) \text{el}\mathbf{k}] G(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \theta) G(\mathbf{l}, \theta).$$

Рассмотрим теперь всевозможные вклады в  $\rho(\mathbf{k}, t)$  порядка  $(\kappa c)^n (\kappa^2 c)^m$ ,  $n, m = 0, 1, \dots$ . Соответствующее диаграммное представление дано на фиг. 6. Здесь прямоугольники обозначают бесконечные суммы всевозможных продолжений, составленных из вершин типа  $D$  и «псевдодиагональных» фрагментов фиг. 3. Во второй и третьей группах вкладов внешние суммы берутся по всевозможным «головным» диаграммам. Вывод уравнения для  $\rho(\mathbf{k}, t)$  в общих чертах повторяет вывод уравнения в п. 4. При преобразовании второй и третьей групп вкладов используется теорема Резибуа и теорема о свертке для преобразования Лапласа аналогично выводу (5.2), (5.4). Это можно понять, если заметить, что одно из эквивалентных фиг. 6 аналитических выражений есть

$$\rho(\mathbf{k}, t) = \oint dze^{-izt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{-iz} \left[ \Phi(\mathbf{k}, z) \frac{1}{-iz} \right]^m \left[ \rho(\mathbf{k}, 0) + \sum_{\{\mathbf{k}'\}} D_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')} \right] \\ \text{II} \quad Y = \oint dze^{-izt} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{-iz} \left[ \Phi(\mathbf{k}, z) \frac{1}{-iz} \right]^m \left[ \rho(\mathbf{k}, 0) + \sum_{\{\mathbf{k}'\}} D_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')} \right],$$

где  $D_{\mathbf{k}(\mathbf{k}'')}$  — обобщенное представление всех вкладов, сопровождающихся исчезновением корреляций.

После преобразований уравнение для  $\rho(\mathbf{k}, t)$  принимает вид

$$(5.5) \quad \frac{\partial \rho(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = 4\pi^2 \kappa^2 c e \times \int d\mathbf{k}_1 i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) V(|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|) i(2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}_1, t) \times$$



$$\begin{aligned} & \times \rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, t) - 4\pi^2 \kappa^2 c \int_0^t d\theta P(\mathbf{k}, \theta) \rho(\mathbf{k}, t - \theta) - 4\pi^2 \kappa^2 c \int_0^t d\theta \int d\mathbf{k}_1 P_1(\mathbf{k}, \\ & \quad \mathbf{k}_1, \theta) \rho(\mathbf{k}_1', t - \theta) \rho(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1', t - \theta), \\ P_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \theta) &= \int d\mathbf{l} e \times IV(l) (\mathbf{k} - 2\mathbf{l}) G(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \theta) G(\mathbf{l}, \theta) e \times (\mathbf{k} - \\ & \quad - \mathbf{l}) V(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{l}|) \times (2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Уравнения (5.5), (5.3) имеют немарковский характер и дают замкнутое описание эволюции вихрей на временах  $t \sim \tau_r$ .

Для перехода в (5.5) к марковской форме предварительно построим приближенное решение (5.3). Будем полагать  $|\mathbf{k}| \sim |\mathbf{l}|$ , т. е. характерный размер неоднородностей и эффективная длина их взаимодействия близки, что соответствует представлениям феноменологической теории турбулентности. Считая, что  $G(\mathbf{k}, t) = G(akt)$ , можно заменить в (5.3)  $G(\mathbf{l}, \theta) \simeq G(\mathbf{k}, \theta)$ ,  $G(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \theta) \simeq I$ . При этом (5.3) преобразуется к уравнению с интегралом типа «свертки»:

$$(5.6) \quad \frac{\partial G(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -\alpha^2 k^2 \int_0^t d\theta G(\mathbf{k}, t - \theta) G(\mathbf{k}, \theta), \quad \alpha^2 = 4\pi^2 \kappa^2 a^2,$$

$$a^2 = \int dIV^2(l) [1 - \cos^2(\mathbf{k}, \mathbf{l})] l^2, \quad a^2 > 0.$$

Решая его с помощью преобразования Лапласа, можно получить [16]

$$(5.7) \quad G(\mathbf{k}, t) = (\alpha kt)^{-1} J_1(2\alpha kt),$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка. Как видно из (5.7), вид вычисленного пропагатора совпадает с постулированным выше. При  $t \rightarrow 0$   $G(\mathbf{k}, t) \rightarrow I$ .

Переход в (5.5) к марковской форме осуществляется обычным образом [14]. При этом необходимо вычислить вклад, даваемый произведением пропагаторов. Вновь полагая  $|\mathbf{k}| \sim |\mathbf{l}|$ , имеем [17]

$$(5.8) \quad \int_0^\infty d\theta G(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \theta) G(\mathbf{l}, \theta) = (\alpha^2 t)^{-1} |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^{-1} \int_0^\infty d\theta J_1(2\alpha |\mathbf{k} - \mathbf{l}| \theta) \times$$

$$\times J_1(2\alpha l \theta) = \frac{1}{2\alpha (l + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|)} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(2) \Gamma(3/2)} F\left[1/2, 3/2, 3, \frac{4l |\mathbf{k} - \mathbf{l}|}{(l + |\mathbf{k} - \mathbf{l}|)^2}\right] \simeq \frac{1}{\alpha l},$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция;  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрическая функция Гаусса.

С учетом (5.8) совершим в (5.5) обратное преобразование Фурье. Промежуточные выкладки аналогичны использованным в (4.3). Второй и третий члены в (5.5) приводятся соответственно к виду

$$(5.9) \quad -4\pi^2 \kappa^2 c \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \dots = -(\kappa^2 c)^{1/2} a_1 a^{-1} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} k^2 \rho(\mathbf{k}, t);$$

$$(5.10) \quad -4\pi^2 \kappa^2 c \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \dots = -(\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} \int d\mathbf{r}_1 \left\{ \int d\mathbf{k}_2 e^{i\mathbf{k}_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} e \times \right.$$

$$\left. \times i\mathbf{k}_2 V(k_2) \mathbf{C}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \int \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} (i\mathbf{k}_1 i\mathbf{k}_1 - i\mathbf{k} i\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}, t) \rho(\mathbf{k}_1, t) \right\}.$$

В (5.9) выражение  $a_1$  определено аналогично  $a$  в (5.6), но отличается от него лишь дополнительным множителем  $l^{-1}$  в подынтегральном выражении. Для вычисления

$$\mathbf{C}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = e \times \int d\mathbf{l} e^{i\mathbf{l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)} i\mathbf{l} l^{-1} V(l) = -2\pi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \int_0^\infty dl l V(l) J_1(l |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$$

необходимо явное выражение  $V(l)$ . Здесь использован обобщенный образ Фурье потенциала  $V(r) = \ln r$ :

$$(5.11) \quad V(l) = \lim_{\beta \rightarrow 0} (4\pi^2)^{-1} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{l}\mathbf{r}} e^{-\beta r} \ln r = -(2\pi l^2)^{-1}.$$

При этом  
(5.12)

$$\mathbf{C}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \mathbf{e} \times \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|.$$

Отметим, что использование (5.11) при вычислении (5.6) приводит к несобственному интегралу, логарифмически расходящемуся на верхнем и нижнем пределах. Соответственно в  $a_1$  при этом возникает расходимость  $O(l^{-1})$  в нижнем пределе.

Расходимость при  $l \rightarrow 0$  связана с коллективными свойствами взаимодействия вихрей. Ее можно избежать, если использовать вместо  $V(r)$  некоторую аппроксимацию. Например, если температура вихрей [18] положительна, удовлетворительное приближение дает функция Макдональда  $K(r)$  — двумерный аналог потенциала Дебая — Хюккеля.

Расходимость при  $l \rightarrow \infty$  есть следствие неприменимости на малых расстояниях точечного представления вихрей. Устранить ее можно либо путем усложнения модели [5], либо просто обрезанием области интегрирования на  $l = l_{\max}$ . Так как явный вид  $a$  и  $a_1$  в данной работе не используется, будем полагать их в дальнейшем просто ограниченными.

С учетом (5.9) — (5.12) уравнение в исходных переменных записывается в виде

$$(5.13) \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} + \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \nabla f(\mathbf{r}, t) = (\kappa^2 c)^{1/2} a_1 a^{-1} \Delta f(\mathbf{r}, t) + (\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} \times \\ \times \int d\mathbf{r}_1 n(\mathbf{r}_1, t) \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) : \nabla \nabla f(\mathbf{r}, t) - (\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} n(\mathbf{r}, t) \int d\mathbf{r}_1 \mathbf{B}(\mathbf{r} - \\ - \mathbf{r}_1) : \nabla_1 \nabla_1 f(\mathbf{r}_1, t),$$

где  $\mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \mathbf{e} \times \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \mathbf{e} \times \nabla V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)$  — тензор второго ранга, двоеточие — символ скалярного произведения тензоров.

6. Рассмотрим некоторые качественные свойства полученного уравнения. Так как  $a, a_1 > 0$ , то первый член в правой части (5.13), содержащий оператор Лапласа, определяет положительную диффузию распределения завихренности. Квадратичная форма, образуемая компонентами тензора  $\mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ , имеет вид

$$(6.1) \quad (\mathbf{B}\xi, \xi) = e_{ik} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{\partial x_k} e_{jn} \frac{\partial V(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|)}{\partial x_n} \xi_i \xi_j,$$

где  $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ ,  $e_{ik}$  — антисимметричный тензор ( $e_{12} = -e_{21} = 1$ ,  $e_{11} = e_{22} = 0$ ) и подразумевается суммирование от 1 до 2 по повторяющимся индексам. Непосредственно проверяется, что форма (6.1) неотрицательна. Используя структуру (6.1) и ее неотрицательность, для непрерывных  $n(\mathbf{r}, t)$  можно показать, что первый и второй члены в правой части (5.13) определяют эллиптический оператор 2-го порядка, знак которого зависит от распределения  $f(\mathbf{r}, t)$  и может быть различным в разных точках области течения. Знак последнего члена определяется локальным значением  $n(\mathbf{r}, t)$ .

Это означает, что уравнение (5.13) способно описывать локальные процессы разрушения (положительная диффузия) и возникновения (отрицательная диффузия) крупных вихревых структур. Как известно [19], последний эффект отождествляется с явлением отрицательной вязкости.

Вместе с этим можно показать, что в целом во всей области течения решение (5.13) релаксирует к некоторому стационарному распределению. Рассмотрим производство энтропии

$$(6.2) \quad S(t) = - \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) \ln f(\mathbf{r}, t)$$

в процессе эволюции распределения. Будем предполагать, что при  $r \rightarrow \infty$   $f(\mathbf{r}, t)$  убывает достаточно быстро вместе с производными. Умножим (5.13) на  $-(1 + \ln f(\mathbf{r}, t))$  и проинтегрируем по всему пространству. После ряда преобразований уравнение баланса энтропии приводится к виду

$$(6.3) \quad \frac{dS}{dt} = \int d\mathbf{r} \nabla \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{r}, t) + (\kappa^2 c)^{1/2} a_1 a^{-1} \int d\mathbf{r} [f(\mathbf{r}, t)]^{-1} [\nabla f(\mathbf{r}, t)]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + (1/2) (\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} \iint dr dr_1 \nabla \nabla : \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) [\ln f(\mathbf{r}, t) - \ln f(\mathbf{r}_1, t)] [f(\mathbf{r}, t) - \\
& - f(\mathbf{r}_1, t)] + (\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} \iint dr dr_1 \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) : \nabla_1 f(\mathbf{r}_1, t) \nabla_1 f(\mathbf{r}_1, t) [f(\mathbf{r}, t)]^{-1} \times \\
& \times n(\mathbf{r}, t) + (\kappa^2 c)^{1/2} a^{-1} \iint dr dr_1 \nabla \nabla : \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_1, t) n(\mathbf{r}, t).
\end{aligned}$$

При интегрировании по частям последних двух членов в (5.13) проведена симметризация.

В силу несжимаемости жидкости  $\nabla \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ , и конвективный член дает нулевой вклад в производство энтропии. Положительность вклада второго члена в правой части (6.3) очевидна. Третий также положительно определен, так как  $\nabla \nabla : \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-3} \geq 0$  и имеет место неравенство  $[\ln f(\mathbf{r}, t) - \ln f(\mathbf{r}_1, t)] [f(\mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}_1, t)] \geq 0$ .

В силу положительной определенности (6.1), (6.4) знак последних двух интегралов в (6.3) зависит только от поведения функции  $n(\mathbf{r}, t)$ . Из условия квазинейтральности  $\int dr n(\mathbf{r}, t) = 0$  и предполагаемого характера убывания  $f(\mathbf{r}, t)$  при  $r \rightarrow \infty$  следует, что отрицательный вклад в эти интегралы будет набираться в основном с периферии области течения, где другие части подынтегральных выражений стремятся к нулю достаточно быстро. Отсюда вытекает, что полный вклад этих интегралов в производство энтропии будет либо неотрицательным, либо, по крайней мере, близким к нулю по модулю.

Таким образом, в процессе эволюции  $f(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющей (5.13), энтропия (6.2) монотонно (в широком смысле) возрастает. С другой стороны, из сходимости интеграла  $\int dr f(\mathbf{r}, t) < \infty$  легко получить [20], что функционал (6.2) ограничен. Это позволяет сделать вывод, что в процессе эволюции решение (5.13) стремится к некоторому стационарному распределению.

Анализ результатов численных экспериментов [2, 4], условия которых близки к использованным здесь предположениям, показывает, что уравнение (5.13) правильно отражает характер эволюции больших систем точечных вихрей на плоскости.

Автор благодарен Н. Н. Яненко за постоянное внимание к работе.

Поступила 6 V 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков Е. А. Динамика и статистика системы вихрей. — ЖЭТФ, 1975, т. 68, № 5.
2. Kida S. Statistics of the system of line vortices. — J. Phys. Soc. Jap., 1975, vol. 39, N 5.
3. Pointin Y. B., Lundgren T. S. Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container. — Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 10.
4. Pointin Y. B., Lundgren T. S. Statistical mechanics of two-dimensional vortices. — J. Stat. Phys., 1977, vol. 17, N 5.
5. Chorin A. J. Numerical study of slightly viscous flow. — J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, N 4.
6. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
7. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Избр. труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
8. Балееску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, 1967.
9. Balescu R., Senatarski A. A new approach to the theory of fully developed turbulence. — Ann. Phys., 1970, vol. 58, N 2.
10. Resibois P., De Leener M. Irreversibility in Heisenberg spin systems. I. — Phys. Rev., 1966, vol. 152, N 1.
11. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
12. Rostoker N., Rosenbluth M. N. Test particles in a completely ionized plasma. — Phys. Fluids, 1960, vol. 3, N 1.
13. Kraichnan R. H. Statistical dynamics of two-dimensional flow. — J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 1.
14. Пригожин И. Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964.
15. Resibois P. New approach to irreversible transport phenomena in plasma dynamics. — Phys. Fluids, 1963, vol. 6, N 6.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973.
17. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

---

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБРОСОВ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ**

*А. А. Прасковский*  
(Москва)

