

УДК 532.51.013.4:536.25

## ЗАДАЧА РЭЛЕЯ — БЕНАРА ДЛЯ АНОМАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Н. Ермоленко

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mail: 801ean@gorodok.net

Рассматривается задача об устойчивости состояния покоя бесконечного подогреваемого горизонтального слоя вязкой теплопроводной жидкости (задача Рэлея — Бенара). Уравнение состояния жидкости описывается формулой, в которой учтена немонотонная зависимость плотности воды от температуры и давления. Неустойчивость механического равновесия исследуется по отношению к малым монотонным возмущениям. В рамках линейной теории численно исследуется влияние параметров задачи на критические значения числа Рэлея и соответствующие им критические движения. При численном исследовании спектральной задачи использовался метод ортогонализации Годунова — Абрамова. Результаты расчетов сравниваются с известными результатами для предельного случая, когда плотность считается квадратичной функцией температуры и не зависит от давления.

**Ключевые слова:** задача Рэлея — Бенара, приближение Обербека — Буссинеска, аномальная жидкость, неустойчивость, принцип монотонности возмущений.

**Введение.** Интерес к задаче Рэлея — Бенара для аномальной жидкости вызвали исследования последних лет, проводимые на озере Байкал. Результаты наблюдений, полученные с использованием современной аппаратуры, свидетельствуют о наличии в озере механизма глубокого перемешивания, обусловленного переносом поверхностных вод Байкала в придонные области [1, 2]. Существует несколько гипотез, объясняющих данное явление. Одна из этих гипотез основана на эффекте аномального теплового расширения воды.

В пренебрежении зависимостью плотности от давления плотность воды является немонотонной функцией температуры. Эта функция достигает максимума при температуре, приближенно равной 4 °С (при так называемой температуре инверсии теплового расширения). В этом случае уравнение состояния воды можно записать в виде

$$\rho = \rho_0[1 - \gamma(T - T_0)^2],$$

где  $\rho_0$  — максимальное значение плотности;  $\gamma$  — коэффициент теплового расширения;  $T_0$  — температура инверсии. Немонотонная зависимость плотности от температуры вызывает сложную стратификацию в слое жидкости, температура поверхности которого больше температуры инверсии, а температура нижней границы меньше ее. Выше точки инверсии градиент плотности совпадает с направлением силы тяжести и жидкость гравитационно устойчива. Ниже этой точки плотность уменьшается с ростом глубины и стратификация жидкости оказывается неустойчивой. Конвективные движения, зарожда-

ющиеся в нижней, неустойчивой области, распространяются также в верхнюю, устойчиво стратифицированную зону. Аналогичные явления имеют место и в других ситуациях, когда устойчивые слои жидкости ограничивают неустойчиво стратифицированную область. Такую конвекцию называют проникающей. Однако в ряде случаев нужно учитывать эффекты, обусловленные отклонениями плотности, вызванными изменениями давления. На важность учета таких факторов впервые обратил внимание Г. Ю. Верещагин [3]. Например, температура инверсии воды не является постоянной, а уменьшается с ростом глубины (и, следовательно, давления) примерно на  $0,21\text{ }^{\circ}\text{C}$  на каждые 100 м [2]. Максимальные значения, которые могут принимать плотность и коэффициент теплового расширения, также являются функциями давления. Рассматриваемая зависимость плотности от давления и температуры описывает эту аномалию. Если глубина жидкости невелика, то зависимость плотности от давления можно пренебречь. Однако на больших глубинах, в частности в глубоководных озерах (максимальная глубина озера Байкал 1637 м, средняя — 730 м), возникающие перепады давления могут оказывать существенное влияние на распределение плотности, а следовательно, и на протекающие конвективные процессы (см. [4]).

Исследование устойчивости проводится следующим образом. Сначала выводятся уравнения движения в безразмерных переменных. Затем определяется основное состояние, в данном случае — механическое равновесие. Далее к функциям, описывающим распределения скорости, давления и температуры в состоянии покоя, добавляются малые возмущения, после чего задача записывается в терминах возмущений и линеаризуется. Линейная задача для возмущений допускает решения специального вида, в частности, когда возмущения зависят от времени по экспоненциальному закону (нормальные возмущения) [5]. Это позволяет отделить переменные, в результате чего возникает спектральная задача, которая исследуется численно.

Одной из наиболее хорошо изученных моделей конвекции являются уравнения в приближении Обербека — Буссинеска [5]. Эта модель включает уравнения Навье — Стокса и уравнение переноса тепла, при этом плотность считается линейной функцией температуры. При выводе уравнений в этом приближении важным является предположение о том, что отклонения плотности от некоторого среднего значения, обусловленные эффектами теплового расширения жидкости, настолько малы, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения импульса, где эти отклонения существенны только в членах, учитывающих влияние подъемной силы, которая и является причиной возникновения конвективных движений. В рассматриваемой задаче также принимается это предположение.

Для приближения Обербека — Буссинеска доказан принцип монотонности возмущений (принцип монотонной смены устойчивости) [5], который заключается в следующем. Решения возникающей при анализе устойчивости линейной задачи для возмущений ищутся в виде так называемых нормальных возмущений  $(\mathbf{V}', P', T')(x, y, z, t) \sim (\mathbf{V}, P, T)(z) e^{\sigma t}$ , где  $\sigma$  — декремент, определяющий развитие возмущений во времени. Собственные значения  $\sigma$  соответствующей спектральной задачи в общем случае являются комплексными (такие возмущения осциллируют с частотой, определяемой мнимой частью декремента). Затухание или нарастание этих осциллирующих возмущений зависит от знака вещественной части декремента. Если  $\text{Re } \sigma < 0$ , то такие возмущения с течением времени затухают и исходное состояние жидкости устойчиво. Наличие возмущений с положительной вещественной частью декремента означает неустойчивость исходного состояния по отношению к ним. Собственные числа, которые лежат на мнимой оси, называются критическими (пороговыми). В пространстве параметров они отделяют область устойчивости от области неустойчивости. В приближении Обербека — Буссинеска все собственные значения остаются вещественными (в этом случае возмущения изменяются во времени монотонно), а

критические числа Рэлея определяются из условия  $\sigma = 0$ . Предполагается, что и для данной модели можно ограничиться исследованием только монотонной неустойчивости.

Исследование проникающей конвекции в горизонтальном слое жидкости при инверсии плотности впервые проведено в работе [6], где проанализированы результаты экспериментов Фурамото и Руса [7], изучавших конвекцию в подогреваемом сверху горизонтальном слое воды, нижняя граница которого поддерживалась при температуре, равной  $0^\circ\text{C}$ . В экспериментах отмечены следующие факты: конвекция наблюдалась не только в области неустойчивости, но и в зоне, где вода имела устойчивую стратификацию; во всей области конвекции, за исключением участков вблизи верхней и нижней границ, температура воды составляла около  $4^\circ\text{C}$ ; в случае, когда температура верхней границы находилась в диапазоне  $12 \div 20^\circ\text{C}$ , возникали дополнительные конвективные ячейки по вертикали.

В [6] исследован слой со свободными изотермическими границами. Уравнение состояния воды в окрестности температуры максимальной плотности описывалось зависимостью  $\rho = \rho_0(1 - \gamma\Delta T^2)$ , где  $\Delta T$  — отклонение температуры от температуры инверсии;  $\rho_0$  — максимальная плотность;  $\gamma = 7,68 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$ . Для спектральной задачи в случае свободных границ сформулирован принцип монотонности возмущений. Линейный анализ устойчивости показал, что при температуре поверхности слоя  $T = 4^\circ\text{C}$  критическое значение числа Рэлея совпадает с его значением в задаче Рэлея — Бенара и уменьшается при повышении температуры. В [6] предложено следующее объяснение этого интересного факта: устойчивый верхний слой компенсирует граничные условия, что позволяет возмущениям принимать наиболее удобную форму. Минимум критического числа Рэлея достигается при температуре поверхности, равной  $6,7^\circ\text{C}$ . Замечена также аналогия с задачей об устойчивости течения Куэтта между вращающимися в противоположных направлениях цилиндрами в случае, когда границы слоя считаются твердыми. Это позволило по известным результатам вычислить критические значения числа Рэлея и для данного случая. Впоследствии эта аналогия исследовалась в ряде других работ (см., например, [8]). Автор работы [6] исходил из модели проникающей конвекции в приближении Обербека — Буссинеска.

Вопрос о применимости приближения Обербека — Буссинеска в некоторых задачах, связанных с возникновением конвекции в слоях жидкости, рассмотрен в работах [9, 10] с учетом дополнительных факторов, характеризующих тепловое расширение.

Обзор численных методов, применяемых при решении задач гидродинамической устойчивости, содержится в работе [11]. При численном исследовании линейных краевых задач на собственные значения в случае, если граничные условия ставятся на обоих концах промежутка интегрирования, решение исходной задачи можно свести к последовательному решению ряда производных задач с граничными условиями, задаваемыми только на одном конце промежутка. Каждая из этих задач получается из исходной, а решение исходной задачи ищется в виде линейной комбинации решений этих производных задач. Коэффициенты линейной комбинации определяются из краевых условий исходной задачи, а собственные значения являются нулями некоторой тестовой функции. Более подробно этот прием, а также некоторые его модификации и особенности, возникающие при его применении, описаны в работах [12–14].

Данные полученных на озере Байкал натуральных наблюдений, которые использовались в численных расчетах, приведены в [2, 15]. В частности, отмечается, что точка мезотермического максимума плотности (точка, в которой значение температуры совпадает с температурой инверсии) в озере располагается на глубине  $200 \div 300$  м. В [2, 15] приведены также данные об изменении температурного режима.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой толщиной  $L$  с плоскими границами, на которых поддерживается постоянная температура, заполнен-

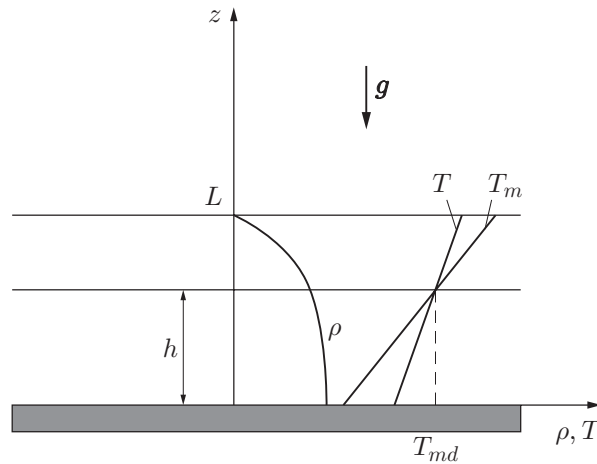


Рис. 1. Распределение плотности и температуры при механическом равновесии

ный жидкостью, первоначально находящейся в состоянии покоя. Нижняя граница слоя считается твердой, верхняя соответствует свободной недеформируемой поверхности. Температура на нижней и верхней границах равна  $T_1$ ,  $T_2$  соответственно. Плотность жидкости (воды) меняется по закону [16]

$$\rho(T, p) = \rho_m(p)[1 - \gamma(p)(T - T_m(p))^2], \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_m(p) &= \rho_0(1 + e_\rho p) = 999,972 + 4,916\,021 \cdot 10^{-2}p, \\ \gamma(p) &= \gamma_0(1 - e_\gamma p) = 8,572\,628 \cdot 10^{-6} - 7,061\,491 \cdot 10^{-9}p, \\ T_m(p) &= T_0(1 - e_T p) = 3,985\,694 - 0,020\,617p \end{aligned}$$

(единица измерения давления — бар, температуры — градус Цельсия). Погрешность этой формулы в диапазоне температур от 0 до 10 °C не превышает 0,006 %.

Мезотермический максимум плотности достигается внутри слоя при температуре инверсии  $T_{md}$ . Для определенности положим  $T_1 < T_{md} < T_2$ . Систему координат введем таким образом, чтобы оси  $x$  и  $y$  находились в плоскости нижней границы слоя, а единичный вектор оси  $z$  был направлен от нижней границы к верхней. Система координат, а также распределение плотности и температуры в слое в состоянии равновесия показаны на рис. 1.

В предельном случае, когда функции  $\rho_m(p)$ ,  $\gamma(p)$ ,  $T_m(p)$  — константы, задача о проникающей конвекции в подобной постановке исследовалась в работе [8].

**2. Уравнения движения в безразмерных переменных.** При выводе модели конвекции исходными уравнениями служат уравнения Навье — Стокса и уравнение переноса тепла. Как и в приближении Обербека — Буссинеска, зависимость плотности от температуры и давления проявляется только в членах, учитывающих влияние архимедовой силы. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы.

Введем безразмерные величины:

$$\rho = R\rho', \quad T = \theta T', \quad \mathbf{x} = h\mathbf{x}', \quad \mathbf{V} = \vartheta\mathbf{V}', \quad p = Pp', \quad t = \tau t'.$$

В качестве характерных масштабов выберем максимальное значение плотности на поверхности слоя  $\rho_0$ , ширину  $h$  той части слоя, которая находится ниже точки инверсии, разность температур  $T_0 - T_1$  и скорость конвективного всплытия нагретой частицы

жидкости  $\vartheta = \sqrt{gh\gamma_0\theta^2}$ . Масштабы давления и времени выражаются через выбранные величины следующим образом:  $P = \rho_0\vartheta^2$ ,  $\tau = h/\vartheta$  (см. [17]). Отметим, что неустойчивость может возникнуть как в области, находящейся ниже точки инверсии, так и в верхней зоне слоя. Чтобы объединить эти два случая, в качестве характерного масштаба длины всегда выбирается толщина нижней части. Такой выбор оправдан, когда точка инверсии располагается ближе к середине слоя, т. е. обе части слоя сопоставимы по толщине.

С учетом принятых предположений уравнения свободной конвекции и граничные условия в безразмерных переменных записываются в виде (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \nu\Delta\mathbf{V} - \nabla p - \frac{1}{\beta}(1 + \varepsilon_\rho p)[1 - \beta(1 - \varepsilon_\gamma p)(T - 1 + \varepsilon_T p)^2]\mathbf{k}, \\ \frac{dT}{dt} &= \delta\Delta T, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ z = 0: \quad T &= 0, \quad \mathbf{V} = 0, \\ z = \lambda: \quad T &= m\lambda, \quad v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости;  $T$  — отклонение температуры от температуры нижней границы;  $p$  — давление;  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ ;  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)$ .

В задаче появляются следующие безразмерные параметры:  $\nu = \eta/(\rho_0\vartheta h)$  — параметр кинематической вязкости;  $\beta = \gamma_0\theta^2$ ;  $\varepsilon_\rho = e_\rho P$ ;  $\varepsilon_\gamma = e_\gamma P$ ;  $\varepsilon_T = T_0 e_T P/\theta$ ;  $\delta = \varkappa/(c_p \rho_0 \vartheta h)$  — число Фурье;  $m = (T_{md} - T_1)/(T_0 - T_1)$ ;  $\lambda = L/h$  — параметр инверсии, характеризующий положение точки мезотермического максимума плотности внутри слоя (в силу линейности распределения температуры при равновесии  $\lambda = (T_2 - T_1)/(T_{md} - T_1)$ ). Здесь  $\eta$ ,  $\varkappa$  — динамическая вязкость и теплопроводность;  $c_p$  — удельная теплоемкость жидкости.

Так как исследование неустойчивости проводится только по отношению к монотонным возмущениям, далее будем рассматривать стационарные периодические по  $x$  и  $y$  решения полученной задачи.

**3. Основное состояние (механическое равновесие).** Стационарное решение  $\mathbf{V}_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  краевой задачи (2), соответствующее состоянию механического равновесия, имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}_0 = 0, \quad T_0 = mz.$$

Давление определяется путем численного решения уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_0}{dz} &= -\varepsilon_\rho \varepsilon_\gamma \varepsilon_T^2 p_0^4 + [-2\varepsilon_\rho \varepsilon_\gamma \varepsilon_T (mz - 1) + \varepsilon_T^2 (\varepsilon_\rho - \varepsilon_\gamma)] p_0^3 + \\ &+ [-\varepsilon_\rho \varepsilon_\gamma (mz - 1)^2 + 2\varepsilon_T (\varepsilon_\rho - \varepsilon_\gamma) (mz - 1) + \varepsilon_T^2] p_0^2 + \\ &+ [(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\gamma) (mz - 1)^2 + 2\varepsilon_T (mz - 1) - \frac{\varepsilon_\rho}{\beta}] p_0 + (mz - 1)^2 - \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

при  $p_0 = 0$  ( $z = \lambda$ ).

**4. Линеаризованные уравнения для возмущений.** Новые стационарные периодические решения задачи (2) будем искать в виде  $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{V}$ ,  $\bar{p} = p_0 + \nu\delta p$ ,  $\bar{T} = T_0 + T$ , где  $\mathbf{V}$ ,  $p$ ,  $T$  — неизвестные возмущения. С учетом выражений для  $\mathbf{V}_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  после линеаризации получаем систему уравнений для возмущений скорости, давления и температуры:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{V} - \nabla p + (\zeta(z)RT + \xi(z)p)\mathbf{k} &= 0, \\ mv_z &= \Delta T, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned}z = 0: \quad T &= 0, \quad \mathbf{V} = 0, \\ z = \lambda: \quad T &= 0, \quad v_z = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $\zeta(z) = (1 + \varepsilon_\rho p_0)(1 - \varepsilon_\gamma p_0)f$ ;  $f = T_0 - 1 + \varepsilon_T p_0$ ;  $\xi(z) = 2\varepsilon_T \zeta(z) + \varepsilon_\rho(1 - \varepsilon_\gamma p_0)f^2 - \varepsilon_\gamma(1 + \varepsilon_\rho p_0)f^2 - \varepsilon_\rho/\beta$ ;  $R = 2/(\nu\delta)$  — число Рэлея.

**5. Спектральная задача для определения критического числа Рэлея.** Решение линейной задачи (3), (4) будем искать в виде нормальных возмущений:

$$(\mathbf{V}', p', T')(x, y, z, t) = (\mathbf{V}, p, T)(z) \exp(\sigma t + i\alpha_x x + i\alpha_y y).$$

В силу предположения о монотонном характере неустойчивости полагаем  $\sigma = 0$ . Отделяя переменные и исключая давление, получаем краевую задачу на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned}T^{(6)} - \xi(z)T^{(5)} - 3\alpha^2 T^{(4)} + 2\alpha^2 \xi(z)T^{(3)} + 3\alpha^4 T'' - \alpha^4 \xi(z)T' - (\alpha^6 + m\alpha^2 \zeta(z)R)T &= 0; \\ z = 0: \quad T = T'' = T^{(3)} - \alpha^2 T' &= 0, \\ z = \lambda: \quad T = T'' = T^{(4)} &= 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь  $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$  — волновое число.

**6. Алгоритм численного решения спектральной задачи.** Задача на собственные значения (5), (6) исследовалась численно следующим образом.

Представим амплитуду возмущения температуры в виде линейной комбинации

$$T = \sum a_k w_k(z), \quad k = \overline{1, 6}, \quad (7)$$

где каждая из функций  $w_k(z)$  есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned}Lw_k(z) &= 0, \\ w_k(\lambda) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ w_k^{(k-1)}(\lambda) &= 1, \\ \dots\dots\dots \\ w_k^{(5)}(\lambda) &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

( $L$  — дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (5)).

При  $z = \lambda$  из граничных условий следует, что  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ . Используя граничные условия при  $z = 0$ , можно получить однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения трех других коэффициентов линейной комбинации (7). Данная система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Для заданного значения  $\alpha$  условие равенства нулю определителя этой системы определяет критическое число Рэлея. Следует отметить, что иногда из-за сложной зависимости характеристического определителя от параметров сложно искать его нули. Тогда целесообразно не находить нуль определителя, а требовать выполнения одного из условий (6). В таких случаях нормируют какую-либо из отличных от нуля физических величин, так чтобы ее значение

оставалось постоянным при изменении параметров задачи. Тогда из условия нормировки и оставшихся граничных условий можно определить коэффициенты разложения (7) [14]. В качестве истинного критического значения числа Рэлея  $R_*$  принимается минимальное найденное значение. Такое определение называется принципом Рэлея.

Однако данная последовательность действий может привести к потере точности при численных расчетах. Действительно, решение задачи Коши (8) эквивалентно решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой в вектор неизвестных величин входят функция  $w_k(z)$  и первые пять ее производных. В процессе численного решения, при приближении к концу промежутка интегрирования, система этих векторов, по которым разлагается решение задачи (5), (6), может вырождаться, что приводит к увеличению погрешности при определении коэффициентов линейной комбинации (7) и решения исходной задачи в промежуточных точках. Чтобы избежать этого, часто используют прием, описанный, например, в работах [12, 13]. Участок интегрирования разбивают на ряд промежутков меньшей длины, а в точках останова производят ортогонализацию системы базисных векторов, которые затем используются в качестве начальных данных при интегрировании на следующем интервале. Коэффициенты разложения (7) определяются для каждого из этих интервалов по рекуррентным формулам. Проводимые таким образом ортогонализации препятствуют “сплющиванию” базисных векторов, и точность расчетов повышается.

**7. Расчет критических течений.** Критические движения удовлетворяют стационарным уравнениям (3), (4). Для их анализа удобно ввести функцию тока для возмущений скорости  $\psi(x, z)$  (задача решается теперь на плоскости  $(x, z)$ ), которая определяется по формулам

$$v_x = \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x}.$$

Рассмотрим нормальные возмущения, периодически зависящие от  $x$ :

$$\psi'(x, z) = \psi(z) e^{i\alpha x}, \quad p'(x, z) = p(z) e^{i\alpha x}, \quad T'(x, z) = T(z) e^{i\alpha x}.$$

Вводя в (3), (4) функцию тока и действуя далее так же, как в случае, описанном выше, получим краевую задачу для возмущения температуры, которая в силу инвариантности задачи по отношению к вращению горизонтальной плоскости имеет тот же вид, что и задача (5), (6). Однако волновое число  $\alpha$  теперь задается формулой  $\alpha = \alpha_x$ . Амплитуда возмущения функции тока  $\psi(z)$  в данном случае связана с амплитудой возмущения температуры  $T(z)$  соотношением

$$\psi(z) = (\alpha^2 T(z) - T''(z)) / (i\alpha m),$$

а линии тока представляют собой линии уровня поверхности

$$F(x, z) = \text{Re} [\psi'(x, z)]. \quad (9)$$

В численных расчетах значения числа Рэлея и волнового числа полагались равными соответствующим критическим значениям.

**8. Численные эксперименты.** Для вычисления безразмерных величин, входящих в спектральную задачу (5), (6), достаточно задать, например, толщину слоя  $L$ , параметр инверсии  $\lambda$ , а также температуру нижней границы  $T_1$  и использовать значения физических констант из уравнения состояния (1). При определении функции, описывающей распределение температуры в покое, нужно найти также значение параметра  $m = (T_{md} - T_1) / (T_0 - T_1)$ , т. е. точку  $T_{md}$  пересечения профиля температуры в состоянии равновесия с графиком температуры инверсии. Для этого можно использовать известную зависимость температуры инверсии от давления, которая задается формулой  $T_m(p) = T_0(1 - eTp) = 3,985\,694 - 0,020\,617p$ . В этой формуле, в силу того что откло-

нения плотности от среднего значения, вызванные изменениями давления и температуры, малы, можно использовать гидростатическое давление, т. е. давление, соответствующее равновесию при постоянной характерной плотности. Отметим, что линейная зависимость температуры инверсии от глубины достаточно точно описывает поведение температуры инверсии воды. Например, в [2] приведена формула  $T_m = 3,98 - 0,0021H$ , где  $H$  — глубина, м.

При расчете линий тока, представленных на рис. 2, значение температуры на дне слоя и положение точки инверсии выбирались близкими к данным натуральных наблюдений на озере Байкал [2, 15]. Температура нижней границы полагалась равной  $3^\circ\text{C}$ , точка инверсии находилась на глубине 300 м,  $L = 500, 730, 1000$  м; положение точки инверсии соответствует значению  $z = 1$ . Амплитуда возмущения функции тока определяется после решения однородной системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения (7) с точностью до произвольного множителя. Значения изолиний на рис. 2, 3 приведены для случая, когда норма вектора решений этой системы равна 100.

Возникновение неустойчивости в нижней части слоя показано на рис. 3. Такая картина менее характерна для озера Байкал, однако можно представить ситуацию, когда на дне озера находится источник, вызывающий конвективные движения. На рис. 3 глубина слоя и температура на дне одинаковы и составляют 730 м и  $1^\circ\text{C}$ , положение точки инверсии изменялось. При промежуточных значениях параметра  $\lambda$ , как и на рис. 2, б, возможно появление двух конвективных ячеек.

Из рис. 2, 3 следует, что положение точки инверсии существенно влияет на картину течений в слое. Частицы жидкости с поверхности слоя могут проникать на глубину порядка сотен метров. В рассматриваемом случае этот факт можно объяснить тем, что линейный профиль температуры является неустойчивым выше точки инверсии (см. рис. 2) и ниже ее (см. рис. 3) [18].

Зависимости величин, характеризующих устойчивость (критическое число Рэлея, критическое волновое число), от параметров задачи представлены на рис. 4, 5.

На рис. 4 показаны нейтральные кривые (зависимости числа Рэлея от волнового числа), причем значения числа Рэлея отнесены к соответствующему предельному критическому значению  $R_*$  [8]. Можно заметить, что если глубина слоя невелика (в таких случаях возникающие перепады давления не оказывают значительного влияния и функции  $\rho_m$ ,  $\gamma$ ,  $T_m$  в уравнении (1) можно считать постоянными), то критические значения числа Рэлея (которые выбираются как минимумы на соответствующих нейтральных кривых) хорошо согласуются с этими значениями для предельного случая. При больших значениях  $L$  появляются существенные различия.

На рис. 4, а представляет интерес кривая 4. Значение критического волнового числа отличается от соответствующего предельного значения [8]. Задачу можно рассматривать для двух случаев, когда перепад температуры на границах слоя больше или меньше соответствующего перепада температуры инверсии. (Изменение глубины слоя приводит к изменению перепада температуры инверсии на его границах (вследствие увеличения перепада давления) и разности  $T_2 - T_1$  (вследствие линейности распределения температуры в состоянии механического равновесия).) Значения  $\alpha_*$  при различных значениях параметра инверсии в этих двух случаях показаны на рис. 5. Изменение значения критического волнового числа  $\alpha_*$  по сравнению с предельным [8] наблюдается при достаточно малых перепадах температуры. Этому случаю соответствует кривая 1. В другом случае критическое значение волнового числа совпадает с его предельным значением (кривая 2).

**Заключение.** В работе рассмотрена модель конвекции с учетом зависимости плотности жидкости от температуры и давления. Результаты численного анализа данной модели позволяют сделать следующие выводы.



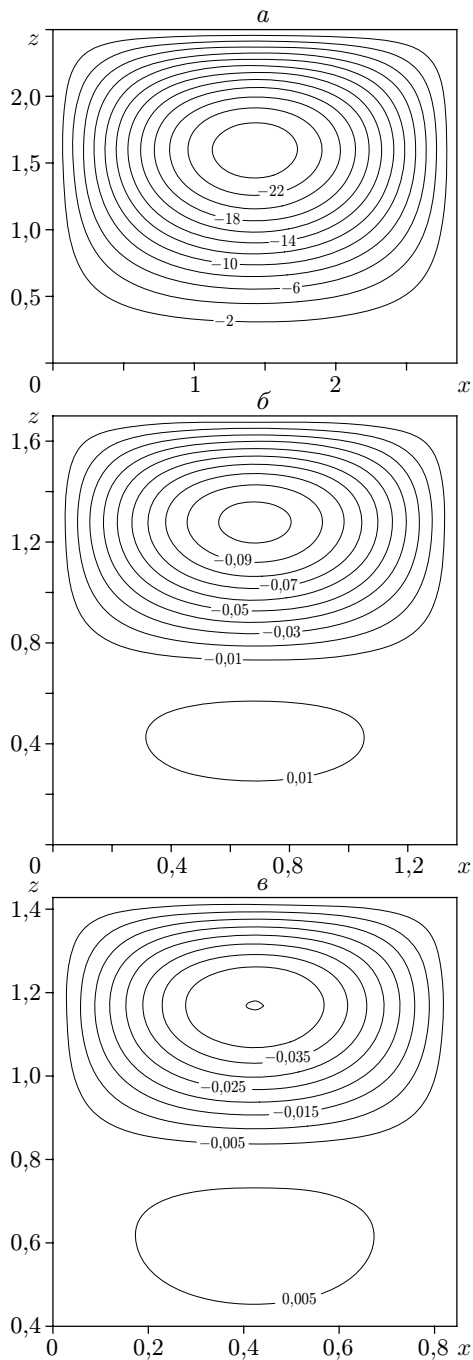


Рис. 2

Рис. 2. Возникновение неустойчивости в верхней части слоя:

*a* —  $L = 500$  м,  $T_1 = 3$  °С,  $T_{md} = 3,38$  °С,  $T_2 = 3,95$  °С; *б* —  $L = 730$  м,  $T_1 = 3$  °С,  $T_{md} = 3,38$  °С,  $T_2 = 3,64$  °С; *в* —  $L = 1000$  м,  $T_1 = 3$  °С,  $T_{md} = 3,38$  °С,  $T_2 = 3,54$  °С; числа — значения изолиний поверхности (9)

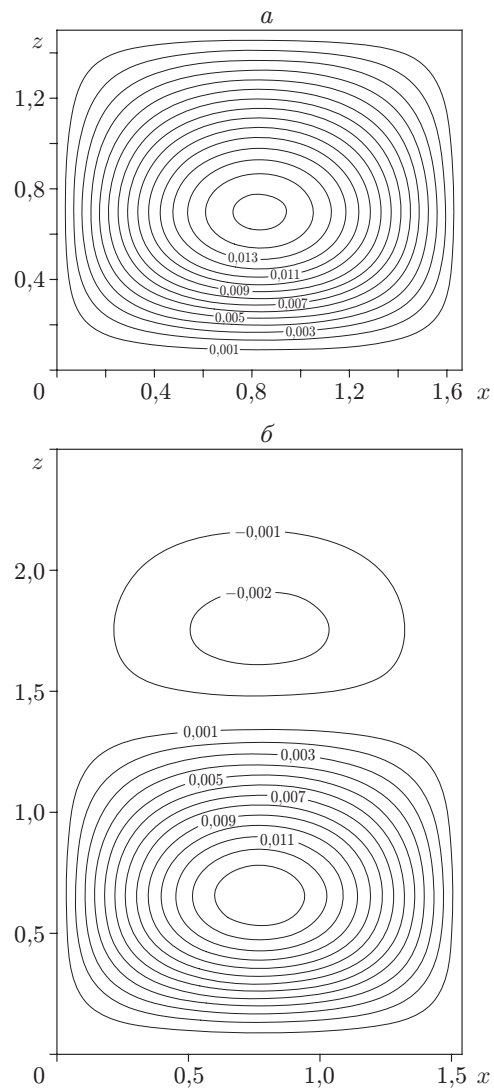


Рис. 3

Рис. 3. Возникновение неустойчивости в нижней части слоя:

*a* —  $L = 730$  м,  $T_1 = 1$  °С,  $T_{md} = 3,49$  °С,  $T_2 = 4,74$  °С,  $\lambda = 1,5$ ; *б* —  $L = 730$  м,  $T_1 = 1$  °С,  $T_{md} = 2,93$  °С,  $T_2 = 7,76$  °С,  $\lambda = 3,5$ ; числа — значения изолиний поверхности (9)

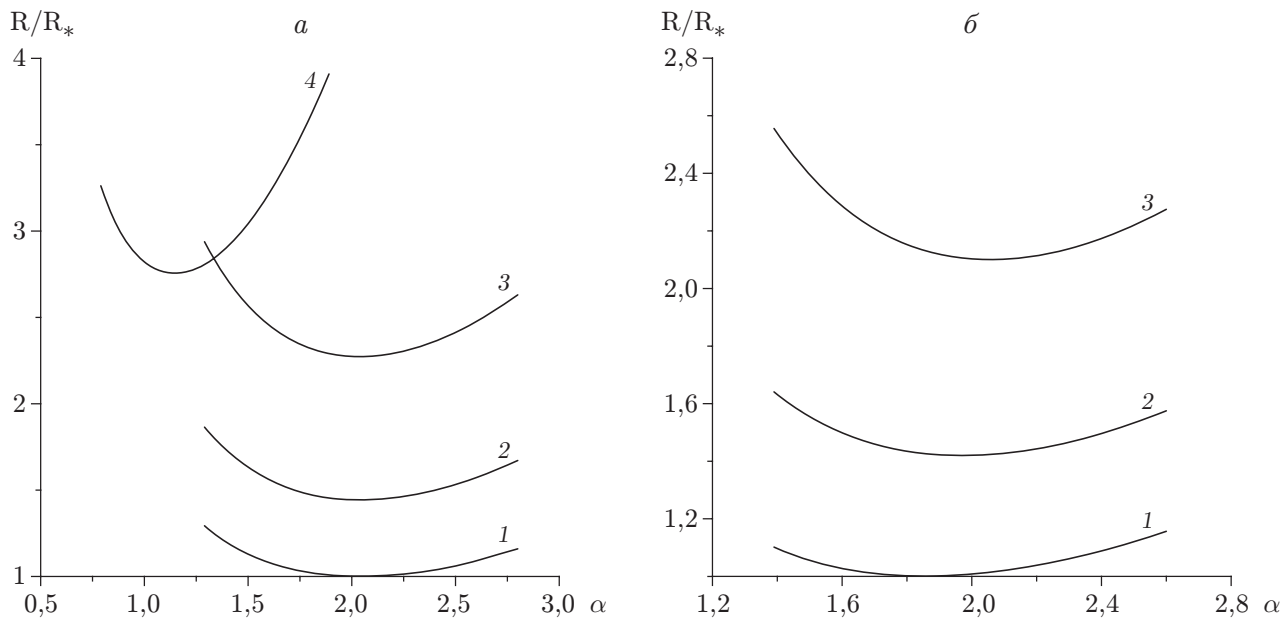


Рис. 4. Нейтральные кривые:

*a* —  $T_1 = 2 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 2,4$  (1 —  $L = 1 \text{ м}$ ; 2 —  $L = 200 \text{ м}$ ; 3 —  $L = 400 \text{ м}$ ; 4 —  $L = 1070 \text{ м}$ );  
*б* —  $T_1 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 6,08 \text{ }^\circ\text{C}$  (1 —  $L = 1 \text{ м}$ ; 2 —  $L = 250 \text{ м}$ ; 3 —  $L = 500 \text{ м}$ )

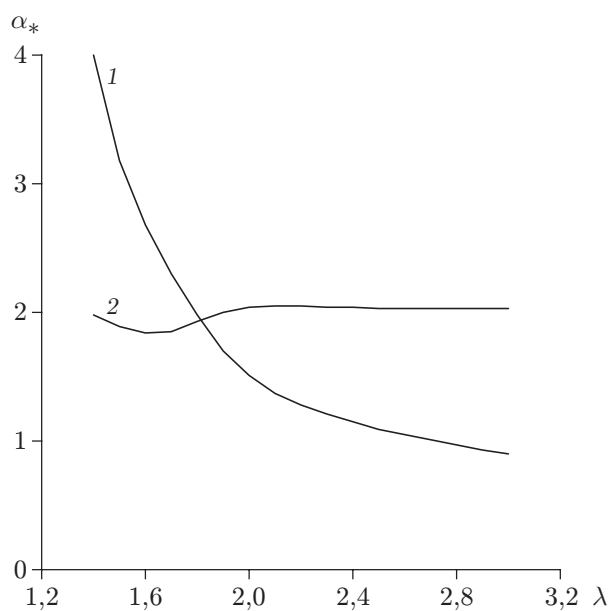


Рис. 5. Зависимость критического волнового числа от параметра инверсии:

1 — перепад температуры на границах слоя меньше перепада температуры инверсии;  
 2 — перепад температуры на границах слоя больше перепада температуры инверсии

Зависимость плотности от давления оказывает существенное влияние на конвекцию в глубоких слоях жидкости.

При небольшой глубине слоя, а также при достаточно малых значениях параметров  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\gamma$ ,  $\varepsilon_T$ , характеризующих зависимость плотности от давления, этой зависимостью можно пренебречь. В таких случаях полученные результаты хорошо согласуются с результатами, известными для случая проникающей конвекции.

Процессы, обусловленные аномалией теплового расширения, могут служить причиной конвекции. Возникающие при этом движения способны переносить частицы с поверхности на глубину порядка сотен метров. Однако следует учитывать, что реальное распределение температуры, по данным натурных наблюдений, не является линейным.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву, И. В. Стуровой, В. И. Юдовичу и К. А. Надолину за полезные советы и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гранин Н. Г., Шимараев М. Н.** К вопросу о стратификации и механизме конвекции в Байкале // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2. С. 381–385.
2. **Ravens T. M., Kosis O., Wuest A., et al.** Direct evidence of deep water renewal in southe basin of lake Baikal // 5th Intern. symp. on stratified flows, Vancouver, 10–13 July 2000. Vancouver: Dep. of civil engng: Univ. of British Columbia, 2000. V. 1. P. 419–425.
3. **Верещагин Г. Ю.** Некоторые данные о режиме глубинных вод Байкала в районе Маритуга // Тр. Комиссии по изучению оз. Байкала. 1927. Т. 2. С. 77–138.
4. **Овсянников Л. В.** Уравнение динамической конвекции моря: Препр. / СО АН СССР. Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1967.
5. **Гершуни Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. М.: Наука, 1972.
6. **Veronis G.** Penetrative convection // *Astrophys. J.* 1963. V. 137, pt 2. P. 641–663.
7. **Furumoto A., Rooth C.** Observations on convection in water cooled below // *Geophys. Fluid Dynamics.* 1961. № 3. P. 1–14.
8. **Надолин К. А.** Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 1. С. 43–49.
9. **Надолин К. А.** О приближении Буссинеска в задаче Рэлея — Бенара // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 5. С. 3–10.
10. **Надолин К. А.** О проникающей конвекции в приближении изотермически несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 2. С. 40–52.
11. **Гольдштик М. А.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
12. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи мат. наук.* 1961. Т. 16, вып. 3, № 99. С. 171–174.
13. **Андреев В. К.** Термокапиллярная неустойчивость / В. К. Андреев, В. Е. Захватаев, Е. А. Рябицкий. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2000.
14. **Гапонов С. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
15. **Shimaraev M. N.** Physical limnology of lake Baikal: a review / M. N. Shimaraev, V. I. Verbolov, N. G. Granin, P. P. Sherstyankin. Irkutsk; Okayama: S.n., 1994.
16. **Бочаров О. Б., Васильев О. Ф., Овчинникова Т. Э.** Приближенное уравнение состояния пресной воды вблизи температуры максимальной плотности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35, № 4. С. 556–558.

17. **Юдович В. И.** Об уравнениях свободной конвекции в приближении Обербека — Буссинеска. Ростов н/Д, 1990. Деп. в ВИНТИ 13.12.90, № 6225-В90.
18. **Бочаров О. Б., Овчинникова Т. Э.** О термогравитационной конвекции в прибрежной зоне глубокого озера в период весенне-летнего прогрева // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 4. С. 3–12.

*Поступила в редакцию 9/XII 2004 г.,  
в окончательном варианте — 24/V 2006 г.*

---