ПМТФ, № 5, 1973

УДК 539.32 + 518.6

О ГРАНИЦАХ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А. Г. Фокин

(Москва)

В связи с широким использованием в технике различного рода неоднородных материалов (стекло-, угле-, боропластиков, керметов, бетона, армированных материалов и т. д.) возникает необходимость расчета упругих свойств подобных систем. При этом в каждом случае приходится разрабатывать специфические методы нахождения как упругих полей, так и эффективных модулей. Поскольку, как правило, подобные решения не учитывают характер распределения неоднородностей в пространстве, который отражается на виде центральных моментных функций [1], их можно отнести к одному классу, а следовательно, получить единым методом [2].

В данной статье с помощью метода решения стохастических задач для микронеоднородных твердых тел, предложенного в работе автора [2],находятся в произвольном приближении упругие поля и эффективные модули. В зависимости от выбора параметров последние образуют границы, внутри которых лежат точные значения эффективных модулей. Показывается, что использованные ранее условия для нахождения этих параметров [3] не являются наилучшими.

Рассчитываются эффективные упругие модули неоднородной среды и находятся для них границы, более узкие, чем границы [3].

1. Пусть упругие свойства рассматриваемой статистически однородной неограниченной среды описываются случайным тензорным полем $\lambda_{ijkl}(\mathbf{r})$. Наряду с этим введем однородное тензорное поле сравнения λ^c_{ijkl}, характеризующее упругие свойства некоторого однородного тела.

Поля смещений u_i и u_i^c, соответствующие обоим тензорам упругих модулей, удовлетворяют уравнениям

$$L_{ik}u_k = -f_i, \quad L_{ik} = \nabla_j\lambda_{ijkl}\nabla_l$$

$$L^c_{ik}\, u^c_k = -f_i, \quad L^c_{ik} = \nabla_j\, \lambda^c_{ijkl}\nabla_l$$

где f_i — вектор плотности объемных сил.

Задача состоит в нахождении тензоров деформаций $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \equiv u_{(i,j)}$ и эффективных модулей λ^*_{ijkl}, определяющих средние деформации $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ посредством уравнения

$$L^*_{ik}\,\langle u_k\rangle = -f_i, \quad L^*_{ik} = \nabla_j\lambda^*_{ijkl}\nabla_l \tag{1.1}$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по области v, размеры которой много меньше масштаба неоднородности регулярной составляющей поля $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$, но много больше размеров зерна неоднородности, под которым следует понимать область постоянного значения λ_{ijkl}. Для эргодических полей усреднение по объему совпадает с усреднением по ансамблю реализаций.

В общем случае тензор λ^*_{ijkl} обладает нелокальностью, что приводит к интегральной связи между напряжениями и деформациями или к необходимости учета неоднородности макроскопических полей деформаций $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ [4]. Однако при рассмотрении квазиоднородных полей $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$, для которых размеры области неоднородности существенно превышают масштабы нелокальности λ^*_{ijkl}, эта нелокальность не проявляется [5–7] и величину λ^*_{ijkl} в уравнении (1.1) можно рассматривать как обычный тензор.

Можно показать [3], что для указанных полей $\varepsilon^c_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle$. При этом функция f_i, очевидно, имеет область неоднородности того же порядка, что и поле $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$.

Опуская в дальнейшем тензорные индексы и используя результаты п. 1, 2 работы [2], запишем выражение для поля деформаций

$$(1.2) \qquad \varepsilon = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n = A_n \langle \varepsilon \rangle, \qquad \lambda' = \lambda - \lambda_c$$

$$A_n = (1 - g\lambda')^{-1} R_n \langle (1 - g\lambda')^{-1} R_n \rangle^{-1}, \qquad R_n = \sum_{k=0}^{n} (Hl)^k$$

где оператор H действует по правилу

$$(Hl)^k = Hl\,(Hl)^{k-1} = hl\,(Hl)^{k-1} - \langle hl\,(Hl)^{k-1} \rangle \equiv \delta\,[hl\,(Hl)^{k-1}]$$

а δ — оператор взятия случайной составляющей. Здесь g и h — операторы, определенные соответственно сингулярной и формальной составляющими второй производной тензора Грина оператора L_c.

С учетом (1.2) соответствующее приближение для поля напряжений и тензора эффективных модулей имеет вид

$$(1.3) \qquad \sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n, \qquad \sigma_n = \lambda A_n \langle \varepsilon \rangle, \qquad \langle \sigma_n \rangle = \lambda_n \langle \varepsilon \rangle$$

$$\lambda_* = \lim_{n\to\infty} \lambda_n, \qquad \lambda_n = \langle \lambda A_n \rangle$$

Формулы (1.2) и (1.3) полностью решают задачу об описании неодное родной упругой среды в n-м приближении. При $n \to \infty$ получаем точное решение. Однако из-за математических трудностей [2,7 10] в большинств- случаев приходится ограничиваться нулевым (сингулярным) приближением в формулах (1.2) и (1.3), которое учитывает лишь локальные взаимодействия между зернами неоднородности

$$(1.4) \qquad R_s \equiv R_0 = 1, \qquad \lambda_s \equiv \lambda_0 = \langle \lambda A_0 \rangle$$

$$(1.5) \qquad A_0 = X^{-1} X_c \langle X^{-1} X_c \rangle^{-1}, \qquad X = \lambda + b_c, \qquad X_c = \lambda_c + b_c$$

а тензор b_c определяется равенством $gX_c = -1$.

Следует заметить, что используемое здесь статистическое усреднение предполагает усреднение как по реализациям упругих модулей, так и по реализациям формы зерен неоднородности [11]. Последнюю целесообразно описывать вектором **a**, проведенным из начала координат, помещенного в центре масс однородного зерна, в точку, лежащую на ограничивающей его поверхности. Тензор g является функцией формы поверхности зерна, а следовательно, и вектора **a**.

Формула (1.4) и (1.5), таким образом, позволяют рассчитать эффективные модули в случае произвольной микронеоднородной среды в сингулярном приближении. Если зерна имеют сферическую форму или их ориентации строго упорядочены (полная механическая текстура), усреднение по форме зерен (или по реализациям g) снимается. В этом случае из (1.5) и (1.4) имеем

$$(1.6) \qquad X_s^{-1} = \langle X^{-1} \rangle, \qquad X_s = \lambda_s + b_c$$

Из (1.6), осуществив усреднение, можно получить явный вид эффективных упругих модулей λ_*, которые будут зависеть от параметра λ_c и формы зерна. Решение, совпадающее с (1.6), было получено в работах [2,3,7–14], однако вид среды (поликристалл механическая смесь), форма зерна, а также значение параметра λ_c в этих работах были различными.

2. Установим теперь связь между λ_* и его приближенным значением λ_n в виде неравенства, знак которого определяется значением λ_c. Для этой цели рассмотрим удвоенную плотность потенциальной энергии упругих деформаций $\varepsilon\lambda\varepsilon$, среднее значение которой по характерному объему v, упоминавшемуся в п. 1, удовлетворяет в силу квазиоднородности поля $\langle\varepsilon\rangle$ следующим равенствам:

$$\langle\varepsilon\lambda\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{v}\int\limits_v \varepsilon\lambda\varepsilon\, dV = \frac{1}{v}\int\limits_v \langle\varepsilon\lambda\varepsilon\rangle\, dV \tag{2.1}$$

Учитывая (2.1), полную потенциальную энергию деформаций U запишем в вид

$$U = \frac{1}{2}\int \varepsilon\lambda\varepsilon\, dV = \frac{1}{2}\int \langle\varepsilon\lambda\varepsilon\rangle\, dV$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

В первой краевой задаче задается перемещение на поверхности области. Согласно принципу минимума потенциальной энергии [14] полная энергия деформаций U в единственном решении (σ, ε) будет меньше, чем при любых других виртуальных деформациях $\tilde{\varepsilon}$, которые соответствуют непрерывному и кусочно-непрерывно дифференцируемому полю смещений, принимающих на поверхности заданные значения.

Таким образом, имеет место неравенство [14]

$$U \leqslant \frac{1}{2}\int \langle\tilde{\varepsilon}\lambda\tilde{\varepsilon}\rangle\, dV$$

или приводящее к нему неравенство

$$\langle\varepsilon\lambda\varepsilon\rangle \leqslant \langle\tilde{\varepsilon}\lambda\tilde{\varepsilon}\rangle \tag{2.2}$$

Прибавляя к (2.2) равенство

$$0 = \langle(\langle\varepsilon\rangle - \tilde{\varepsilon})\tilde{\sigma}\rangle$$

справедливое для квазиоднородных полей, получим

$$\langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle \leqslant \langle\varepsilon\rangle\langle\tilde{\sigma}\rangle + \langle\tilde{\varepsilon}\ (\lambda\tilde{\varepsilon}\ \tilde{\sigma}) - \rangle \tag{2.3}$$

Здесь $\tilde{\sigma}$ — произвольное кусочно-непрерывно дифференцируемое поле напряжений, удовлетворяющее уравнению

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = -f_i \tag{2.4}$$

Обычное для такого рода задач представление $\tilde{\sigma}$ имеет вид [3,12–14]

$$\tilde{\sigma} = \lambda_c\tilde{\varepsilon} + \tilde{\tau} \tag{2.5}$$

где поляризованное напряжение $\tilde{\tau}$ удовлетворяет согласно (2.4) уравнению

$$L_{ik}{}^c\tilde{u}_k + \tilde{\tau}_{ik,k} = -f_i \tag{2.6}$$

Вычтя из (2.6) уравнение, полученное его усреднением, находим связь между $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\varepsilon} = \langle\varepsilon\rangle + G * \delta\tilde{\tau} \tag{2.7}$$

Здесь G — вторая производная тензора Грина оператора L_c. Вид тензора $\tilde{\tau}$, свойства которого детально описаны в [14], влияет на $\tilde{\sigma}$, причем при $\tilde{\tau} = \lambda'\tilde{\varepsilon}$ напряжение $\tilde{\sigma}$ и деформации $\tilde{\varepsilon}$ совпадают с истинными значениями σ и ε.

Выберем аппроксимирующее значение $\tilde{\tau}$ в виде

$$\tilde{\tau} = \lambda'\varepsilon_n \tag{2.8}$$

где ε_n определено согласно (1.2). Тогда из (2.5) имеем

$$\tilde{\sigma} = \lambda\varepsilon_n + \lambda_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n) \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.3) и учитывая (2.5) и (2.8), получим

$$\langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle \leqslant \langle\varepsilon\rangle\lambda_c\langle\varepsilon\rangle + \langle\varepsilon\rangle\langle\tilde{\tau}\rangle + \langle\tilde{\tau}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\rangle + M_1 \tag{2.10}$$
$$M_1 = \langle(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\lambda'(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\rangle$$

Пусть имеет место неравенство

$$M_1 \leqslant 0 \tag{2.11}$$

условия выполнения которого обсуждаются ниже. Тогда из (2.10) находим

$$\langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle \leqslant \langle\varepsilon\rangle\lambda_c\langle\varepsilon\rangle + \langle\varepsilon\rangle\langle\tilde{\tau}\rangle + \langle\tilde{\tau}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\rangle \tag{2.12}$$

Случайное поле $\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n$ с помощью (2.7), (2.8) можно привести к виду

$$\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n = \langle\varepsilon\rangle + G * \delta\tilde{\tau} - p\tilde{\tau}, \quad p\lambda' = 1 \tag{2.13}$$

Подстановка (2.13) в (2.12) дает

$$\langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle \leqslant \langle\varepsilon\rangle\lambda_c\langle\varepsilon\rangle + 2\langle\varepsilon\rangle\langle\tilde{\tau}\rangle - \langle\tilde{\tau}p\tilde{\tau}\rangle + \langle\delta\tilde{\tau}G * \delta\tilde{\tau}\rangle \tag{2.14}$$

Можно показать [3], что правая часть (2.14) имеет экстремум при условии

$$\tilde{\varepsilon} = p\tilde{\tau}$$

что согласно (2.8) дает

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_n \tag{2.15}$$

При выполнении неравенства (2.11) этот экстремум будет минимумом [3].

С помощью (1.2), (1.3), (2.8) и (2.15) из (2.12) получаем неравенство

$$\langle\varepsilon\rangle\lambda_*\langle\varepsilon\rangle \leqslant \langle\varepsilon\rangle\langle\lambda\varepsilon_n\rangle = \langle\varepsilon\rangle\lambda_n\langle\varepsilon\rangle$$

которое устанавливает верхнюю границу для λ_*

$$\lambda_* \leqslant \lambda_n \tag{2.16}$$

Если вместо (2.11) выполняется неравенство

$$N_1 = \langle\lambda_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\, s'\lambda_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_n)\rangle \leqslant 0 \quad (s' = s - s_c) \tag{2.17}$$

где s — тензор упругих податливостей, обратный тензору λ, то, используя теорему о минимуме дополнительной энергии [14], получим

$$\lambda_* \geqslant \lambda_n \tag{2.18}$$

что дает нижнюю границу.

Нужно иметь в виду, что в силу условий (2.11) и (2.17) тензор λ_c, определяющий λ_n, оказывается различным для (2.16) и (2.18). Обозначая через $\lambda_c^\pm$ тензор λ_c, удовлетворяющий соответственно неравенствам (2.11) и (2.17), из (2.16) и (2.18) найдем

$$\lambda_n^- \leqslant \lambda_* \leqslant \lambda_n^+ \tag{2.19}$$

где $\lambda_n^\pm$ — значения тензора λ_n, полученные с помощью тензоров $\lambda_c^\pm$ соответственно.

Проводя аналогичное рассмотрение для второй краевой задачи, когда на поверхности задаются нагрузки [14], получим границы для λ_* в форме (2.19). При этом $\lambda_c^\pm$ удовлетворяют неравенствам

$$M_2 = \langle s_c(\tilde{\sigma} - \sigma_n)\lambda' s_c(\tilde{\sigma} - \sigma_n)\rangle \leqslant 0 \tag{2.20}$$

$$N_2 = \langle(\tilde{\sigma} - \sigma_n)s'(\tilde{\sigma} - \sigma_n)\rangle \leqslant 0$$

которые заменяют соответственно неравенства (2.11) и (2.17).

Следует отметить, что границы (2.19) в отличие от границ, полученных в [3], которым соответствует нулевое приближение, могут быть сделаны как угодно узкими, а при $n \to \infty$ совпадают с точным значением эффективных модулей λ_*. Для вычисления λ_n, однако, необходимо иметь информацию о центральных моментных функциях высших порядков [1].

3. В заключение покажем, что границы (2.19) могут быть улучшены по сравнению с границами Хашина — Штрикмана [3] также и за счет более удачного выбора параметра λ_c. В работах [3,12–14] принимается, что неравенства (2.11), (2.17) и (2.20) имеют место при условии

$$\lambda' \leqslant 0 \tag{3.1}$$

для форм M_1 и M_2 и

$$s' \leqslant 0 \tag{3.2}$$

для форм N_1 и N_2. Очевидно, последнее эквивалентно неравенству

$$\lambda' \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Неравенства (3.1) — (3.3) следует, как обычно, понимать в смысле отрицательной (положительной) полуопределенности квадратичных форм, построенных с помощью тензоров λ' и s'.

Однако (3.1) и (3.2) не являются единственно возможными решениями неравенств (2.11), (2.17) и (2.20). Рассмотрим, в частности, сингулярное приближение для случая, когда объемные силы отсутствуют, а макроскопические поля однородны.

Тогда квадратичные формы M и N сводятся к моментным функциям третьего порядка, объем v можно устремить к бесконечности, а упругие поля напряжений и деформаций однородны внутри зерна [12,13].

Легко видеть, что в случае механической смеси двух изотропных компонентов неравенства $M_1 \leqslant 0$ и $M_2 \leqslant 0$ удовлетворяются при условии

$$c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1 - \lambda_c \leqslant 0 \tag{3.4}$$

а неравенства $N_1 \leqslant 0$ и $N_2 \leqslant 0$ — при условии

$$c_1 s_2 + c_2 s_1 - s_c \leqslant 0 \tag{3.5}$$

где c_α, λ_α, s_α — объемная концентрация и тензоры упругих модулей и упругих податливостей α-го компонента, причем поскольку оба компонента изотропны, то для макроскопически изотропной среды поле сравнения λ_c следует выбирать также изотропным. Но тогда неравенства (3.4) и (3.5) определяют тензоры

$$\lambda_c^+ = \lambda_1 \langle \lambda^{-1} \rangle \lambda_2, \quad \lambda_c^- = \lambda_1 \langle \lambda \rangle^{-1} \lambda_2 \tag{3.6}$$

удовлетворяющие при $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ неравенствам

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_c^- \leqslant \lambda_c^+ \leqslant \lambda_2 \tag{3.7}$$

Поскольку согласно (3.1) — (3.3) в качестве λ_c^+ и λ_c^- следует выбирать λ_2 и λ_1 [1], а λ_s растет с ростом λ_c [12], выбранный $\lambda_c \pm$ приводит к более узким границам. Обозначая через $\lambda_H \pm$ границы, найденные с помощью $\lambda_c \pm$, удовлетворяющих (3.1) — (3.3) [3,12–14], а через $\lambda_s \pm$ — аналогичные значения, полученные с помощью (3.6), и учитывая (3.7), запишем

$$\lambda_H^- \leqslant \lambda_s^- \leqslant \lambda_* \leqslant \lambda_s^+ \leqslant \lambda_H^-$$

Итак, использование всей информации, заключенной в квадратичных формах M и N позволяет даже в рамках сингулярного приближения сузить границы Хашина — Штрикмана за счет более удачного выбора параметра λ_c. Дальнейшее сужение границ возможно лишь при учете неоднородности поля в зерне, которое при $n \neq 0$ в (1.2) и (1.3) описывается членами, полученными с помощью нелокального оператора h.

В заключение отметим, что приближенные значения эффективных модулей, полученные в работах [7–10], эквивалентны значениям λ_S, вычисленным с помощью (1.6), если в качестве λ_c выбрать значение $\lambda_V \equiv \langle \lambda \rangle$ для так называемой схемы Фойгта [7–10] и $\lambda_R \equiv \langle \lambda^{-1} \rangle^{-1}$ для схемы Ройсса [7,10]. Хотя в обоих случаях найденные значения λ_S лежат внутри границ Хашина—Штрикмана [7], сами они не образуют границ. Действительно, значения λ_V и λ_R удовлетворяют неравенству (3.4) при условиях

$$(c_1 - c_2)\,(\lambda_1 - \lambda_2) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

$$(c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1)^2 \leqslant \lambda_1\lambda_2 \tag{3.9}$$

которые при некоторых концентрациях выполняются одновременно. В этом случае и схема Фойгта и схема Ройсса дают верхние границы. С другой стороны, λ_V^{-1} и λ_R^{-1} удовлетворяют неравенству (3.5) при условиях

$$(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)^2 \leqslant \lambda_1\lambda_2 \tag{3.10}$$

$$(c_1 - c_2)\,(\lambda_1 - \lambda_2) \leqslant 0 \tag{3.11}$$

При одновременном выполнении (3.10) и (3.11) обе схемы дают нижние границы. Однако чтобы значения эффективных модулей, полученные в схеме Фойгта ($\lambda_c = \lambda_V$) и в схеме Ройсса ($\lambda_c = \lambda_R$) образовывали границы для λ_*, необходимо одновременное выполнение неравенств (3.8) и (3.11).

Так как это невозможно, то решения в схемах Фойгта и Ройсса не приводят к построению границ, но могут быть использованы для улучшения одной из них.

Поступила 27 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.
2. *Фокин А. Г.* Об использовании сингулярного приближения при решении задач статистической теории упругости. ПМТФ, 1972, № 1.
3. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach on the theory of the elastic behaviour of policrystals. J. Mech. Phys. Solids, 1962, vol. 10, No. 4.
4. *Новожилов В. В.* О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, № 1.
5. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 11.
6. *Ломакин В. А.* О теории деформирования микронеоднородных тел и ее связи с моментной теорией упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
7. *Фокин А. Г., Шермергор Т. Д.* Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий. ПМТФ, 1969, № 1.
8. *Болотин В. В., Москаленко В. Н.* К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
9. *Хорошун Л. П.* К теории изотропного деформирования упругих тел со случайными неоднородностями. Прикл. механ., 1967, т. 3, № 9.
10. *Фокин А. Г.* Приближение локальности связей в теории упругости. Московский ин-т электронной техники, Сб. научных трудов по проблемам микроэлектроники, 1969, физ.-мат. серия.
11. *Kneer G.* Über die Berechnung der Elastizitatsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur Phus. Stat. Sol., 1965, vol. 9, No. 3.
12. *Walpole L. J.* On bounds For the overall elastic moduli of ingomogeneous sistem-II. J. Mech. Phys. Solids, 1966, vol. 14, No. 5.
13. *Walpole L. J.* On the overall elastic moduli of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 1969, vol. 17, No. 4.
14. *Hill R.* New derivations of some elastic extremum principles. Progr. in Appl. Mech. Prager Anniversary volume, New York, London, 1963, pp. 99.