

## РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 539.421

### ИЗГИБ ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ

**В. Д. Кургузов, А. Г. Демешкин**

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
E-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru,  
просп. Академика Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск, Россия*

Проведено экспериментальное и теоретическое исследование трещиностойкости компактных образцов и двух типов образцов двухконсольных балок из полиметилметакрилата при растяжении. В условиях нагружения по моде I критические нагрузки и траектории распространения трещин для данных образцов заметно различаются. Представлена теоретическая модель, основанная на энергетических принципах и позволяющая прогнозировать нестабильность пути роста трещины. Она учитывает сингулярный член напряжения перед вершиной трещины и первый несингулярный член ( $T$ -напряжение). Для проверки теоретической модели используются результаты экспериментов, полученные в испытаниях на разрушение нескольких образцов с трещинами моды I. Выполнено компьютерное моделирование распространения трещины в геометрически и физически нелинейной постановке. Сопоставлены экспериментальные данные с результатами расчетов. Показано, что нестабильность пути трещины существенно зависит от геометрии и может быть предотвращена путем изменения геометрии образца или типа нагрузки.

*Хрупкое разрушение, критерии прочности, излом траектории трещины, компьютерная модель*

DOI: 10.15372/FTPRPI20210404

С ростом трещины в массиве горных пород в условиях смешанного нагружения ее путь обычно изгибается. Это экспериментально наблюдаемый факт, представляющий собой базовый феномен разрушения, необходимый для понимания природы сложных траекторий распространения трещин. Для прогнозирования критической нагрузки и направления инициации трещины требуется критерий разрушения, учитывающий влияние комбинации локальных напряжений растяжения и сдвига. Начиная с 1960-х годов XX в. предложены критерии разрушения для прогнозирования излома трещины, включающие слагаемые, связанные с коэффициентом интенсивности напряжения  $K_I$  по моде I разрушения и с  $K_{II}$  по моде II [1–4]. Далее под смешанной модой понимается комбинация плоских мод I и II без учета моды III.

Согласно гипотезе Эрдогана–Си, излом трещины обычно следует в направлении, где в вершине преобладает  $K_I$  [1]. Иными словами, искривленная трещина является трещиной нормального отрыва (мода I разрушения). Однако спорным остается вопрос о наличии коэффициента  $K_{II}$  на изогнутой трещине, когда критерий максимальных растягивающих напряжений не предсказывает существование  $K_{II}$ . Некоторые исследователи считают, что полностью исключить  $K_{II}$  сложно, особенно в начальный момент, когда трещина только начинает зарождаться [4]. Более того, устранение  $K_{II}$  — постепенный процесс во время зарождения и распространения трещины, что качественно описывает критерий плотности энергии деформации.

Концепция критического коэффициента интенсивности напряжения (силового критерия разрушения Ирвина) до сих пор востребована в механике разрушения искусственных строительных материалов и горных пород. В [5] оптимальная форма выработки определена методом минимизации коэффициентов интенсивности напряжений. В задачах гидроразрыва нефтяного пласта возникает необходимость применения более сложных критериев разрушения, позволяющих описывать зарождение, направление роста, излом, перегиб, искривление и ветвление трещин, распространяющихся в горных породах [6, 7].

Трещины могут образовываться в элементах конструкций в течение срока их службы или из-за наличия скрытых дефектов. При эксплуатации конструкция теряет свою первоначальную несущую способность и выходит из строя при значительно более низких внешних нагрузках. В частности, такие хрупкие материалы, как керамика, бетон, горные породы, эбонит, оргстекло, уязвимы к механическим и тепловым нагрузкам, когда в их структуре присутствует трещина. Если геометрия и условия нагружения элемента конструкции с трещинами симметричны относительно линии трещины, этот элемент испытывает нагружение по чистой моде I. Ввиду симметрии предполагается, что трещина моды I в изотропных хрупких материалах распространяется вдоль начальной линии трещины. В [2, 4, 8, 9] обнаружено, что в некоторых образцах моды I рост трещины не стабилен и отклоняется от своей первоначальной линии после нескольких инкрементов ее подрастания. Отклонение траектории трещины от первоначального направления обусловлено сильными геометрическими ограничениями и высокими значениями  $T$ -напряжений [10].

Для учета влияния геометрии на прогноз разрушения хрупких материалов необходимо использовать двухпараметрические критерии разрушения, учитывающие первый сингулярный член и второй несингулярный член напряжения в разложении Вильямса. Важность использования  $T$ -напряжений в линейной механике разрушения описана в [11]. В [12–14] показана значимость  $T$ -напряжений в двухпараметрической механике разрушения и экспериментально проверена необходимость использования несингулярных компонент поля напряжений при построении критериев разрушения и предельного состояния. В [15–17] рассматривается влияние членов напряжений более высокого порядка на точность прогнозирования поведения материала при разрушении. Таким образом, исследования по расчету и применению  $T$ -напряжений хрупкого и квазихрупкого типов разрушений интенсивно развиваются, подчеркивая актуальность данного направления. Для расширения рамок применимости классической механики разрушения и критериев разрушения необходимо введение дополнительных параметров, более полно характеризующих напряженно-деформированное состояние и отражающих локальное стеснение деформаций (трехосность напряженного состояния) в окрестности вершины трещины.

Цель настоящей работы — исследование распространения трещин в образцах из полиметилметакрилата трех различных геометрий, теоретическая оценка критерия максимальных растягивающих напряжений и плотности энергии деформации. Геометрия образца может сильно влиять на путь роста трещины при нагружении по моде I. Критерий плотности энергии деформации позволяет успешно прогнозировать нестабильность продвижения трещин в испытанных образцах. Критические нагрузки, искривления траекторий трещин, параметры биаксиальности сравниваются с результатами из [18–20].

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Полиметилметакрилат — самый распространенный материал при проведении экспериментов по разрушению, поскольку проявляет хрупкий тип разрушения при комнатной температуре, удобен для механической обработки и введения острой трещины, обладает оптической прозрачностью, позволяющей наблюдать траекторию разрушения. Для испытаний выбраны три образца различной формы: компактный образец (СТ) и два типа двухконсольной балки (DCB1, DCB2). Размеры и форма образцов заимствованы из [18–20]. Основное преимущество выбора данных образцов в том, что они характеризуются простой формой и условиями нагружения, а также обеспечивают широкий диапазон  $T$ -напряжений. На рис. 1 схематично показаны образцы, изготовленные из листа полиметилметакрилата толщиной 10 мм. Внешняя нагрузка прилагалась через штифты, вставленные в отверстия.

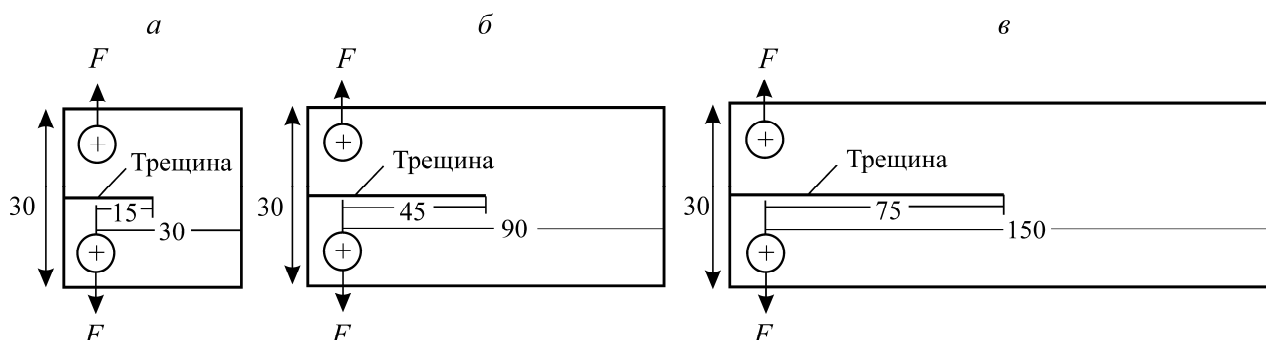


Рис. 1. Схема нагружения образцов СТ (а), DCB1 (б) и DCB2 (в). Размеры указаны в миллиметрах

Сначала проводились испытания на одноосное растяжение, в которых определялся модуль упругости  $E = 3$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.35$  и предел прочности материала на растяжение  $\sigma_t = 54$  МПа. В отдельном тесте на трехточечный изгиб определена вязкость разрушения оргстекла  $K_{Ic} = 1.24$  МПа·м<sup>1/2</sup>.

Испытания на разрушение осуществлялись при статической нагрузке при комнатной температуре со скоростью перемещения 0.1 мм/мин. Данные о “нагрузке–смещении” регистрировались во время каждого теста. Для каждого типа образцов проведено по пять экспериментов. Все образцы разрушались внезапно, начиная от вершины трещины, и с линейными кривыми “нагрузки–смещения”, подтверждающими хрупкий характер разрушения испытанных образцов полиметилметакрилата. Процедура испытаний позволила зафиксировать критическую нагрузку, соответствующую началу разрушения, которая позже использовалась в расчетах методом конечных элементов. Углы инициирования разрушения измерялись с использованием сним-

ков высокого разрешения, сделанных цифровой камерой Canon PowerShot SX70 HS. На рис. 2 представлены фотографии образцов после разрушения. Наблюдается плавное изменение угла поворота трещины от  $0^\circ$  до максимального без излома траектории. Средний максимальный по пяти испытаниям угол поворота трещины для образца DCB1 равен  $\sim 75^\circ$ , для DCB2 —  $\sim 90^\circ$ , в компактном образце трещина распространялась прямолинейно.

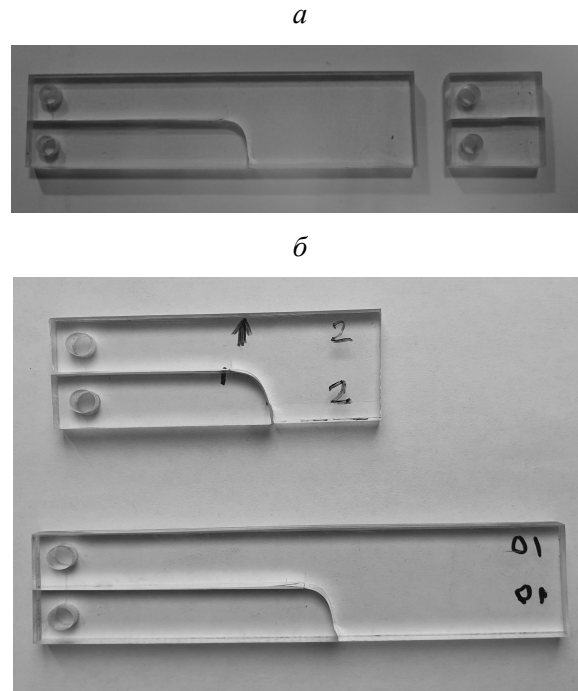


Рис. 2. Фотографии разрушенных образцов: *a* — справа компактный образец СТ, слева образец DCB2; *б* — сверху DCB1, внизу DCB2

### КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ

Поле упругих напряжений вокруг вершины трещины представим разложением в ряд в виде следующих формул [21]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - 3K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $(r, \theta)$  — полярная система координат с началом в вершине трещины;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = r, \theta$ ) — компоненты тензора напряжений;  $K_I, K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряжений моды I и II;  $T$  — несингулярные члены разложения в ряд ( $T$ -напряжения). Несингулярные члены более высокого порядка  $O(r^{1/2})$  часто пренебрежимо малы в непосредственной близости от вершины трещины. Соответствующие компоненты смещения в радиальном и окружном направлениях:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{1}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \left[ (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + K_{II} \left[ (1 - 2\kappa) \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + O(r), \\
 u_\theta &= \frac{1}{8G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \left[ \sin \frac{3\theta}{2} - (2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} \right] + K_{II} \left[ 3 \cos \frac{3\theta}{2} - (2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} \right] \right\} + O(r),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $G = E / [2(1 + \nu)]$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\kappa$  — параметр вида напряженного состояния (для плоской деформации  $\kappa = 3 - 4\nu$ , для плоского напряженного состояния  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ ).

Потенциальная энергия упругой деформации бесконечно малого элемента  $dA = r dr d\theta$  плоского поля напряжений [22]:

$$dW = \frac{1}{2} \left[ \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \left( \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \tau_{r\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] dA.
 \tag{3}$$

Заметим, что функция плотности энергии деформации, определенная как  $dW / dA$ , обратно пропорциональна расстоянию  $r$ , измеренному от вершины трещины. Следовательно, она становится неограниченной при  $r \rightarrow 0$ . Величина этого энергетического поля называется коэффициентом плотности энергии деформации:

$$S = r \frac{dW}{dA}.
 \tag{4}$$

Подставляя (1)–(3) в (4), получим выражение в виде полного квадратичного полинома относительно коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ :

$$S = \frac{1}{16\pi G} [a_1 K_I^2 + a_2 K_{II}^2 + 2a_3 K_I K_{II} + 2a_4 (B\alpha K_e) K_I + 2a_5 (B\alpha K_e) K_{II} + a_6 (B\alpha K_e)^2],
 \tag{5}$$

в котором

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (\kappa - \cos \theta)(1 + \cos \theta), \\
 a_2 &= \kappa(1 - \cos \theta) + \cos \theta(1 + 3 \cos \theta), \\
 a_3 &= \sin \theta(2 \cos \theta - \kappa + 1), \\
 a_4 &= \cos \frac{\theta}{2} (\cos 2\theta - \cos \theta + \kappa - 1), \\
 a_5 &= -\sin \frac{\theta}{2} (\cos 2\theta + \cos \theta + \kappa + 1), \\
 a_6 &= \frac{\kappa + 1}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Безразмерные параметры  $B$  и  $\alpha$  в (5) определяются как

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_e}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2r_c}{a}},
 \tag{7}$$

здесь  $a$  — длина трещины;  $K_e = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$  — эффективный коэффициент интенсивности напряжений;  $r_c$  — критическое расстояние или радиус зоны предразрушения вдоль линии трещины [23]:

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2.
 \tag{8}$$

Отметим, что в некоторых моделях масштаб физической длины связан с микроструктурой материалов (например, размером зерен или расстоянием между включениями). Однако эти микромеханические модели не рассматриваются в настоящей работе и масштаб длины, определяемый формулой (8), основывается на модели механики сплошной среды.

Критерий плотности энергии деформации утверждает, что направление инициации разрушения  $\theta_0$  совпадает с направлением минимума коэффициента плотности энергии деформации  $S$  вдоль постоянного радиуса  $r_c$  в окрестности вершины трещины [22]:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (9), получим уравнение относительно угла инициации разрушения  $\theta_0$ :

$$b_1 K_I^2 + b_2 K_{II}^2 + 2b_3 K_I K_{II} + b_4 (B\alpha K_e) K_I + b_5 (B\alpha K_e) K_{II} = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \sin \theta_0 (2 \cos \theta_0 - \kappa + 1), \\ b_2 &= -\sin \theta_0 (6 \cos \theta_0 - \kappa + 1), \\ b_3 &= 2 \cos 2\theta_0 - (\kappa - 1) \cos \theta_0, \\ b_4 &= -\sin \frac{\theta_0}{2} [5(\cos 2\theta_0 + \cos \theta_0) + \kappa + 1], \\ b_5 &= -\cos \frac{\theta_0}{2} [5(\cos 2\theta_0 - \cos \theta_0) + \kappa + 3]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (10) и выражений (11) видно, что угол инициации разрушения  $\theta_0$  зависит не только от сингулярных слагаемых поля напряжений, определяемых коэффициентами интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ , но и от  $T$ -напряжений и свойств материала (упругих  $\nu$  и прочностных  $r_c$ ).

Для чистой моды I ( $K_{II} = 0$ ) из (5) и (10) имеем:

$$S = \frac{K_I^2}{16\pi G} [a_1 + 2a_4 (B\alpha) + a_6 (B\alpha)^2], \quad (12)$$

$$b_1 K_I^2 + b_4 (B\alpha K_I) K_I = 0 \Rightarrow b_1 + b_4 (B\alpha) = 0. \quad (13)$$

Решая уравнение (13), получим зависимость угла инициации разрушения  $\theta_0$  от  $B\alpha$  для  $\nu = 0.35$  при плоской деформации (рис. 3). Параметр биаксиальности  $B\alpha$  характеризует эффект стеснения деформаций в окрестности вершины трещины. Когда  $B\alpha$  становится достаточно большим ( $> 0.22$  для  $\nu = 0.35$ ), минимум плотности энергии деформации не достигается в начальной плоскости трещины. Критическое значение  $B\alpha$ , выше которого ожидается искривление трещины, зависит от коэффициента Пуассона. Для более высоких  $T$ -напряжений или для больших размеров  $r_c$  зоны предразрушения трещина будет отклоняться от своего первоначального направления. Например, образцы для бразильской пробы и испытаний на полукруглый изгиб имеют отрицательные  $T$ -напряжения в условиях нагружения по моде I, тогда как компактные образцы и образцы двухконсольных балок имеют положительные  $T$ -напряжения.

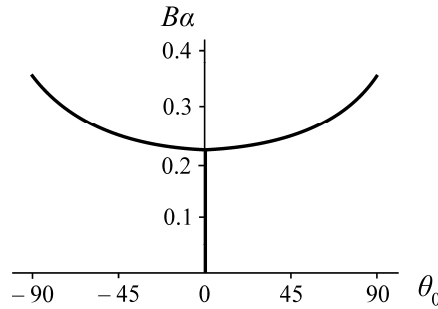


Рис. 3. Зависимость угла инициации разрушения  $\theta_0$  от параметра  $B\alpha$  для  $\nu = 0.35$

Если полученный из (13) угол инициации разрушения подставить в (12), то начало продвижения трещины находится из выражения

$$S_c = \frac{K_{Ic}^2}{16\pi G} [a_1 + 2a_4(B\alpha) + a_6(B\alpha)^2], \tag{14}$$

где  $S_c$  — критический коэффициент плотности энергии деформации на критическом расстоянии  $r_c$ ;  $K_{Ic}$  — критический коэффициент интенсивности напряжения, соответствующий разрушающей нагрузке.

Полагая  $\theta_0 = 0$  и  $T = 0$  для чистой моды I в (14), коэффициент  $S_c$  определяется как

$$S_c = \frac{(\kappa - 1)K_{Ic}^2}{8\pi G}. \tag{15}$$

Здесь  $K_{Ic}$  — вязкость разрушения по моде I, получаемая экспериментально при использовании образца с трещиной, в котором  $T$ -напряжения пренебрежимо малы или близки к нулю. Параметры  $S_c$  и  $K_{Ic}$  — постоянные материала.

Используя (14) и (15), прочность материала на растяжение по моде I для разной геометрии и условий нагружения  $K_{Ic}$  выражается через  $K_{Ic}$ :

$$\frac{K_{Ic}^2}{K_{Ic}^2} = \frac{2(\kappa - 1)}{a_1 + 2a_4(B\alpha) + a_6(B\alpha)^2}.$$

Следовательно, с учетом постоянного значения  $K_{Ic}$  величина  $K_{Ic}$  зависит от биаксиальности  $B\alpha$ , которая является функцией  $T$ -напряжений и критического расстояния  $r_c$ . Прочность на разрыв  $K_{Ic}$  также зависит от геометрии образцов.

Рассмотрим критерий максимальных растягивающих напряжений, согласно которому трещина распространяется в том направлении, где окружное напряжение  $\sigma_\theta$  достигает критического значения  $\sigma_c$  на критическом расстоянии  $r_c$  от вершины трещины. Направление распространения трещины  $\theta_0$ , при котором  $\sigma_\theta$  максимально, определяется из условий

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \tag{16}$$

применяя которые к окружному напряжению  $\sigma_\theta$  (1), получим уравнение для вычисления угла инициации разрушения  $\theta_0$ :

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) - \frac{16}{3} B\alpha K_e \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} = 0. \quad (17)$$

Для чистой моды I ( $K_{II} = 0$ ) из (17) имеем  $\cos \theta / 2 = (8/3) B\alpha \cos \theta$ , откуда минимальный параметр  $B\alpha = 0.375$ , при котором начинается бифуркация решения. Зависимость  $B\alpha$  от угла инициации разрушения  $\theta_0$  аналогична представленной на рис. 3. Критерий максимальных растягивающих напряжений дает более высокие значения  $B\alpha$ , при которых начинается искривление траектории трещины, чем критерий плотности энергии деформации. Для образцов с  $0.22 < B\alpha < 0.375$  он не предсказывает перегиб трещины, в то время как критерий плотности энергии деформации показывает отклонение трещины в этом диапазоне изменения  $B\alpha$ .

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Условие (9) означает, что трещина имеет тенденцию роста в плоскости, вдоль которой  $S$  достигает локального минимума. В случае трещины, наклоненной под углом к оси растяжения, плотность энергии деформации, связанная с изменением объема вдоль этого направления, оказывается больше плотности изменения формы. В (14) критическое значение  $S_c$  постулируется как постоянная материала и его можно использовать как меру вязкости разрушения материала в условиях смешанной моды. Фактически в случае распространения трещины по моде I  $S_c$  напрямую связан с  $K_{Ic}$  соотношением (15). Отметим, что, хотя  $S_c$  математически связан с  $K_{Ic}$ ,  $K$ - и  $S$ -концепции в основном различны.  $S$ -критерий предполагает, что разрушение происходит, когда плотность энергии деформации в элементе объема вблизи вершины трещины достигает критического значения.

При компьютерном моделировании распространения трещин методом конечных элементов (МКЭ) более удобна энергетическая концепция Гриффитса. Классический критерий разрушения Гриффитса основан на энергетическом балансе энергии деформации тела и энергии, высвобождаемой при продвижении трещины на сегмент  $da$ , поскольку  $K_I$  связан с интенсивностью освобождения упругой энергии  $G_I$  соотношением [24]:

$$G_I = -\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{(\kappa + 1)}{8G} K_I^2. \quad (18)$$

Этот энергетический подход положен в основу компьютерной модели распространения трещины.

Расчет напряженно-деформированного состояния пластин с трещинами выполнялся методом конечных элементов в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2018 [25]. Интенсивность освобождения упругой энергии  $G_I$  вычислялась с помощью метода виртуального закрытия трещины VCCT, опирающегося на следующие гипотезы [26]:

- 1) энергия, требуемая для разделения поверхностей, равна энергии, необходимой для смыкания этих же поверхностей;
- 2) напряженное состояние вокруг вершины трещины существенно не изменится, когда трещина подрастет на малую величину.

Энергетический критерий Гриффитса

$$G_I = G_{Ic}, \quad (19)$$

где  $G_{Ic} = 0.45$  Н/мм — экспериментально найденная вязкость разрушения.



Интенсивность освобождения упругой энергии  $G_1$  (18) не является производной по времени, а характеризует скорость изменения потенциальной энергии тела с изменением длины трещины. Соотношение (19) представляет собой критерий разрушения: трещина растет, когда  $G_1$  достигает критического значения  $G_{1c}$ .

Рассмотрим простейшую конечно-элементную модель, содержащую трещину нормального отрыва (рис. 4а). В методе VCST интенсивность освобождения упругой энергии  $G_1 = Fu / 2h$  ( $F$  — силы, удерживающие берега трещины вместе,  $u$  — раскрытие трещины в ближайших к ее вершине узлах). Для элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений необходимо учитывать промежуточные узлы  $G_1 = (F_1u_1 + F_2u_2) / 2h$  (рис. 4б).

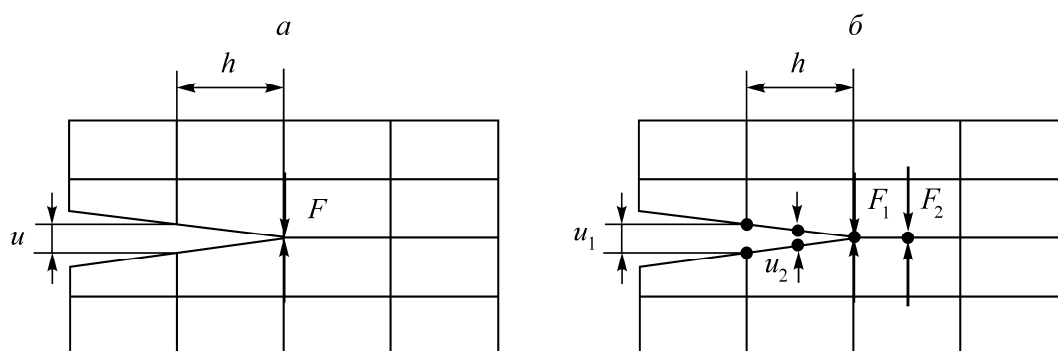


Рис. 4. Метод виртуального закрытия трещины: а — линейные элементы; б — квадратичные

Для численного получения траектории роста трещины в программном обеспечении МКЭ использовалась итерационная модель подрастания трещин. На каждом шаге итерационного процесса длина трещины увеличивалась на постоянную, заранее заданную добавочную длину 0.1 мм. Напряжения, полученные в расчете, рассматривались как исходные данные метода VCST для теоретического прогноза траектории роста трещины. Угол излома траектории трещины  $\theta_0$  определялся по критерию максимальных окружных напряжений (16). Геометрия трещины переопределялась путем расширения возрастающего сегмента трещины. Предыдущие вычислительные шаги повторялись до тех пор, пока длина трещины не достигала границ образца. На рис. 5 показана типичная сетка конечных элементов, используемая для моделирования роста трещины.

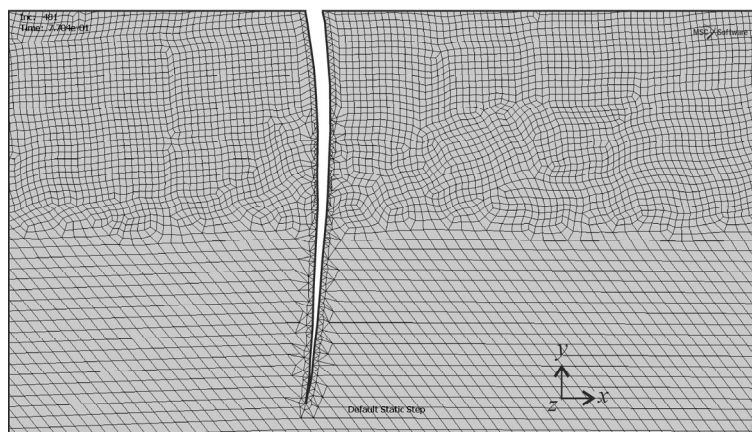


Рис. 5. Типичная сетка конечных элементов, используемая для моделирования роста трещин

Упругие свойства полиметилметакрилата учитывались в конечно-элементном анализе. Поскольку толщина образцов 10 мм была много больше радиуса зоны предразрушения  $r_c = 0.084$  мм (8), предполагалось, что все образцы находились в условиях плоской деформации. Для построения сетки конечных элементов использовались 8-узловые четырехугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений. Исследована сеточная сходимость на последовательности сгущающихся сеток с целью обеспечения достаточного количества элементов в моделировании МКЭ. Все испытания на разрушение проводились в условиях чистой моды I, поэтому первый этап роста трещины моделировался с помощью соотношений моды I. Для образцов с большими  $T$ -напряжениями траектория роста трещины отклонялась от прямолинейной. В этих случаях распространение трещины моделировалось с использованием соотношений смешанных мод.

В вычислительном аспекте важен способ нахождения  $T$ -напряжений через компоненты напряжений или перемещений, определенных в узлах конечно-элементной сетки.  $T$ -напряжения можно определять из формул (1) через компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_r$ ,  $\sigma_y = \sigma_\theta$  на продолжении трещины при  $\theta = 0$ :  $T = (\sigma_x - \sigma_y)|_{\theta=0}$  либо по значениям  $\sigma_x = \sigma_r$  на берегах трещины при  $\theta = \pm\pi$ :  $T = 1/2(\sigma_x|_{\theta=-\pi} + \sigma_x|_{\theta=+\pi})$ . Такой способ не надежен, поскольку напряжения вычисляются внутри элемента в точках интегрирования Гаусса–Лежандра, а затем экстраполируются на узлы конечно-элементной сетки. В данной работе применяется более точный способ определения  $T$ -напряжений по формулам (2) через компоненты смещений  $u_x = u_r$  при

$$\theta = \pm\pi: T = \frac{8G}{\kappa + 1} \frac{u_x(0) - u_x(x)}{r},$$

где  $u_x(x)$  — перемещение узлов берега трещины, расположенных на расстоянии  $r$  от вершины;  $u_x(0)$  — перемещение вершины трещины.

Коэффициент  $K_I$  рассчитывался с использованием инвариантного  $J$ -интеграла Райса–Черепанова. Полученные значения  $K_I$  и найденные по аналитическим формулам из справочника [27] различаются не более чем на 1%. В таблице показано сравнение полученных результатов с известными [18–20]. Выявлено, что более точные вычисления  $T$ -напряжений дают более высокие значения параметра биаксиальности  $B\alpha$ , чем приведенные в [18–20].

Сравнение полученных результатов с известными [18–20]

Образец	Расчет		Источник [18–20]	
	$B$	$B\alpha$	$B$	$B\alpha$
СТ	1.006	0.106	0.51	0.06
DCB1	3.721	0.227	3.24	0.22
DCB2	5.599	0.265	4.80	0.25

На рис. 6 представлены траектории трещин по результатам компьютерного моделирования для образцов DCB1 и DCB2. Расчет проводился в геометрически нелинейной постановке с учетом больших поворотов и перемещений. Видно, что трещина отклоняется от прямолинейного пути очень медленно, постепенно, траектория трещины изгибается гладко, без изломов, в отличие от результатов работ [18–20], где излом наблюдается сразу же, как только трещина

стартует. Отклонение трещины от прямолинейного пути вверх либо вниз случайно вследствие мельчайшей несимметрии сетки конечных элементов относительно средней линии модели. Сравнение рис. 2 и 6 показывает хорошее совпадение компьютерных расчетов с экспериментальными данными.

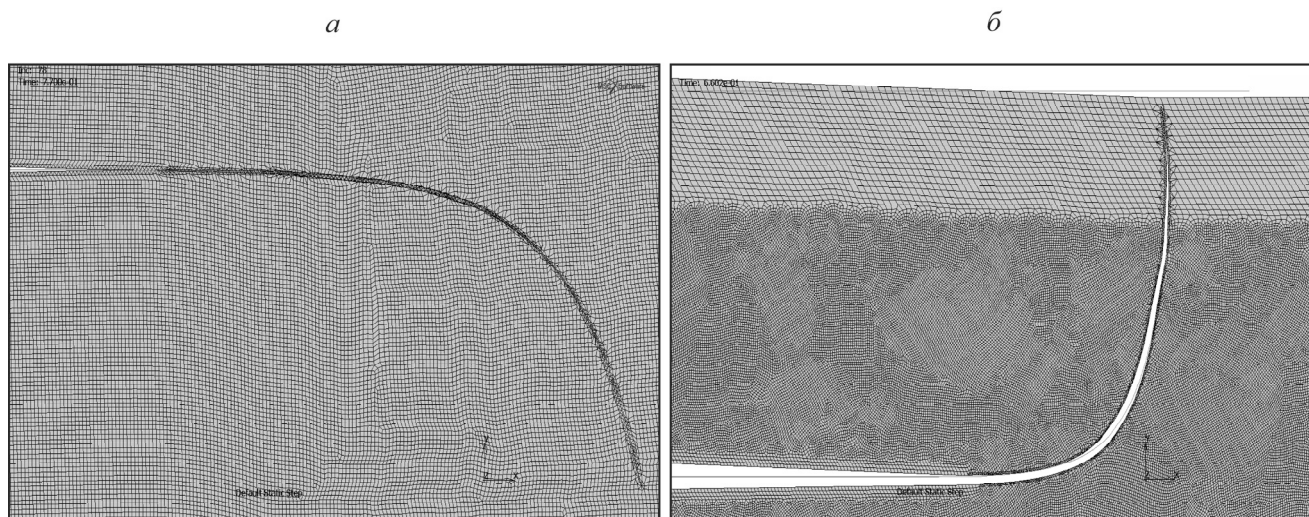


Рис. 6. Траектории трещин, полученные в результате компьютерного моделирования:  
*a* — DCB1, *б* — DCB2

Критерии плотности энергии деформации и максимальных растягивающих напряжений не единственные в геомеханике. Представляет практический интерес критерий предельного состояния и разрушения, построенный на основе новых инвариантов тензора напряжений и учитывающий помимо максимального и минимального еще и промежуточное главное напряжение [28, 29]. Исследования процессов разрушения образцов горных пород при сжатии привели к выводу о необходимости учета градиентов напряжений, вследствие чего появились градиентные критерии разрушения, в которых достижение предельного состояния в данной точке тела определяется не только действующими напряжениями, но и градиентами [30, 31]. Таким образом, градиентные критерии учитывают неоднородность поля напряжений в окрестности этой точки.

## ВЫВОДЫ

Рост трещин в образцах из полиметилметакрилата трех разных геометрий оценивался с использованием критерия плотности энергии деформации и максимальных растягивающих напряжений. Теоретические результаты сравнивались с экспериментальными и результатами компьютерного моделирования. Обнаружено, что в некоторых образцах распространение трещины не стабильно и отклоняется от своей первоначальной линии в ту или иную сторону. Оба критерия включают в себя сингулярные и первые несингулярные ( $T$ -напряжения) члены поля напряжений при вершине трещины. Критерий плотности энергии деформации обеспечивает лучший прогноз для экспериментально полученной траектории продвижения трещины. Выявлено, что отклонение пути трещины прямо зависит от амплитуды  $T$ -напряжений и траектории трещины при нагрузке по моде I и хорошо предсказано с использованием критерия плотности энергии деформации. Поскольку уровни  $T$ -напряжений в образцах были ниже, чем критические значения, определенные по критерию максимальных растягивающих напряжений, данный критерий не смог предсказать отклонение трещины в исследуемых геометриях.

Проведено компьютерное моделирование распространения трещины в геометрически и физически нелинейной постановке на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела с помощью критерия интенсивности освобождения упругой энергии. Компьютерный расчет более точен по сравнению с аналитическим решением, являющимся асимптотикой напряженно-деформированного состояния в некоторой окрестности вершины трещины. Полученные результаты хорошо согласуются с данными экспериментов. Установлено, что отклонение траектории трещины от первоначально прямого пути может быть предотвращено путем изменения геометрии образца или способа нагружения. Компьютерное моделирование эффективно при решении технологических проблем гидроразрыва нефтяного пласта, связанных с прогнозированием траектории трещины. Эти результаты важны, так как соответствующие знания об устойчивости траектории трещин могут играть ключевую роль в оценке степени поврежденности породного массива, содержащего трещиноподобные дефекты.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Erdogan F. and Sih G. C.** On the crack extensions in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Eng.*, 1963, Vol. 85. — P. 519–527.
2. **Cotterell B.** Notes on the paths and stability of cracks, *Int. J. Fract. Mech.*, 1966, Vol. 2, No. 3. — P. 526–533.
3. **Gołdstein R. V. and Salganik R. L.** Brittle fracture of solids with arbitrary cracks, *Int. J. Fract.*, 1974, Vol. 10, No. 4. — P. 507–523.
4. **Cotterell B. and Rice J. R.** Slightly curved or kinked cracks, *Int. J. Fract.*, 1980, Vol. 16. — P. 155–169.
5. **Мирсалимов В. Н.** Максимальная прочность выработки в горном массиве, ослабленном трещиной // ФТПРПИ. — 2019. — № 1. — С. 12–21.
6. **Алексеев О. П., Есипов Д. В., Куранаков Д. С., Лапин В. Н., Черный С. Г.** Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестн. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11. — Вып. 3. — С. 36–59.
7. **Азаров А. В., Курленя М. В., Сердюков С. В., Патутин А. В.** Особенности развития трещин гидроразрыва вблизи свободной поверхности в изотропной пороупругой среде // ФТПРПИ. — 2019. — № 1. — С. 3–11.
8. **Chao Y. J., Liu S., and Broviak B. J.** Brittle fracture: variation of fracture toughness with constraint and crack curving under mode I conditions, *Exp. Mech.*, 2001, Vol. 41. — P. 232–241.
9. **Berto F. and Lazzarin P.** Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches, *Mat. Sci. Eng. R.*, 2014, Vol. 75. — P. 1–48.
10. **Melin S.** The influence of the  $T$ -stress on the directional stability of cracks, *Int. J. Fract.*, 2002, Vol. 114, No. 3. — P. 259–265.
11. **Gupta M., Alderliesten R. C., and Benedictus R.** A review of  $T$ -stress and its effects in fracture mechanics, *Eng. Fract. Mech.*, 2015, Vol. 134. — P. 218–241.
12. **Матвиенко Ю. Г.** Два подхода к учету несингулярных  $T$ -напряжений в критериях механики разрушения тел с вырезами // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2011. — № 5. — С. 104–110.
13. **Матвиенко Ю. Г.** Несингулярные  $T$ -напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения // Завод. лаб. Диагностика материалов. — 2012. — Т. 78. — № 2. — С. 51–58.

14. **Матвиенко Ю. Г., Починков Р. А.** Влияние несингулярных компонентов  $T$ -напряжений на зоны пластической деформации у вершины трещины нормального отрыва // Деформация и разрушение материалов. — 2012. — № 3. — С. 6–14.
15. **Mirsayar M. M. and Park P.** The role of  $T$ -stress on kinking angle of interface cracks, *Materials and Design*, 2015, Vol. 80. — P. 12–19.
16. **Leguillon D. and Murer S.** Crack deflection in a biaxial stress state, *Int. J. Fract.*, 2008, Vol. 150. — P. 75–90.
17. **Wang X., Lewis T., and Bell R.** Estimations of the  $T$ -stress for small cracks at notches, *Eng. Fract. Mech.*, 2006, Vol. 73, No. 3. — P. 366–375.
18. **Ayatollahi M. R., Razavi S. M. J., Rashidi Moghaddam M., and Berto F.** Mode I fracture analysis of polymethylmetacrylate using modified energy-based models, *Phys. Mesomech.*, 2015, Vol. 18, No. 5. — P. 53–62.
19. **Ayatollahi M. R., Rashidi Moghaddam M., Razavi S. M. J., and Berto F.** Geometry effects on fracture trajectory of PMMA samples under pure mode I loading, *Eng. Fract. Mech.*, 2016, Vol. 163. — P. 449–461.
20. **Ayatollahi M. R., Razavi S. M. J., and Berto F.** Crack path stability in brittle fracture under pure mode I loading, *Procedia Structural Integrity*, 2018, Vol. 13. — P. 735–740.
21. **Williams M. L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech.*, 1957, Vol. 24. — P. 109–114.
22. **Sih G. C.** Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems, *Int. J. Fract.*, 1974, Vol. 10, No. 3. — P. 305–321.
23. **Taylor D.** The theory of critical distances, *Eng. Fract. Mech.*, 2008, Vol. 75, No. 7. — P. 1696–1705.
24. **Zhu X.-K. and Joyce J. A.** Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization, *Eng. Fract. Mech.*, 2012, Vol. 85. — P. 1–46.
25. **MARC 2018.** Volume A: Theory and user information. Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2018. — 1008 p.
26. **Krueger R.** Virtual crack closure technique: history, approach and applications, *Appl. Mech. Rev.*, 2004, Vol. 57, No. 2. — P. 109–143.
27. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. В 4 т. Т. 2. Механика разрушения и прочность материалов. — Киев: Наук. думка, 1988. — 620 с.
28. **Ревуженко А. Ф.** О критериях разрушения горных пород, основанных на новой системе инвариантов тензора напряжений // ФТПРПИ. — 2014. — № 3. — С. 33–39.
29. **Микенина О. А., Ревуженко А. Ф.** Критерии предельного состояния и разрушения идеально связанных и сыпучих тел // ФТПРПИ. — 2014. — № 4. — С. 55–60.
30. **Ефимов В. П.** Применение градиентного подхода к определению прочности горных пород на растяжение // ФТПРПИ. — 2002. — № 5. — С. 49–53.
31. **Ефимов В. П.** Испытание прочности горных пород на растяжение по результатам испытаний дисковых образцов с центральным отверстием // ФТПРПИ. — 2016. — № 5. — С. 54–60.

*Поступила в редакцию 01/VI 2021  
После доработки 10/VI 2021  
Принята к публикации 30/VI 2021*