УДК 517.958.532

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Е. В. Губкина, В. Н. Монахов*

Горно-Алтайский государственный университет, 659700 Горно-Алтайск
* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Вариационным методом решаются задачи фильтрации жидкости в неограниченных областях (приток жидкости к дрене, фильтрация жидкости через земляную плотину на проницаемом основании и др.).

В теории стационарных течений несжимаемой жидкости и газа важную роль сыграли вариационные принципы М. А. Лаврентьева (1936 г.) конформных и квазиконформных отображений. Другой подход к этим задачам, также имеющий вариационный характер, был предложен в работах А. Вайнштейна (1924 г.) и совместной работе Ж. Лере и А. Вайнштейна (1934 г.). В отличие от данных работ вариационный метод М. А. Лаврентьева позволил ему установить не только теоремы существования плоских струйных течений жидкости, но и теоремы единственности решений при тех же предположениях о форме обтекаемых препятствий. Метод оказался применим и к осесимметрическим струям (Дж. Серрин, 1954 г.).

В 1959 г. в работах автора данной статьи методы М. А. Лаврентьева, А. Вайнштейна, Ж. Лере получили дальнейшее развитие, и на их основе доказана разрешимость широкого класса плоских стационарных задач гидродинамики со свободными границами. Применительно к теории фильтрации автором данной работы предложен вариационный метод доказательства разрешимости функциональных уравнений относительно искомых параметров конформных отображений конечных областей, заданная часть границы которых имеет полигональную форму. В настоящей работе этот метод распространяется на задачи фильтрации жидкости в неограниченных областях.

1. Постановка задачи. Изучаются плоские стационарные потоки несжимаемой жидкости в пористой среде (пласте) со свободными (неизвестными) границами, которым соответствуют различные гидродинамические схемы фильтрации жидкости в пласте: приток жидкости к дрене или скважине из пористого слоя; фильтрация жидкости из открытого бассейна через пористый слой (например, земляную плотину или пористую вставку химического реактора); фильтрация жидкости под гидротехническим сооружением, подземная часть которого отыскивается по заданным эпюрам напоров или скоростей.

Случай бесконечной глубины насыщенного пористого слоя (область фильтрации типа полуплоскости) рассматривается аналогично случаю конечной области фильтрации [1]. Поэтому остановимся на следующих двух типах гидродинамических схем фильтрации: течение жидкости в пористом слое типа полуполосы с одной бесконечной вершиной и в слое типа полосы с двумя бесконечными вершинами [1–3].

Направим ось Ox вертикально вверх противоположно вектору ускорения свободного падения и перпендикулярно основному направлению фильтрационного потока и рассмо-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00622) в рамках программы "Университеты России" (№ 1788).

трим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область фильтрации D, ограниченную свободной границей L (линией тока), примыкающими к ней пористыми стенками пласта (эквипотенциалями) P^1 (при $y > 0$) и P^2 (при $y < 0$) и непроницаемой подошвой пласта P^0 (линией тока).

Заданные участки $P^k \subset \partial D$ $(k = 1, 2)$ границы ∂D являются полигонами с вершинами и концами в точках z_j^k $(j = \overline{1, n_k})$ и углами $\alpha_j^k \pi$ в них, подошва пласта P^0 для простоты предполагается прямолинейной.

Обозначим через $z_1 \in P^1 \cap L$ точку пересечения P^1 и L, $z_2 = P^1 \cap P^0 = \infty$, $z_3 = P^0 \cap P^2$ (возможно, $z_3 = \infty$), $z_4 = P^2 \cap L$. В окрестности точки z_2 (и точки z_3, если $z_3 = \infty$) полигон $(P^1 \cup P^0)$ (соответственно $P^0 \cup P^2$) представляет собой полуполосу шириной H_2 (H_3):

$$H_2 = \operatorname{Re}(z^1 - z^0) > 0 \quad \text{при} \quad z^k \in P^k, \quad \text{если} \quad \operatorname{Im} z^k \gg 1, \quad k = 0,\, 1$$

(соответственно $H_3 = \operatorname{Re}(z^2 - z^0) > 0$, $z^k \in P^k$, $k = 0,\, 2$). Аналогично случаю фильтрации жидкости в земляной плотине [1, с. 268] задается величина H $(H = \operatorname{Re}(z_1 - z_4) = |\operatorname{Re} z_4| > 0)$ действующего (нормированного) напора жидкости в пористом слое.

В области D ищется аналитическая функция $w(z) = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал фильтрации, — удовлетворяющая следующим граничным условиям на ∂D: $\varphi = \text{const}$ при $z \in P^1, P^2$; $\psi = \text{const}$ при $z \in P^0$; $\varphi + x = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ при $z \in L$. При этом в плоскости w области D отвечает прямоугольник $D^* = w(D)$ с вершинами в точках w_k $(k = \overline{1, 4})$ — прообразах z_k, $|w_1 - w_4| = |w_2 - w_3| = H$ — заданный напор, $|w_1 - w_2| = |w_3 - w_4| = Q$ — искомый расход. Отметим, что в рассматриваемом случае промежуток высачивания (дренаж) [1–3] является горизонтальным. Производные конформных отображений верхней полуплоскости $E = \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на области D и D^* имеют вид [1]

$$\frac{dw}{d\zeta} = \prod_1^4 (\tau_k - \zeta)^{-1/2} = \Pi_0(\zeta), \qquad \frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta) M(\zeta),$$
$$\Pi = \prod_{k,j} (\zeta - t_j^k)^{\beta_j^k} (\zeta - \tau_2)^{-1} (\zeta - \tau_3)^{-\delta}, \qquad M = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{|\Pi_0(t)|}{|\Pi(t)|(t - \zeta)}\, dt. \tag{1}$$

Здесь t_j^k — прообразы вершин z_j^k $(k = 1,\, 2,\, j = \overline{1, n_k}\,)$ полигона $(P^1 \cup P^2)$; τ_k— прообразы точек z_k $(k = \overline{1, 4}\,)$; $\beta_j^k \pi = (\alpha_j^k - 1)\pi$ — внешние углы полигона $(P^1 \cup P^2)$; $\delta = 0$ при $|z_3| < \infty$ и $\delta = 1$ при $z_3 = \infty$. Произведем нормировку конформного отображения $z(\zeta)$, $z : E \to D$, полагая $\tau_4 = t_{n_2}^2 = -1$, $\tau_1 = t_1^1 = 1$, $t_{n_2 - 1}^2 = -2$; $z_1 = z(\tau_1) = H + H_2$; $\tau_1 \leqslant t_j^1 < t_{j+1}^1 < \tau_2$ $(j = \overline{1, n_1 - 1}\,)$; $\tau_3 \leqslant t_j^2 < t_{j+1}^2 \leqslant \tau_4$ $(j = \overline{1, n_2 - 1}\,)$.

Неизвестные постоянные τ_2, τ_3 и t_j^k $(k = 1, j = \overline{2, n_1}; k = 2, j = \overline{2, n_2 - 2}\,)$ отыскиваются из следующей системы уравнений, определяющей геометрию полигона $P = \bigcup\limits_{k=0}^{2} P^k$:

$$l_j^k = \int_{t_j^k}^{t_{j+1}^k} \left|\frac{dz}{dt}\right| dt \qquad (k = 1, \quad j = \overline{1, n_1 - 1}; \quad k = 2, \quad j = \overline{1 + \gamma, n_2 - 2}\,),$$
$$H_i = \pi M(\tau_i) \Pi_i(\tau_i), \qquad i = 2, 2 + \gamma \qquad (n_1 \geqslant 1, \quad n_2 \geqslant 3), \tag{2}$$

где $\Pi_i = \Pi(\zeta)(\zeta - \tau_i)$, $i = 2,\, 3$; $\gamma = 0$ при $|z_3| < \infty$ и $\gamma = 1$ при $z_3 = \infty$.

Отметим, что согласно условиям (2) у полигона P^2 фиксируются не все длины его звеньев. Это связано с наличием в окрестности точки $z_4 = P^2 \cap L$ горизонтального промежутка высачивания (дренажа), длина которого является искомой.

2. Априорные оценки. Обозначим через $\alpha = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1; \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n_2}^2) \in R^n (n = n_1 + n_2)$ *характеристику внутренних углов* $\alpha_j^k\pi$ полигона $P = \bigcup\limits_0^2 P^k$, через $l = (l_1^1, \dots, l_{n_1}^1; l_1^2, \dots, l_{n_2-2}^2)$ $(l_{n_1}^1 \equiv H_2, l_1^2 \equiv H_3$ при $z = \infty)$ — *метрическую характеристику* P и назовем $p = (\alpha, l)$ *геометрической характеристикой* P.

Будем рассматривать семейство $G(\delta)$ простых полигонов $P \subset G$ с характеристиками $p \in G(\delta)$:

$$G(\delta) = \begin{cases} 0 < \delta \leqslant \alpha_j^k \leqslant 2, \quad (j,k) \in I; \quad 0 \leqslant (\alpha_1^1, \alpha_{n_2}^2) \leqslant 3/2 - \delta, \\ \sum\limits_{j=1}^{n_k} (\alpha_j^k - 1) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (\alpha_1^2 = 0 \quad \text{при} \quad z_3 = \infty), \\ |\ln l_j^k| \leqslant \delta^{-1}, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad k = 1; \quad j = \overline{1, n_2 - 2}, \quad k = 2, \end{cases} \tag{3}$$

где $I = (j = \overline{2, n_1}, k = 1; j = \overline{1, n_2 - 1}, k = 2)$. Условие $\sum\limits_{j=1}^{n_k} (\alpha_j^k - 1) = 0$ обеспечивает выполнение необходимой оценки $0 < |\zeta|^2 |z_\zeta| < \infty$ в окрестности $\zeta = \infty$.

Положим $\Delta t_j^k = |t_{j+1}^k - t_j^k|$ $(j = \overline{1, n_k - 1}, k = 1, n - 2)$ и рассмотрим $u = (t_1^1, \dots, t_{n_1}^1; t_1^2, \dots, t_{n_2-2}^2) \in R^{n-2}$ $(t_{n_1+1}^1 \equiv \tau_2, t_1^2 \equiv \tau_3)$.

Для решений $u \in R^{n-2}$ системы (2), отвечающей простому полигону $P \subset G(\delta)$, установим справедливость следующего включения (*априорных оценок*):

$$u \in \Omega = \{u \mid 0 < \varepsilon(\delta) \leqslant \Delta t_j^k \leqslant \varepsilon^{-1}, \quad j = \overline{1, n_k - 1}, \ k = 1, 2\}, \tag{4}$$

в котором постоянная $\varepsilon(\delta) > 0$ зависит только от геометрической характеристики p полигона P в (3).

Рассмотрим одно из следствий системы (2)

$$H = \int\limits_{-1}^{1} \Pi_0(t)\, dt, \qquad \Pi_0 = \prod_{k=1}^{4} |t - \tau_k|^{-1/2}.$$

Учитывая, что $|\tau_3| \leqslant |t_{n_2-1}^2| = 2$, находим $H \leqslant K_1(\tau_2 - 1)^{-1/2}$, откуда $\tau_2 - 1 \leqslant (H^{-1}K_1)^2 \equiv K_2$.

Пусть $r \equiv (\tau_2 - 1) \to 0$. Тогда

$$H \geqslant \int\limits_0^1 \Pi_0\, dt \geqslant K_3^{-1} \int\limits_0^1 (1 + r - t)^{-1}\, dt, \quad \text{т. е.} \quad r \geqslant (\mathrm{e}^{HK_3} - 1)^{-1} \equiv \varepsilon_2 > 0.$$

Возвращаясь к соотношению для H, получим $H \leqslant K_4 \varepsilon_2^{-1/2} (|\tau_3| - 1)^{-1/2}$, откуда $|\tau_3| \leqslant K_5$.

Установим теперь справедливость оценки $t_{n_1}^1 - 1 \geqslant \varepsilon > 0$. Предположим противное, что $r \equiv (t_{n_1}^1 - 1) \to 0$. Введем вспомогательную функцию

$$M_r(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1-r} \frac{|\Pi_0(t)\Pi^{-1}(t)|\, dt}{t - \zeta}, \quad M_r(\zeta) \to M(\zeta), \quad r \to 0, \quad |\zeta| < \infty.$$

Рассмотрим полуокружность $K_r = \{|\zeta - 1 - r/2| = r\} \cap \{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и покажем, что

$$|\Lambda_r| = \left|\int\limits_{K_r} \Pi(\zeta) M_r(\zeta)\, d\zeta\right| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

При этом, очевидно, $l_k^1(r) \to 0$, $k = \overline{1, n_1 - 1}$, что невозможно, и тем самым $t_{n_1} - 1 \geqslant \varepsilon > 0$.

Согласно геометрии полигона $P = \bigcup\limits_0^2 P^k$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{n_1} \beta_k^1 = 0$. Положим $\sum\limits_1^{n_1} = \Sigma' + \Sigma''$, отнеся в Σ' все $\beta_k^1 \leqslant 0$, а в Σ'' все $\beta_k^1 > 0$, и заметим, что $\Sigma''\beta_k^1 = -\Sigma'\beta_k^1 \equiv \mu > 0$. С учетом этого находим

$$|M_r(\zeta)| \leqslant C \int\limits_{-1}^{1-r} (1+t)^{1/2-\alpha_{n_2}^2} \varphi(t) \frac{(1-t)^{-1/2}}{|t-\zeta|}\, dt, \quad \varphi = \Big(1 + \frac{r}{1-t}\Big)^{\mu}.$$

Поскольку $\varphi(t) \leqslant 2^\mu$ при $t \in [-1, 1-r]$, то

$$|M_r(\zeta)|\, |\zeta - 1|^{1/2} \leqslant C_0, \qquad \zeta \in K_r, \qquad r \leqslant 1/2,$$

что приводит к оценке $|\Lambda_r| \leqslant C_1 r^{1/2}$. При этом, очевидно, $l_k^1(r) \to 0$, $k = \overline{1, n_1 - 1}$, что невозможно, т. е. $t_n^1 - 1 \geqslant \varepsilon > 0$. Аналогично доказывается, что $t_k^1 - 1 \geqslant \varepsilon > 0$ при $k = \overline{2, n_1 - 1}$.

Предположим, что $\tau_2 - t_p^1 \equiv r \to 0$, $p = \overline{2, n_1}$. Если $\beta^p \equiv \sum\limits_{k=p}^{n_1} \beta_k^1 \neq 0$, то в соотношении (2) $H_2 = \pi|\Pi_2(\tau_2) M(\tau_2)|$, $M(\tau_2) \neq 0, \infty$, а $\Pi_2(\tau_2) \to 0$ при $\beta^p > 0$ и $\Pi_2(\tau_2) \to \infty$ при $\beta^p < 0$, что противоречит условию (3), поэтому $|\ln H_2| \leqslant \delta^{-1} < \infty$. Пусть $\beta^p = \sum\limits_{k=p}^{n_1} \beta_k^1 = 0$. Положим $\sum\limits_{k=p}^{n_1} \beta_k^1 \equiv \Sigma' + \Sigma''$, отнеся в Σ' все $\beta_k^1 \geqslant 0$, а в Σ'' все $\beta_k^1 < 0$. Обозначим $\Sigma'\beta_k^1 = \mu > 0$, $\Sigma''\beta_k^1 = -\nu$, причем согласно предположению $\beta^p = 0$ имеем $\mu - \nu = 0$. Рассмотрим в (2) выражение для l_{p-1}, $p \geqslant 2$, учитывая, что t_{p-1}^1 не входит в число сближающихся параметров и поэтому $t_p^1 - t_{p-1}^1 \geqslant 2\varepsilon > 0$ (ε фиксировано). Положим $t_p^1 \equiv \tau$, $\tau_2 - \tau \equiv r \to 0$. Тогда

$$l_{p-1} \geqslant \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Big|\frac{dz}{dt}\Big| dt \geqslant K \int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau} (\tau - t)^\mu (\tau + r - t)^{-\nu}\, dt \equiv K I(r).$$

Сделаем в интеграле $I(r)$ замену $\tau - t = sr$:

$$I(r) = \int\limits_0^{\varepsilon/r} s^\mu (1+s)^{-\nu}\, ds \geqslant \int\limits_1^{\varepsilon/r} \Big(1 + \frac{1}{s}\Big)^{-\nu} ds \to \infty \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

что противоречит условию (3) $|\ln l_{p-1}| \leqslant \delta^{-1} < \infty$. Итак, установлено

$$1 + \varepsilon_1 \leqslant t_k^1 \leqslant \tau_2 - \varepsilon_2, \qquad k = \overline{2, n_1}, \qquad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0.$$

Полученные неравенства обеспечивают возможность применения оценок $u_k^1 = t_{k+1}^1 - t_k^1 \geqslant \varepsilon > 0$, $k = \overline{1, n_1}$ ($t_{n_1+1} \equiv \tau_2$), справедливых в случае конечного полигона $P = \bigcup\limits_0^2 P^k$ [1].

Аналогичные рассуждения применимы и при доказательстве оценок $\Delta t_k^2 = t_{k+1}^2 - t_k^2 \geqslant \varepsilon > 0$, $k = \overline{1, n_2 - 1}$ ($t_1^2 \equiv \tau_3$), соответствующих полигону P^2. Априорные оценки (4) доказаны.

Замечание 1. Основная трудность при получении оценок (4) состоит в том, что плотность $h(t) \equiv \prod\limits_1^4 |t - \tau_4|^{-1/2}$ интеграла $M(\zeta)$ в (1) зависит от искомых постоянных τ_2, τ_3 ($\tau_1 = 1$, $\tau_4 = -1$). В соответствующем представлении $M(\zeta)$ в [1, с. 111] $h(t)$ является функцией только заданных постоянных τ_1, τ_4.

Замечание 2. Как следует из доказательства априорных оценок (4), если $P^0 \in G(\delta)$ и не является прямолинейным, то справедливость (4), очевидно, сохраняется и в этом случае.

Замечание 3. Возможна другая нормировка конформных отображений, определенных в (1): $\tau_1 = 1$, $\tau_4 = -1$, $\tau_3 = -2$. Тогда из соотношения $H(\tau_2) = \int\limits_{-1}^{1} |\Pi_0(t)|\, dt$ $\Big(\dfrac{dH}{d\tau_2} < 0,\ H(1) = \infty,\ H(\infty) = 0\Big)$ однозначно определится τ_2, а с ним и расход жидкости $Q = \int\limits_1^{\tau_2} |\Pi_0(t)|\, dt$. При этом в системе (1) одно из уравнений необходимо отбросить, например, нельзя задавать величину H_2. Поэтому такая нормировка не физична.

3. Локальная единственность решений. Запишем систему (2) в операторной форме относительно $u = (t_1^1, \ldots, t_{n_1}^1; t_1^2, \ldots, t_{n_2-2}^2) \equiv (u_1, \ldots, u_{n-2}) \in R^{n-2}$ ($n = n_1 + n_2$):

$$l = g(u, \alpha) = (g_1, \ldots, g_{n-2}), \tag{5}$$

где $l = (l_1^1, \ldots, l_{n_1}^1; l_1^2, \ldots, l_{n_2-1}^2) \equiv (l_1, \ldots, l_{n-2})$ — метрическая характеристика P; α — характеристика внутренних углов P.

Докажем следующие свойства оператора $g(u, \alpha)$:

$$g(u, \alpha) \in C^2(\Omega \times G); \qquad \frac{Dg}{Du} = \{g_{ij}\} \neq 0, \qquad g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \quad u \in \Omega, \tag{6}$$

множества Ω и G определены в (3), (4).

Дифференцируемость компонент g_i, представимых в форме

$$g_i = l_j^k = \int\limits_{t_j^k}^{t_{j+1}^k} \Big|\frac{dz}{dt}\Big|\, dt,$$

следует из [1] после приведения промежутков интегрирования к [0, 1]. Для компонент $g_{n_1} = H_2$ и $g_{n_1+1} = H_3$, $H_k = \pi |\Pi_k(\tau_k) M(\tau_k)|$ ($k = 2, 3$) дифференцируемость на множестве $(u, p) \in (\Omega \times G)$ проверяется непосредственно.

Доказательство невырожденности преобразования $l = g(u, \alpha)$, $Dg/Du \neq 0$ проведем аналогично [1] вариационным методом. Выразим вариацию l при фиксированном α через вариацию искомого решения u в (5): $\delta l = (Dg/Du)\, \delta u$. В предположении, что $\delta u \neq 0$ при $\delta l = 0$, в полученном равенстве вычислим вариации отображений $z : E \to D$ и $\zeta : D \to E$ друг через друга: $\delta z + z_\zeta \delta\zeta = 0$. Составляя из этого соотношения краевую задачу для δz, получим $\delta z = \Pi(\zeta)Q_{m_0}(\zeta)$, $Q_{m_0}(\zeta)$ — многочлен степени $m_0 \geqslant 0$. Вычислим теперь δz непосредственно из представления $z = z(\zeta)$:

$$z = \int\limits_1^\zeta \Pi(\zeta)M(\zeta)\,d\zeta + z_1, \qquad \delta z = \int\limits_1^\zeta \Pi(\zeta)\Phi(\zeta,\delta u)\,d\zeta \qquad (\delta z_1 = 0),$$

$$\Phi = \sum_{j,k}\Big[(1-\alpha_j^k)(\zeta - t_j^k)^{-1}M(\zeta) + \frac{\partial M}{\partial t_j^k}\Big]\delta t_j^k.$$

Отметим, что $|\delta z(\infty)| < \infty$. Сравнивая δz и $(\delta z)_\zeta$ в окрестности t_j^k из полученного представления с найденными δz, $(\delta z)_\zeta$ из решения краевой задачи, окончательно вычислим

$$\delta z = \prod_{j,k}(\zeta - t_j^k)^{\alpha_j^k - \gamma_j^k}Q_m(\zeta)(\zeta-\tau_2)^{-1}(\zeta-\tau_3)^{-\delta}. \tag{7}$$

Здесь $\gamma_j^k = 0$, если $\delta t_j^k = 0$, и $\gamma_j^k = 1$ при $\delta t_j^k \neq 0$; $\delta = 0$ при $|z_3| < \infty$ и $\delta = 1$ при $z_3 = \infty$; $Q_m(\zeta)$ — многочлен степени m. При этом $\lambda \equiv \sum\limits_{j,k}\alpha_j^k = n_1 + n_2 = n$, если $|z_3| < \infty$, и $\lambda = 1$ при $z_3 = \infty$. Поскольку $\delta t_1^1 = \delta t_{n_2}^2 = \delta t_{n_2-1}^2 = 0$, то $\sum\limits_{j,k}\gamma_j^k \leqslant n - 3$. Тогда согласно представлению (7) в окрестности $\zeta = \infty$ имеем $|\delta z|\,|\zeta|^{-q} < \infty$, где $q = \sum\limits_{j,k}(\alpha_j^k - \gamma_j^k) + m_0 - 1 - \delta \geqslant 2$, что противоречит ограниченности $\delta z(\infty)$. Итак, $\delta z \equiv 0$, откуда с необходимостью следует $\Phi(\zeta,\delta u) \equiv 0$ в представлении для δz, что в свою очередь влечет равенство $\delta u = 0$. Соотношения (6) доказаны.

4. Существование и единственность решений. Установленные априорные оценки (4) и локальная единственность (6) решений системы уравнений (2), отвечающей простому полигону $P \subset G(\delta)$, определенному в (3), позволяют применить метод непрерывности для доказательства ее разрешимости [1]. Разработанный в [1] вариант метода непрерывности заключается в построении локальных вариаций начального полигона P_0, для которого разрешимость (2) известна, переводящих P_0 в заданный полигон P. В силу (6) $Dg/Du \neq 0$, и разрешимость (2) при малой деформации P_0 следует из теоремы о неявных функциях.

В [1] предложен алгоритм построения семейства полигонов P_k, сходящихся к заданному полигону P, и для него доказана разрешимость (2) исходя из ее разрешимости для начального полигона P_0.

В струйных задачах гидродинамики [1, гл. 4] этот алгоритм реализован и в случае бесконечных областей. Это обобщение аналогично переносится и на задачи теории фильтрации, для которых установлены свойства (4), (6). При этом теорема единственности решений системы (2) для заданного полигона $P \subset G(\delta)$ также следует из метода непрерывности, если она справедлива для начального полигона P_0.

Построим сначала такой начальный полигон P_0 для задач теории фильтрации в областях типа полуполосы ($|z_3| < \infty$). Положим $P_0^0 = \{x = 0, y > y_3 = \operatorname{Im} z_3\}$, $P_0^1 = \{x = H_2 > H, y > 0\}$, $P_0^2 = \{0 < x < H_2 - H, y = x\sin(1-\alpha)\}$, $\alpha \in (1/2, 1)$ (условие (3)). Напор H задан, глубина H_2 пока не фиксирована. Тогда в (1) имеем

$$\Pi(\zeta) = (\zeta-\tau_2)^{-1}(\zeta-\tau_3)^{\alpha-1}(\zeta-\tau_4)^{1-\alpha}, \qquad \tau_1 = 1, \qquad \tau_4 = -1.$$

Дополнительно зафиксируем постоянную $\tau_3 = -2$ и из условия

$$H = \int\limits_{-1}^{1} |\Pi_0(t)|\,dt \equiv H(\tau_2) \qquad \Big(\frac{dH}{d\tau_2} < 0, \quad H(\infty) = 0, \quad H(1) = \infty\Big)$$

однозначно определим τ_2, а с ним и $H_2 = \pi|\Pi_2(\tau_2)M(\tau_2)|$ в (1).

Если в исходном полигоне $P = \bigcup\limits_0^2 P^k$ на P^k имеются вершины z_j^k ($j = \overline{1, n_k}$, $k = 1, 2$) с углами $\alpha_j^k\pi$ при них, то для полигона P_0 введем фиксированные прообразы t_{0j}^k “вершин” $z_{0j}^k \in P_0^k$ ($z_1^1 = z_1$, $z_1^2 = z_3$, $z_{n_2}^2 = z_4$) с углами $\alpha_{0j}^k\pi = \pi$, подчинив их условиям

$$t_{01}^1 = 1 < t_{0j}^1 < t_{0j+1}^1 < \tau_2, \qquad t_{01}^2 = \tau_3 < t_{0j}^2 < t_{0j+1}^2 < \tau_4.$$

Тогда с помощью построенного конформного отображения $z = z_0(\zeta)$, $z_0 :\ E \to D_0, P_0 \subset \partial D_0$ однозначно определяются вершины $z_{0j}^k = z_0(t_{0j}^k)$, а с ними и $l_{0j} = |z_{0j+1}^k - z_{0j}^k|$.

Система уравнений (2), соответствующая фиксированному таким образом полигону $P_0 = \bigcup\limits_1^2 P_0^k$ ($z_{0j}^k \subset P_0^k$, $\alpha_{0j}^k = 1$), по построению однозначно разрешима относительно $u_0 = (t_{02}^1, \dots, t_{0n_1}^1, \tau_2; t_1^2, \dots, t_{n_1-2}^2)$, т. е. P_0 обладает требуемыми свойствами начального полигона. Деформация P_0 в заданный полигон P, отвечающий исходной задаче теории фильтрации, строится теперь по стандартной схеме [1, гл. 3, 4].

Пусть $z_3 = \infty$. Построим полигон $P_0 = \bigcup\limits_0^2 P_0^k$:

$$P_0^0 = \{x = 0, -\infty < y < \infty\}, \quad P_0^1 = \{x = H_2 > H,\ y > 0\},$$
$$P_0^2 = \{x = H_2 - H;\ y < y_0 = \operatorname{Im} z_0,\ y_0 < y < y_4 = \operatorname{Im} z_4\},$$

причем в точке $z_0 \in P_0^2$ имеется угол $\alpha_0\pi = 2\pi$ (разрез P_0^2). Напор H и глубина H_2 заданы. В (1) имеем

$$\Pi(\zeta) = [(\zeta - \tau_2)(\zeta - \tau_3)]^{-1}(\zeta - \tau_0), \quad z_0 = z_0(\tau_0), \quad z_0 : E \to D_0, \quad P_0 \subset \partial D_0.$$

Зафиксируем, как и в предыдущем случае, $\tau_1 = 1$, $\tau_4 = -1$, $\tau_3 = -2$, определив тем самым и τ_2 из условия $H = \int\limits_{-1}^{1} |\Pi_0(t)|\,dt$.

Рассмотрим теперь уравнение для $H_3 = H_2 - H > 0$:

$$H_3(\tau_0) = \pi\,\frac{\tau_0 - \tau_3}{\tau_2 - \tau_3}|M(\tau_3)| \qquad \Big(\frac{dH_3}{d\tau_0} > 0, \quad H_3(\tau_3) = 0, \quad H_3(\tau_4) = \infty\Big),$$

из которого однозначно отыскивается $\tau_0 \in (\tau_3, \tau_4)$.

При необходимости зафиксируем постоянные t_{0j}^k и построим точки $z_{0j}^k = z_0(t_{0j}^k)$, $z_0 : E \to D_0, P_0 \subset \partial D_0$.

Соответствующая построенному полигону P_0 система (2), очевидно, однозначно разрешима, и, следовательно, P_0 обладает необходимыми свойствами начального полигона. Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть фильтрация жидкости происходит в области D, ограниченной свободной границей L и простым полигоном $P = \bigcup\limits_0^2 P^k \subset G$ (условие (3)). Тогда система уравнений (2) относительно вектора $u \in R^{n-2}$ искомых параметров конформного* *отображения* $z : E \to D$, $\partial D = P \cup L$, *а с нею и исходная задача теории фильтрации однозначно разрешимы.*

Замечание 4. В [1, гл. 3, 4] с помощью семейства $P_m^k \to \Gamma^k$, $m \to \infty$ обоснован предельный переход к заданным криволинейным границам Γ^k, $k = 1, 2$, применимый и в изученных задачах теории фильтрации. Однако в предельном случае не гарантируется единственность решений.

Замечание 5. Для криволинейных границ $\Gamma^k \subset \partial D$ теорема существования и единственности фильтрационных задач может быть установлена другими методами [1, гл. 8, § 5].

Пусть для определенности $z_3 = \infty$,

$$\Gamma^k: \quad x = f^k(y), \quad |y| \geqslant y_0^k \quad (y_0^1 = 0, \quad y_0^2 = \operatorname{Im} z_0).$$

Предположим, что $f^k(y) \in C^2(\Gamma^k)$, $f^k \equiv x^k = \text{const}$ при $|y| \geqslant y_1^k > y_0^k$, причем $df^k/dy \neq 0$ при $y_0^k < |y| < y_1^k$. Сделаем замену переменных: $x - f^k(y) = \xi - x^k$, $y = \eta$. Тогда Γ^k в новых переменных перейдут в полупрямые P^k (второй пример P_0). Полученная в результате простейшая краевая задача для обобщенной аналитической функции $z = F(\zeta)$ имеет единственное решение [1, с. 388].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Монахов В. Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
2. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.
3. **Аравин В. И., Нумеров С. Н.** Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехтеоретиздат, 1953.

Поступила в редакцию 16/III 2000 г.