

АППАРАТУРА И МЕТОДЫ ОПТИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

УДК 629.735.33:551.511.6:621.371

## Учет влияния подстилающей поверхности на самолетные вихри при оценивании их циркуляции из лидарных измерений

И.Н. Смалихо\*

*Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
634055, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1*

Поступила в редакцию 22.04.2019 г.

Усовершенствован разработанный ранее алгоритм оценивания циркуляции самолетных вихрей из измерений импульсным когерентным доплеровским лидаром Stream Line путем использования в алгоритме модели пары самолетных вихрей, учитывающей влияние на пространственную динамику и эволюцию вихрей подстилающей поверхности Земли. В численном эксперименте показано, что усовершенствованный алгоритм позволяет получать результат с высокой точностью, а используемый ранее подход дает завышение лидарной оценки циркуляции вихря примерно на 10%.

*Ключевые слова:* когерентный доплеровский лидар, самолетные вихри; coherent Doppler lidar, aircraft wake vortices.

### Введение

При движении самолета в воздушном пространстве всегда образуется пара вихрей, которые превращаются в устойчивые вихревые жгуты, тянущиеся за ним на большие расстояния и могущие представлять опасность для другого летательного аппарата. Особенно актуальна проблема вихревой безопасности для крупных аэропортов, на летных полях которых самолеты приземляются и взлетают через короткие (вплоть до 2 мин) промежутки времени. Для разработки систем обеспечения безопасности полетов [1] необходимы исследования вихревых следов самолетов. В настоящее время широкое применение в таких исследованиях получили импульсные когерентные доплеровские лидары (ИКДЛ). Предложены стратегии лидарных измерений, и разработан ряд методов определения параметров самолетных вихрей (координат оси вихря и его циркуляции) из исходных экспериментальных данных ИКДЛ [2–11].

Идущий на посадку самолет, находясь в пределах летного поля аэропорта, генерирует самолетные вихри на высотах приземного слоя атмосферы (ПСА). Известно [1, 12, 13], что на их пространственную динамику и эволюцию может оказывать существенное влияние подстилающая поверхность Земли, особенно при опускании оси вихря до высоты порядка половины начального расстояния между осями правого и левого вихрей. В разработанных ранее алгоритмах оценивания циркуляции самолетного вихря из измерений ИКДЛ используется модель вихря, не учитывающая влияние на него подстилающей

поверхности. Вопрос о правильности такого подхода оставался открытым.

В настоящей работе предложен алгоритм определения циркуляции вихрей, генерируемых идущим на посадку самолетом в ПСА, из измерений ИКДЛ с использованием модели самолетных вихрей, учитывающей влияние на них подстилающей поверхности. Представлены результаты численного эксперимента, в котором используются модели самолетных вихрей с учетом и без учета влияния подстилающей поверхности при оценивании их циркуляции из моделируемых данных, аналогичных данным измерений ИКДЛ Stream Line [14] на летном поле аэропорта.

### 1. Стратегия измерения и алгоритм оценивания параметров самолетных вихрей

Для получения информации о вихревом следе самолета из измерений ИКДЛ применяется следующая стратегия. Лидар располагается на расстоянии  $R_r$  до взлетно-посадочной полосы (ВПП), как показано на рис. 1. Во время измерения лидаром применяется сканирование зондирующим пучком в вертикальной плоскости, перпендикулярной ВПП. При этом угол места  $\varphi$  со временем попеременно увеличивается и уменьшается в пределах заданного сектора сканирования  $[0^\circ, \varphi_{\max}]$ , где  $\varphi_{\max}$  — максимальный угол места. Зависимость угла места  $\varphi$  от времени  $t'$ , в пренебрежении относительно небольшим временем, затрачиваемым на изменение направления сканирования, можно представить в следующем виде:

\* Игорь Николаевич Смалихо (smalikh@iao.ru).

$$\varphi(t') = \omega_s \Pi(t'), \quad (1)$$

где  $\omega_s$  – угловая скорость сканирования;  $\Pi(t')$  – периодическая функция времени  $t'$  (отсчитываемого с момента начала сканирования), определяемая как  $\Pi(t') = t' - 2(n' - 1)T_{\text{scan}}$  при  $2(n' - 1) \leq t'/T_{\text{scan}} < 2n' - 1$  и  $\Pi(t') = 2n'T_{\text{scan}} - t'$  при  $2n' - 1 \leq t'/T_{\text{scan}} < 2n'$ ;  $n' = 1, 2, 3, \dots$  – номер сканирования и  $T_{\text{scan}}$  – продолжительность одного сканирования. С учетом возможностей ИКДЛ Stream Line в наших экспериментах [7, 8, 15, 16] задавались следующие параметры:  $R_r \approx 300$  м,  $\varphi_{\text{max}} = 20^\circ$ ,  $\omega_s = 2^\circ/\text{с}$  и  $T_{\text{scan}} = 10$  с. Для аккумуляции исходных данных лидарных измерений мы использовали  $N_a = 1500$  посылок в атмосферу зондирующих импульсов. Так как у этого лидара частота следования импульсов  $f_p = 15$  кГц, продолжительность измерения одного массива доплеровских спектров вдоль зондирующего луча, из которого затем оценивается радиальная скорость (проекция вектора скорости движения воздушных масс на ось зондирующего луча),  $\Delta t = N_a/f_p = 0,1$  с. При этом в течение каждого сканирования получаем лидарные данные для  $M = T_{\text{scan}}/\Delta t = 100$  лучей с разрезанием по углу места  $\Delta\varphi = \varphi_{\text{max}}/M = 0,2^\circ$ .

После предварительной обработки исходных лидарных данных имеем массив оценок радиальной скорости  $V_L(R_k, \varphi_m; n')$ , где  $R_k = R_0 + k\Delta R$  – расстояние между лидаром и центром зондируемого объема,

$k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ ,  $\Delta R$  – шаг по дальности вдоль луча от лидара;  $\varphi_m = (0,5 + m)\Delta\varphi$  – угол места,  $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ . Так как для этого лидара частотная полоса пропускания  $B = 50$  МГц, мы задавали минимально возможный шаг по дальности  $\Delta R = c/(2B) = 3$  м, где  $c$  – скорость света. При отсутствии вихревого следа самолета распределение радиальной скорости по расстоянию  $R_k$  и углу  $\varphi_m$  полностью определяется фоновым ветром. Обозначим его  $V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n')$ . После пересечения самолетом плоскости сканирования в течение какого-то времени радиальная скорость представляет собой сумму:

$$V_L(R_k, \varphi_m; n') = V_L^{(W)}(R_k, \varphi_m; n') + V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n'), \quad (2)$$

где  $V_L^{(W)}(R_k, \varphi_m; n')$  – слагаемое, обусловленное наличием самолетных вихрей в пределах интервалов  $[R_0, R_{K-1}]$  и  $[0^\circ, \varphi_{\text{max}}]$ . Так как информация о самолетных вихрях содержится в первом слагаемом формулы (2), необходимо из измеренной радиальной скорости  $V_L(R_k, \varphi_m; n')$  вычесть радиальную скорость фонового ветра  $V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n')$ :  $V_L^{(W)}(R_k, \varphi_m; n') = V_L(R_k, \varphi_m; n') - V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n')$ . Но, строго говоря, из данных лидарных измерений во время присутствия самолетных вихрей в пределах сектора сканирования определить  $V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n')$  не представляется возможным. Поэтому воспользуемся следующим приближением.

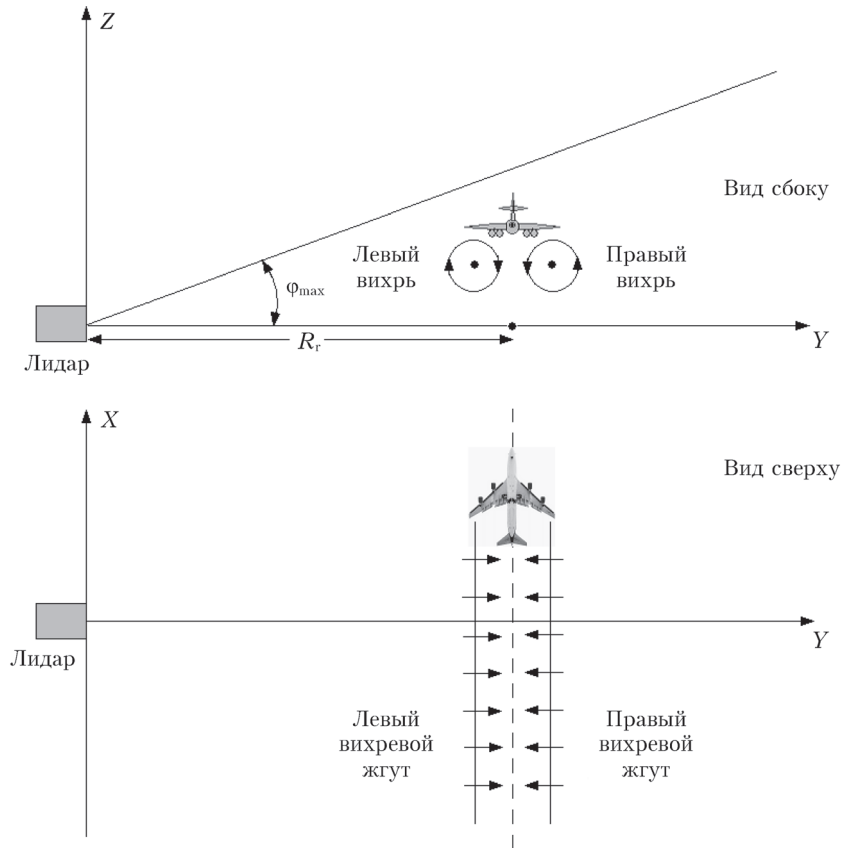


Рис. 1. Геометрия измерения лидаром, установленным на расстоянии  $R_r$  от ВВП, при сканировании зондирующим пучком в вертикальной плоскости, перпендикулярной к ВВП. Сканирование осуществляется с попеременным увеличением и уменьшением угла места  $\varphi$  в пределах сектора  $[0^\circ, \varphi_{\text{max}}]$

Пусть, начиная с номера сканирования  $n' = n_0 + 1$  и до  $n' = n_0 + N$ , массив лидарных оценок радиальной скорости  $V_L(R_k, \varphi_m; n')$  содержит информацию о самолетных вихрях. Чтобы избежать влияния фонового ветра, получаем новый массив данных:

$$\Delta V_L(R_k, \varphi_m; n) = V_L(R_k, \varphi_m; n_0 + n) - V_L(R_k, \varphi_m; n_0), \quad (3)$$

где  $n = n' - n_0 = 1, 2, \dots, N$ . Очевидно, что по причине нестационарности (в основном из-за турбулентных вариаций) фонового ветра, когда  $V_L^{(b)}(R_k, \varphi_m; n')$  заметно изменяется от сканирования к сканированию,  $\Delta V_L(R_k, \varphi_m; n) \neq V_L^{(W)}(R_k, \varphi_m; n_0 + n)$ . При этом чем больше число  $n$ , тем больше различие между  $\Delta V_L(R_k, \varphi_m; n)$  и  $V_L^{(W)}(R_k, \varphi_m; n_0 + n)$ . Поэтому изложенный ниже алгоритм применим для обработки лидарных данных при относительно слабой ветровой турбулентности. В [16] условие применимости данного алгоритма определено из натурального эксперимента.

Подробное описание алгоритма оценивания координат оси самолетного вихря ( $R_{Ci}(n)$  – расстояние от лидара до оси  $i$ -го вихря;  $\varphi_{Ci}(n)$  – угол места луча, пересекающего ось  $i$ -го вихря; индекс  $i = 1$  для левого и  $i = 2$  для правого вихрей на рис. 1) из измеренного лидаром массива  $\Delta V_L(R_k, \varphi_m; n)$  дано в работах [7, 8]. Из равенства  $\varphi(t_{Ci}^{(i)}(n)) = \varphi_{Ci}(n)$  находится момент времени  $t_{Ci}^{(i)}(n)$  пересечения зондирующим пучком оси  $i$ -го самолетного вихря для  $n$ -го сканирования. В ходе натурального эксперимента, как правило, по ручным часам определялся момент времени  $t_{OF}$  пересечения самолетом плоскости сканирования (с точностью до 1 с) и, следовательно, появлялась возможность получения зависимости параметров самолетных вихрей от их возраста  $t_{Ci}(n) = t_{Ci}^{(i)}(n) - t_{OF}$ . Координаты осей вихрей как функции времени  $t_n^{(i)}$  могут быть представлены в декартовой системе:

$$z_i(t_{Ci}(n)) = R_{Ci}(n) \sin[\varphi(t_{OF} + t_{Ci}(n))], \quad (4)$$

$$y_i(t_{Ci}(n)) = R_{Ci}(n) \cos[\varphi(t_{OF} + t_{Ci}(n))], \quad (5)$$

где  $z_i$  – вертикальная и  $y_i$  – горизонтальная координаты оси  $i$ -го вихря.

В [8] также дано описание алгоритма оценивания циркуляции левого  $\Gamma_1(t_{C1}(n))$  и правого  $\Gamma_2(t_{C2}(n))$  самолетных вихрей. Именно при оценивании этих параметров вихрей важен учет влияния подстилающей поверхности. Поэтому рассмотрим алгоритм более подробно. Циркуляция вихрей определяется путем минимизации функционалов  $\rho(\Gamma_1)$  и  $\rho(\Gamma_2)$  методом наименьших квадратов, т.е. с помощью процедуры

$$\min\{\rho(\Gamma_i)\} = \rho(\hat{\Gamma}_i), \quad (6)$$

где  $\hat{\Gamma}_i$  – оценка циркуляции вихря,

$$\rho(\hat{\Gamma}_i) = \sum_m \left[ \Delta V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n) - V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2) \right]^2, \quad (7)$$

$V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  – модельная радиальная скорость, рассчитываемая при произвольных значениях циркуляции самолетных вихрей  $\Gamma_i$  и нулевой скорости ветра ( $V_L^{(b)} = 0$ ) по приведенным в [8] формулам (10)–(12). Суммирование в (7) ведется по всем  $m$ , удовлетворяющим условию

$$R_{Ci} |\sin(\varphi_m - \varphi_{Ci})| \leq r_{\max}, \quad (7a)$$

где  $r_{\max}$  – максимальное расстояние от оси вихря, задаваемое в зависимости от типа самолета.

## 2. Модель пары самолетных вихрей

Для того чтобы рассчитать  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$ , необходимо воспользоваться моделью радиальной скорости  $V_r(R, \varphi)$  в плоскости сканирования (без усреднения по зондируемому объему). Здесь  $R$  – произвольное расстояние от лидара и  $\varphi$  – произвольный угол места. Координатам точки  $\{R, \varphi\}$  соответствует радиус вектор  $\mathbf{r} = \{y, z\}$ , где  $y = R \cos \varphi$  и  $z = R \sin \varphi$ . Обозначим вектор скорости движения воздушных масс на плоскости сканирования  $\mathbf{V} = \{V_y, V_z\}$ . При наличии самолетных вихрей он является функцией координат  $\mathbf{r}$  (и времени  $t$ ). Представим векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}$  в комплексном виде:  $\mathbf{r} = y + jz$  и  $\mathbf{V} = V_y + jV_z$  ( $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица). Тогда радиальную скорость  $V_r(R, \varphi)$  можно записать [17]:

$$V_r(R, \varphi) = \text{Re}\{\mathbf{S}^* \mathbf{V}(RS)\}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{S} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ . Здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение.

В образующейся паре самолетных вихрей происходит вращение воздушных масс вовнутрь (см. рис. 1). Поэтому, находясь в поле друг друга, ядра этих вихрей перемещаются вниз (при отсутствии существенного ветрового потока вверх). Под действием бокового (относительно ВПП) ветра самолетные вихри перемещаются в его направлении. На рис. 2 приведен пример положения осей пары вихрей в точках  $\mathbf{r}_1$  (левый вихрь) и  $\mathbf{r}_2$  (правый вихрь) через какое-то время после их формирования. Обозначим расстояния между осями вихрей как  $b(t) = |\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)|$ . Для начального расстояния между осями вихрей  $b_0 = b(0)$  справедлива формула  $b_0 = (\pi/4)B_A$ , где  $B_A$  – размах крыльев самолета [12].

С учетом бокового ветра запишем мгновенное пространственное распределение вектора  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_W(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_b(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{V}_W(\mathbf{r})$  – вектор скорости, связанный с вращением воздуха внутри самолетных вихрей,  $\mathbf{V}_b(\mathbf{r})$  – вектор бокового (фонового) ветра. Так как для расчета  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  нас интересует только первое слагаемое (9), положим второе слагаемое равным нулю, т.е. в (8)  $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_W(\mathbf{r})$ . Для пары самолетных вихрей, высота  $h$  осей которых удовлетворяет условию  $h > 2b_0$ , вектор скорости можно представить как суперпозицию полей двух изолированных вихрей [18]:

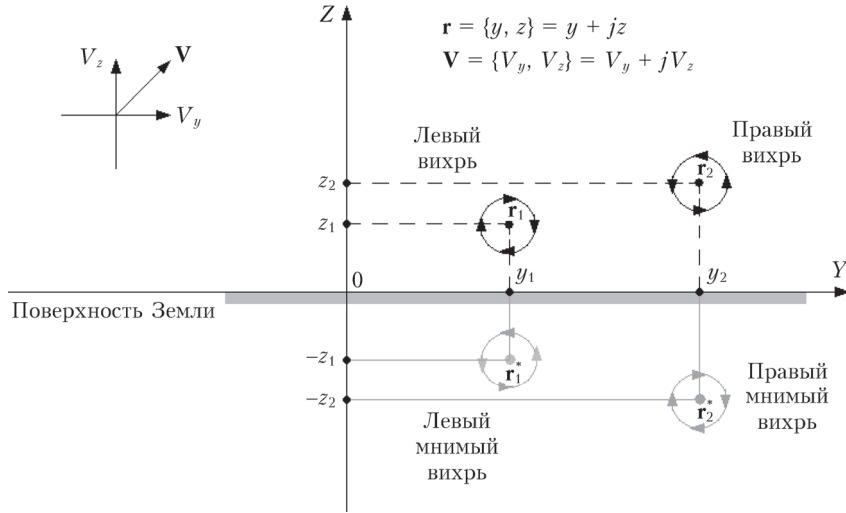


Рис. 2. Расположение реальных и мнимых самолетных вихрей с указанием направлений вращения воздуха вокруг их осей

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_1^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \mathbf{V}_2^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (10)$$

В (10)  $\mathbf{V}_i^{(1)}(\mathbf{r})$  – вектор скорости  $i$ -го изолированно-го вихря в системе координат с центром в точке  $\mathbf{r}_i = y_i + jz_i$  положения оси вихря.

Так как у левого вихря воздушные массы вращаются вокруг его оси по часовой стрелке, а у правого – против, вектора скорости изолированных вихрей можно представить как [17]:

$$\mathbf{V}_1^{(1)}(\mathbf{r}) = -|\mathbf{V}_1^{(1)}(\mathbf{r})|j \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_2^{(1)}(\mathbf{r}) = |\mathbf{V}_2^{(1)}(\mathbf{r})|j \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}. \quad (12)$$

Воспользуемся наиболее адекватной моделью, которой является модель Бурнхама–Хеллока [19], для расчета тангенциальной скорости  $i$ -го вихря  $V_i(r) = |\mathbf{V}_i^{(1)}(\mathbf{r})|$  (здесь  $r = |\mathbf{r}|$  – расстояние от оси вихря):

$$V_i(r) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{r}{r^2 + r_C^2}, \quad (13)$$

где  $r_C$  – радиус ядра вихря (расстояние от оси вихря, на котором тангенциальная скорость максимальна; обычно в расчетах полагают  $r_C = 0,05B_A$  [20]). Из (8), (10)–(13) для радиальной скорости  $V_r(R, \varphi)$  (в случае нулевого фонового ветра) получаем формулу [8]:

$$V_r(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i \Gamma_i R C_i \sin(\varphi_{Ci} - \varphi)}{(R \sin \varphi - z_i)^2 + (R \cos \varphi - y_i)^2 + r_C^2} \quad (14)$$

без учета влияния на вихри подстилающей поверхности.

При формировании вихревого следа на небольших высотах (например, когда самолет заходит на посадку) его движение происходит в области, огра-

ниченной жесткой поверхностью Земли, и на ней должно выполняться условие непротекания [1]. Его выполнение обеспечивается за счет размещения под подстилающей поверхностью отраженных (мнимых) вихрей с координатами осей  $\mathbf{r}_i^*$ . При этом для мнимых вихрей вращение происходит в направлении, противоположном направлению вращения реальных вихрей (см. рис. 2) [1], а тангенциальные скорости реального и мнимого  $i$ -х изолированных вихрей равны. Принимая во внимание принцип суперпозиции полей всех четырех вихрей (двух реальных и двух мнимых), запишем вектор скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_1^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \mathbf{V}_2^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) + \tilde{\mathbf{V}}_1^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1^*) + \tilde{\mathbf{V}}_2^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2^*), \quad (15)$$

где

$$\tilde{\mathbf{V}}_i^{(1)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{V}_i^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

– вектор скорости для мнимого изолированного  $i$ -го вихря. Из (8), (11)–(13), (15) и (16) для радиальной скорости  $V_r(R, \varphi)$  (также в случае нулевого фонового ветра) получаем формулу, учитывающую влияние подстилающей поверхности:

$$V_r(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \times \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{(-1)^{i+l} \Gamma_i R C_i \sin[\varphi + (-1)^l \varphi_{Ci}]}{[R \sin \varphi + (-1)^l z_i]^2 + (R \cos \varphi - y_i)^2 + r_C^2}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что с увеличением высоты осей вихрей  $z_i$  вклад третьего и четвертого слагаемого в (15) в радиальную скорость уменьшается; при условии  $z_i \gg b_0$  результаты расчетов по формулам (14) и (17) практически не отличаются.

С целью выявления степени расхождения лидарных оценок циркуляции вихрей был проведен численный эксперимент с использованием моделей, описываемых формулами (14) и (17).

### 3. Численный эксперимент

Чтобы провести численный эксперимент, имитирующий лидарные измерения и оценивание параметров самолетных вихрей (траектории осей вихрей  $\mathbf{r}_i(t)$  и зависимость циркуляции от времени  $\Gamma_i(t)$ ) по описанному выше алгоритму, необходимо задать модели для  $z_i(t)$ ,  $y_i(t)$  и  $\Gamma_i(t)$ , в наибольшей степени соответствующие реальности при нахождении вихрей в приземном слое атмосферы на высотах  $z \leq b_0$ . Координаты  $\mathbf{r}_i$  являются функциями времени, и для вектора скорости перемещения оси  $i$ -го самолетного вихря можно записать  $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i) = d\mathbf{r}_i/dt$ . С учетом (9) и (15) запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{V}_2^{(1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \tilde{\mathbf{V}}_1^{(1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1^*) + \\ + \tilde{\mathbf{V}}_2^{(1)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2^*) + \mathbf{V}_b(\mathbf{r}_1, t), \\ \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{V}_1^{(1)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \tilde{\mathbf{V}}_1^{(1)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1^*) + \\ + \tilde{\mathbf{V}}_2^{(1)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2^*) + \mathbf{V}_b(\mathbf{r}_2, t) \end{cases} \quad (18)$$

с начальными условиями  $z_1(0) = z_2(0) = h_0$ ,  $y_1(0) = R_r - b_0/2$  и  $y_2(0) = R_r + b_0/2$ . Здесь  $h_0$  – высота формирования вихрей (идеальной формы);  $R_r$  – расстояние между лидаром и ВПП;  $b_0$  – начальное расстояние между осями правого и левого вихрей. Чтобы решить систему уравнений (18) (например методом Рунге-Кутты), необходимо задать временные профили циркуляции вихрей  $\Gamma_1(t)$ ,  $\Gamma_2(t)$  и пространственно-временное распределение вектора фонового ветра  $\mathbf{V}_b(\mathbf{r}, t)$ . Можно положить  $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = \Gamma_0$  в начальный момент времени и рассчитать начальную циркуляцию вихря  $\Gamma_0$  по формуле [12]:

$$\Gamma_0 = M_A g / (\rho_a b_0 V_A), \quad (19)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $\rho_a$  – плотность воздуха на высоте полета;  $M_A$  – масса и  $V_A$  – скорость самолета. При отсутствии фонового ветра и при  $h_0 \gg (b_0/2)^2$  начальная вертикальная компонента вектора скорости перемещения оси вихря  $w_0 = -\Gamma_0 / (2\pi b_0)$  [12].

Упростим задачу, рассмотрев случай очень слабого фонового ветра (включая случай очень слабой ветровой турбулентности). Тогда в (18) можно положить  $\mathbf{V}_b(\mathbf{r}, t) = 0$ . Пусть временные профили циркуляции одинаковые:  $\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) = \Gamma(t)$ . Тогда координаты осей вихрей  $z_1(t) = z_2(t) = z(t)$ ,  $y_1(t) = R_r - b(t)/2$  и  $y_2(t) = R_r + b(t)/2$ , где  $b(t)$  – расстояние между осями вихрей. Воспользовавшись формулами (11)–(13), (16) (в силу условия  $b_0 \gg r_C$  в (13) можно задать  $r_C = 0$ ) и сделав замену  $y'(t) = b(t)/2$  ( $y'$  – горизонтальная координата оси правого вихря в системе координат с центром в точке  $\{R_r, 0\}$ ), приходим к следующей системе двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy'}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{y'^2}{y'^2 + z^2}, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{y'} \cdot \frac{z^2}{y'^2 + z^2} \end{cases} \quad (20)$$

с начальными условиями  $y'(0) = b_0/2$  и  $z(0) = h_0$ . Введя обозначения  $w(t) = dz/dt$  для вертикальной и  $v(t) = dy'/dt$  для горизонтальной компонент вектора скорости перемещения оси правого вихря, для начальных скоростей  $w_0 = w(0)$  и  $v_0 = v(0)$  из (20) имеем:

$$w_0 = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b_0} \cdot \frac{h_0^2}{(b_0/2)^2 + h_0^2}, \quad (21)$$

$$v_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi h_0} \cdot \frac{(b_0/2)^2}{(b_0/2)^2 + h_0^2}. \quad (22)$$

Система уравнений (20) имеет аналитическое решение [1]. Его можно получить следующим образом. Разделив в (20) верхнее уравнение на нижнее и проведя интегрирование, получаем соотношение

$$z^{-2} + y'^{-2} = C_1, \quad (23)$$

где в силу начальных условий постоянная  $C_1$  определяется как

$$C_1 = h_0^{-2} + (b_0/2)^{-2}. \quad (24)$$

Затем, воспользовавшись (23) и подставив  $z = y' / \sqrt{C_1 y'^2 - 1}$  в верхнее уравнение в (20), после интегрирования получаем зависимость  $y'$  от времени. Из (23) находим временной профиль для  $z$ . Решение системы уравнений (20) имеет вид [1]:

$$y' = \sqrt{(1 + d^2)/C_1}, \quad (25)$$

$$z = d^{-1} \sqrt{(1 + d^2)/C_1}, \quad (26)$$

где

$$d = a/2 + \sqrt{(a/2)^2 + 1}, \quad (27)$$

$$a = \frac{C_1}{4\pi} \int_0^t \Gamma(t') dt' + C_2, \quad (28)$$

$$C_2 = b_0 / (2h_0) - 2h_0 / b_0. \quad (29)$$

В реальной атмосфере под действием различных факторов происходит затухание циркуляции самолетного вихря. Воспользуемся простейшей моделью для  $\Gamma(t)$  в виде

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \exp(-t/T_{e-1}), \quad (30)$$

где  $T_{e-1}$  – время, за которое циркуляция самолетного вихря спадет до уровня  $e^{-1}$ . После подстановки (30) в (28) и интегрирования имеем

$$a = \frac{C_1}{4\pi} \Gamma_0 T_{e-1} [1 - \exp(-t/T_{e-1})] + C_2. \quad (31)$$

По формулам (24)–(27), (29) и (31) были рассчитаны координаты осей вихрей  $z_1(t) = z_2(t) = z(t)$ ,  $y_1(t) = R_r - y'(t)$  и  $y_2(t) = R_r + y'(t)$ , расстояние между осями правого и левого вихрей  $b(t) = y_2(t) - y_1(t) = 2y'(t)$ , вертикальная компонента век-

тора скорости перемещения их осей  $w_1(t) = w_2(t) = w(t) = dz/dt$  и горизонтальные компоненты скорости  $v_1(t) = dy_1/dt = -dy_2/dt$ ,  $v_2(t) = dy_2/dt = dy_1/dt$ ; по формуле (30) – циркуляция вихря  $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$ , задав  $R_r = 300$  м,  $h_0 = 50$  м,  $b_0 = 50$  м,  $\Gamma_0 = 500$  м<sup>2</sup>/с и  $T_{e-1} = 100$  с. На рис. 3 представлены результаты расчета для изменения перечисленных выше параметров самолетных вихрей в течение трех минут. Видно, что примерно через 40 с после образования пары самолетных вихрей на высоте 50 м их оси опустятся до высоты  $b_0/2 = 25$  м, а расстояние

между осями вихрей увеличится примерно в 2 раза. В дальнейшем вихри опускаются незначительно. Скорость «разбегания» вихрей  $v_2 - v_1$  вначале растет, достигая 1,6 м/с (см. рис. 3, *e*), затем уменьшается из-за затухания их циркуляции. Согласно рис. 3, *z* за 3 мин расстояние между осями вихрей увеличится почти в 5 раз.

Приведенная на рис. 3 модель была использована в численном эксперименте, имитирующем лидарные измерения самолетных вихрей. Связь между входящей в (7)  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  с  $V_r(R, \varphi)$  можно

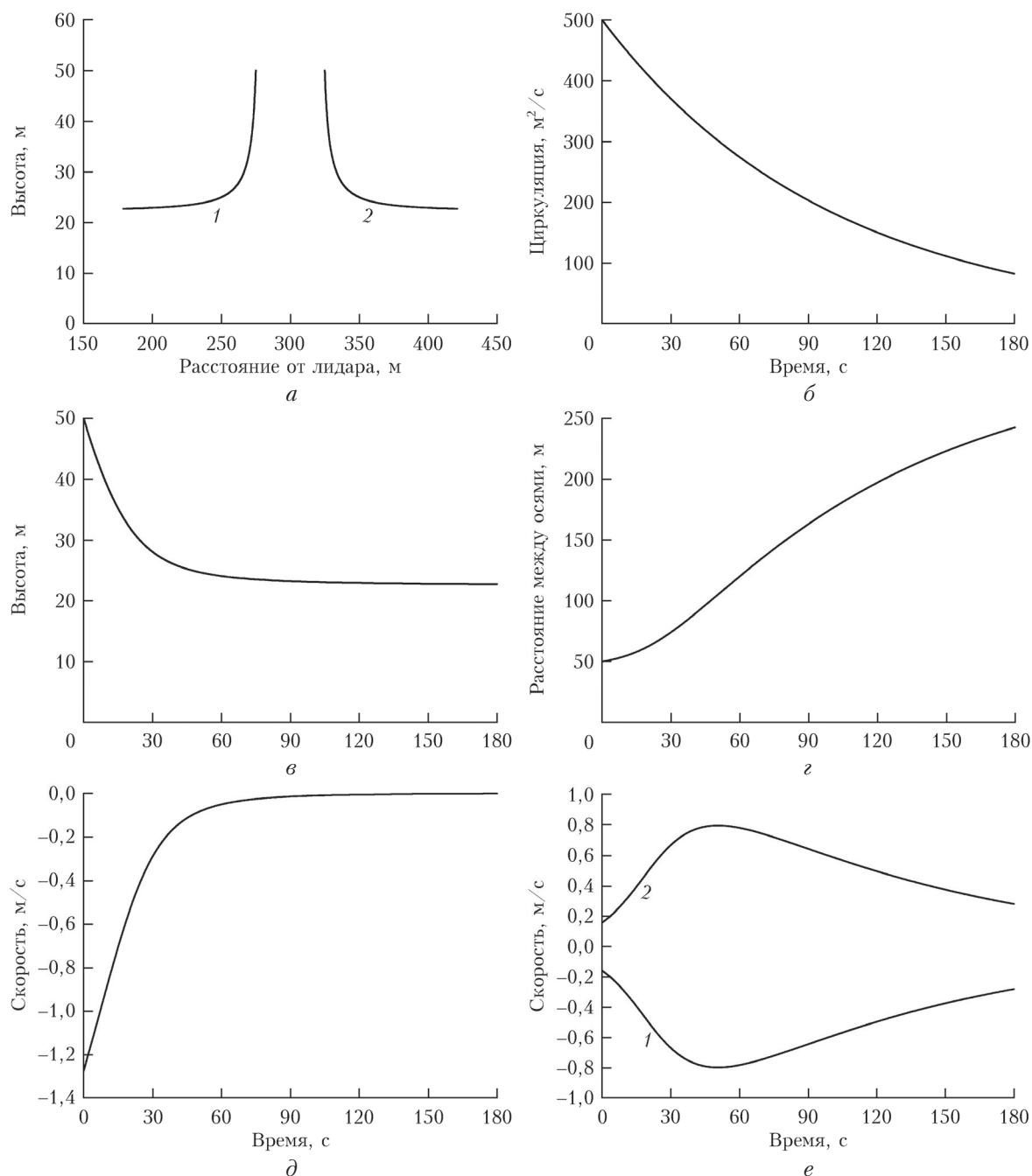


Рис. 3. Траектории осей вихрей (*a*) и временные профили циркуляции вихрей (*б*), высоты осей вихрей (*в*), расстояния между осями правого и левого вихрей (*г*), вертикальной (*д*) и горизонтальных скоростей перемещения осей вихрей (*е*), рассчитанные по формулам (20), (24)–(27) и (29)–(31) (кривые 1 – для левого и кривые 2 – для правого вихрей)

найти в [8, формулы (10) и (12)]. При этом используется мгновенное распределение радиальной скорости по дальности  $R$  и углу места  $\varphi \in [0^\circ, \varphi_{\max}]$ , а также полученные в ходе эксперимента координаты осей вихрей (см. (4) и (5)). Хотя при этом за время сканирования  $T_{\text{scan}} = 10$  с реальное распределение лидарной оценки радиальной скорости  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  как функции от угла места  $\varphi_m$  может существенно отличаться от модельной скорости  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$ , рассчитанной при истинных значениях  $r_i(t_{Ci}(n))$  и  $\Gamma_i(t_{Ci}(n))$ . В рамках рассматриваемой модели самолетных вихрей отличие будет наибольшим при первом сканировании зондирующим пучком ( $n = 1$ ), т.е. когда скорость опускания вихрей максимальна (согласно данным рис. 3 в течение первых 10 с скорость  $|\dot{\omega}| \sim 1$  м/с). Очевидно, что в этом случае результат минимизации функционала (7) может дать оценки циркуляции вихря, отличные от истинного значения. Степень отличия будет определена в численном эксперименте. Кроме того, целью эксперимента является сопоставление оценок параметров самолетных вихрей при использовании (14) и (17) с параметрами, задаваемыми при моделировании (истинными).

В рамках рассматриваемой модели (см. рис. 3) рассчитаем мгновенные распределения радиальных скоростей  $V_r(R_{C1}, \varphi)$  и  $V_r(R_{C2}, \varphi)$  как функций от угла места  $\varphi$  в различные моменты времени, отсчитываемого после формирования самолетных вихрей, по формуле (14) без учета и формуле (17) с учетом влияния подстилающей поверхности. Так как в этой модели начальные параметры вихрей соответствуют пассажирскому самолету Боинг-747, зададим радиус ядра вихря  $r_C = 3,2$  м.

На рис. 4 представлены результаты расчетов  $V_r(R_{C1}, \varphi)$  и  $V_r(R_{C2}, \varphi)$ . Вертикальные сплошные линии показывают диапазон углов места, удовлетворяющих условию (7а) при  $r_{\max} = 20$  м. Согласно рис. 3, а можно было бы задать  $r_{\max} = 25$  м, но на практике, когда боковой ветер направлен в сторону лидара, симметрия распределения  $\varphi$  относительно  $\varphi_{Ci}$  в пределах интервала, определяемого условием (7а), может быть существенно нарушена, что скажется на точности определения циркуляции самолетного вихря. Отметим также, что при отсутствии фонового ветра и при  $h_0 \geq b_0$  ось самолетного вихря может опуститься до высоты примерно  $b_0/2$  (см. рис. 3, а, в). Но если вихревой след сгенерирован, например, самолетом А320, для которого  $b_0 = 27$  м, то ось вихря может опуститься до высоты около 13 м, и в этом случае следует задавать меньшее значение  $r_{\max}$ . На рис. 4 видно, что в начальный момент времени, когда вихри находятся на высоте 50 м (см. рис. 3, а, в), распределения радиальных скоростей в пределах диапазонов углов места, показанных вертикальными сплошными линиями, практически не отличаются от результатов расчета по формулам (14) и (17). Когда оси вихрей опустились, наблюдается заметное отличие. Анализ данных рис. 4, б, г указывает на то, что использование (14) при минимизации функцио-

нала (7) должно привести к переоценке циркуляции вихря.

Выше были рассмотрены мгновенные распределения радиальной скорости как функции от угла места. Но в реальном эксперименте распределения  $\Delta V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  измеряются во время сканирования зондирующим пучком, так как оси самолетных вихрей подвижны. В численном эксперименте, имитирующем лидарные измерения, это будет учтено. Пусть изменение угла места во времени описывается формулой (1) при  $\omega_s = 2^\circ/\text{с}$ ,  $\min\{\varphi(t)\} = 0^\circ$ ,  $\varphi_{\max} = 20^\circ$  и продолжительность одного сканирования  $T_{\text{scan}} = 10$  с. Рассмотрим два случая: 1) когда в момент образования вихря угол места  $\varphi(0) = 0^\circ$  и 2)  $\varphi(0) = 20^\circ$ , т.е. во время первого сканирования ( $n = 1$ ) угол места увеличивается и уменьшается соответственно. Для  $n = 1$  скорость перемещения зондируемого объема по вертикали на расстоянии  $R_k = 300$  м от лидара  $\sim 10$  м/с в первом случае и  $-10$  м/с во втором. В то же время, согласно рис. 3, д, в первые 10 с вертикальная скорость перемещения вихря около  $-1$  м/с.

Так как в численном эксперименте фоновый ветер отсутствует, можно положить  $\Delta V_L(R_k, \varphi_m; n) = V_L(R_k, \varphi_m; n)$ . Проведем сравнение распределения лидарных оценок радиальной скорости как функции от угла места, получаемых из численного эксперимента во время первого сканирования, т.е.  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); 1)$ , где время  $t = m\Delta t$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ ;  $M = 100$ ;  $\Delta t = 0,1$  с, с мгновенным распределением  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; 1)$  при задании истинных значений координат оси  $i$ -го вихря  $\{R_{Ci}, \varphi_{Ci}\}$ , учитывая, что  $\varphi_{Ci} = \varphi(t_{Ci}(1))$  и циркуляция равна  $\Gamma(t_{Ci}(1))$ . Будем считать, что лидарное отношение сигнал-шум SNR достаточно высокое и можно пренебречь случайной инструментальной погрешностью оценки радиальной скорости. Тогда для расчетов  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); n)$  и  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  используем (17) и приведенные в [8] формулы (10) и (12).

На рис. 5 представлены рассчитанные лидарная оценка зависимости радиальной скорости  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); 1)$  от времени  $t_m$  (или угла  $\varphi_m = \varphi(t_m(1))$ ) и мгновенное распределение  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; 1)$ , совпадающее с входящей в (7) функцией  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$ , у которой  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равны истинным значениям циркуляции левого  $\Gamma(t_{C1}(1))$  и правого  $\Gamma(t_{C2}(1))$  вихрей соответственно.  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); 1)$  представляет собой входящую в (7) измеренную лидаром  $\Delta V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  за время первого сканирования, т.е.  $n = 1$ . Она отличается от мгновенного распределения  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; 1)$  даже при задании точных значений параметров самолетных вихрей. Если сканирование начинается с угла  $\varphi(0) = 0^\circ$ , то со временем зондируемый объем с центром на расстоянии  $R_{Ci}$  поднимается навстречу опускающимся вихрям, вследствие чего измеряемое распределение  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); 1)$  будет уже, чем  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; 1)$ . И наоборот, когда сканирование начинается с  $\varphi(0) = \varphi_{\max} = 20^\circ$  (объем зондирования опускается вслед за вихрями), распределение  $V_L(R_{Ci}, \varphi(t_m); 1)$  становится более «размытым». Из этого следует, что

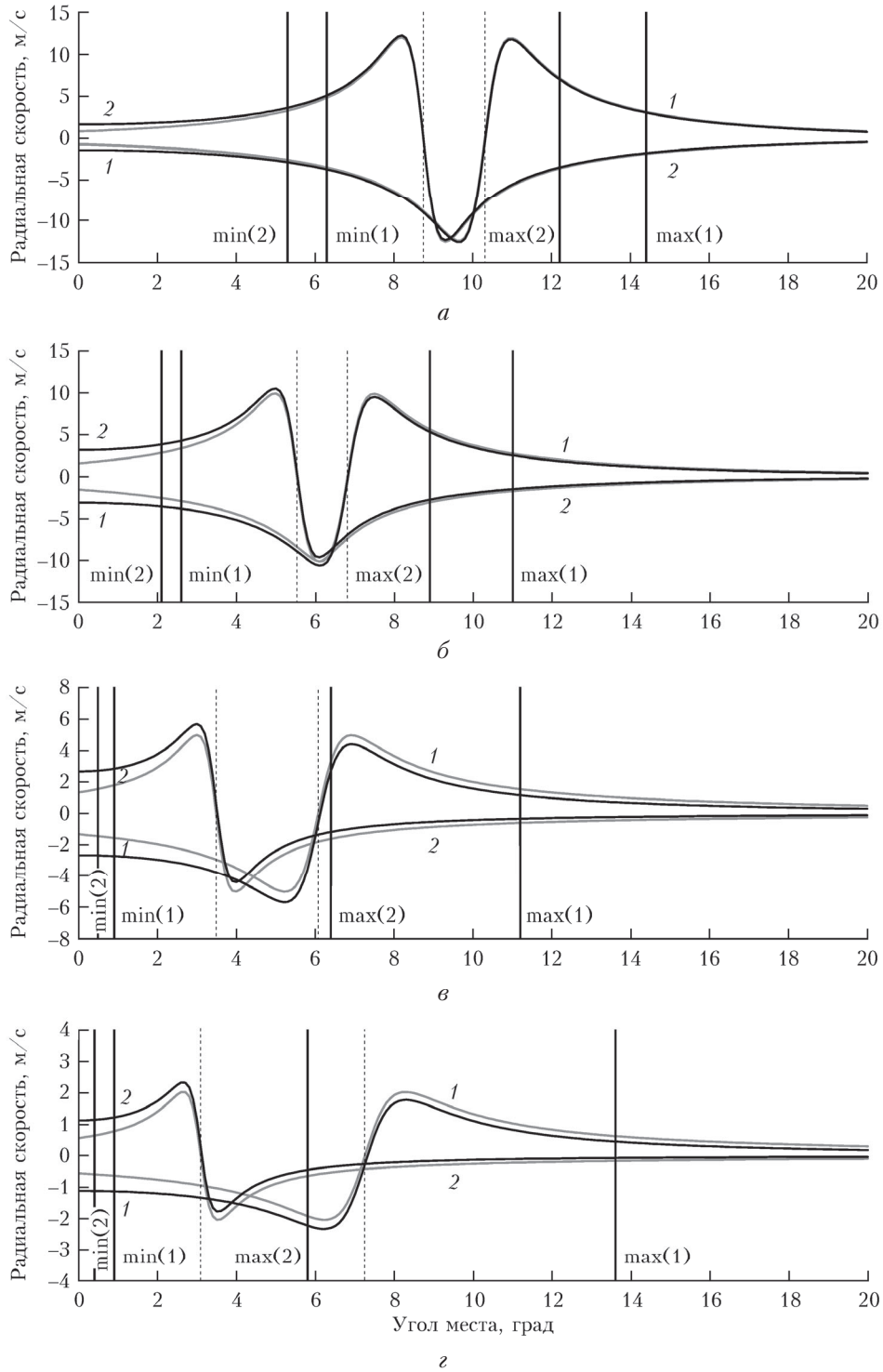


Рис. 4. Мгновенные распределения радиальных скоростей  $V_r(R_{C1}, \varphi)$  (кривые 1) и  $V_r(R_{C2}, \varphi)$  (кривые 2) как функций от угла места  $\varphi$  в моменты времени  $t = 0$  с, когда  $R_{C1} = 279,5$  м,  $R_{C2} = 328,8$  м (*a*);  $t = 20$  с, когда  $R_{C1} = 270,7$  м,  $R_{C2} = 332,7$  м (*б*);  $t = 90$  с, когда  $R_{C1} = 219,7$  м,  $R_{C2} = 382,3$  м (*в*);  $t = 180$  с, когда  $R_{C1} = 180,2$  м,  $R_{C2} = 421,8$  м (*г*), рассчитанные по формулам (17) (черные кривые) и (14) (серые кривые). Оси вихрей показаны пунктирными вертикальными линиями; минимальные и максимальные углы места, удовлетворяющие условию (7а) при  $r_{\max} = 20$  м, – сплошными вертикальными линиями, (1) соответствует левому, (2) – правому вихрям

в результате минимизации функционала (7) оценки циркуляции  $\hat{\Gamma}_i$  будут занижены, если угол места увеличивается, и завышены, если он уменьшается во время сканирования зондирующим пучком. По-

грешности оценивания циркуляции, обусловленные этим фактором, приведены ниже.

Для показанной на рис. 3 модели самолетных вихрей рассматривается временной интервал в 3 мин.



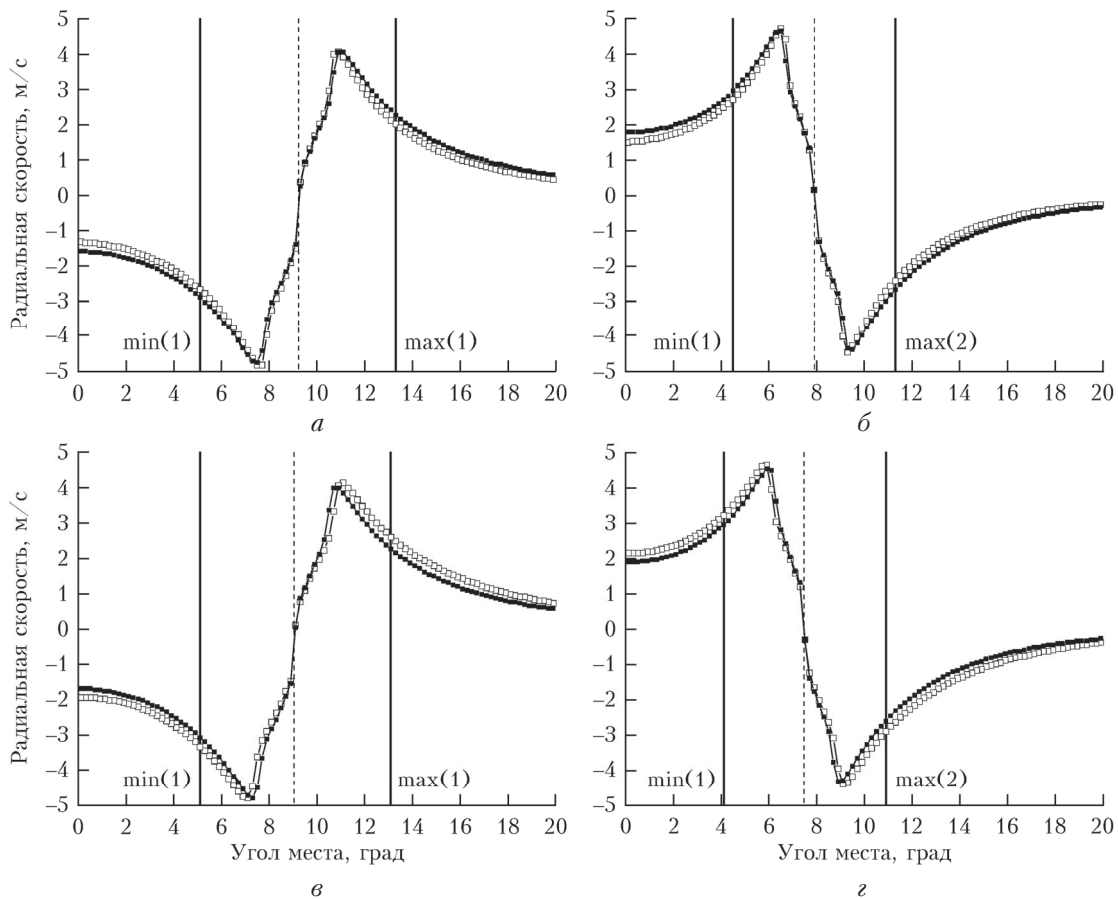


Рис. 5. Распределения радиальной скорости  $V_L(R_{C_1}, \varphi(t_m); 1)$  (а, в) и  $V_L(R_{C_2}, \varphi(t_m); 1)$  (б, г), измеряемой сканирующим лидаром, от угла места (светлые квадратики) и мгновенной радиальной скорости  $V_L(R_{C_i}, \varphi_m; 1)$  в момент времени  $t_{C_i}(1)$  (мелкие темные квадратики; индекс  $i = 1$  для левого (а, в) и  $i = 2$  для правого (б, г) вихрей) при  $\varphi(0) = 0^\circ$  (а, б) и  $\varphi(0) = \varphi_{\max} = 20^\circ$  (в, г). Параметры, задаваемые при расчете кривых, приведены в табл. 1

С учетом того, что время одного сканирования зондирующим пучком  $T_{\text{scan}} = 10$  с, в этот интервал укладывается  $N = 18$  сканирований. Для примера в табл. 2 приведены параметры самолетных вихрей во время 9-го сканирования (сравните с параметрами в табл. 1). Воспользовавшись данными табл. 1 и 2, по формуле (14) рассчитаем мгновенные распределения скорости  $V_r(R_{C_i}, \varphi)$  как функции от угла места  $\varphi$ . Вели-

чина  $V_r(R_{C_i}, \varphi)$  представляет собой радиальную скорость в точке с координатами  $\{R_{C_i}, \varphi\}$ . Если пренебречь инструментальной погрешностью, лидарная оценка радиальной скорости  $V_L(R_{C_i}, \varphi_m; n)$  представляет собой радиальную скорость, усредненную по зондируемому объему, т.е. здесь имеет место низкочастотная пространственная фильтрация, причем нелинейная, так как мы получаем оценку по положению

Таблица 1

Параметры, задаваемые при расчете кривых на рис. 5

$\varphi(0)$ , град	Параметры для левого вихря	Параметры для правого вихря
0	$R_{C_1} = 277,7$ м; $\varphi_{C_1} = 9,23^\circ$ ; $\Gamma_1 = 477,5$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_1}(1) = 4,6$ с	$R_{C_2} = 328,8$ м; $\varphi_{C_2} = 7,91^\circ$ ; $\Gamma_2 = 480,6$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_2}(1) = 3,9$ с
20	$R_{C_1} = 277,4$ м; $\varphi_{C_1} = 9,04^\circ$ ; $\Gamma_1 = 473,4$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_1}(1) = 5,5$ с	$R_{C_2} = 329,0$ м; $\varphi_{C_2} = 7,47^\circ$ ; $\Gamma_2 = 469,7$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_2}(1) = 6,3$ с

Таблица 2

Параметры вихрей во время 9-го сканирования зондирующим пучком

$\varphi(0)$ , град	Параметры для левого вихря	Параметры для правого вихря
0	$R_{C_1} = 224,3$ м; $\varphi_{C_1} = 5,98^\circ$ ; $\Gamma_1 = 218,0$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_1}(9) = 83,0$ с	$R_{C_2} = 376,8$ м; $\varphi_{C_2} = 3,56^\circ$ ; $\Gamma_2 = 220,7$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_2}(9) = 81,8$ с
20	$R_{C_1} = 221,6$ м; $\varphi_{C_1} = 6,03^\circ$ ; $\Gamma_1 = 209,5$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_1}(9) = 87,0$ с	$R_{C_2} = 381,1$ м; $\varphi_{C_2} = 3,5^\circ$ ; $\Gamma_2 = 206,9$ м <sup>2</sup> /с; $t_{C_2}(9) = 88,2$ с

максимума доплеровского спектра. Поэтому представляет интерес сравнение мгновенных распределений  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  с  $V_r(R_{Ci}, \varphi)$  в пределах интервала углов места, удовлетворяющих условию (7а).

На рис. 6 представлены мгновенные распределения  $V_r(R_{Ci}, \varphi)$  и  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  ( $n = 1$  и  $n = 9$ ) по углам места. Очевидно их существенное различие. Совпадения (пересечения кривых) имеют место только при  $\varphi = \varphi_{Ci}$ . Максимальные значения  $\max\{|V_r(R_{Ci}, \varphi)|\}$  в 2–2,5 раза больше, чем соответствующие им значения  $\max\{|V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)|\}$ . Это объясняется тем, что лидар Stream Line формирует зондируемый объем с продольным размером 30 м [8], что почти в 10 раз больше радиуса ядра вихря ( $r_C = 3,2$  м), задаваемого в расчетах. Попытка использовать в (7) модельную радиальную скорость без учета усреднения по зондируемому объему (т.е. вместо  $V_L^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  использовать радиальную скорость  $V_r(R_{Ci}, \varphi)$ , рас-

считываемую для произвольных циркуляций  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ) при минимизации функционала  $\rho(\Gamma_i)$  неизбежно приведет к сильному занижению оценок циркуляции вихря.

#### 4. Результаты численного эксперимента

Определим вначале точность оценивания траекторий осей самолетных вихрей, описываемых моделью (25)–(30) (см. рис. 3), с помощью предложенного в [7, 8] алгоритма. Несмотря на высокое угловое разрешение лидарных данных ( $\Delta\varphi = 0,2^\circ$ ) и маленький шаг по дальности ( $\Delta R = 3$  м), при получении результатов применялась сплайн-интерполяция моделируемых данных. Кроме того, для повышения точности оценивания угловой координаты оси вихря

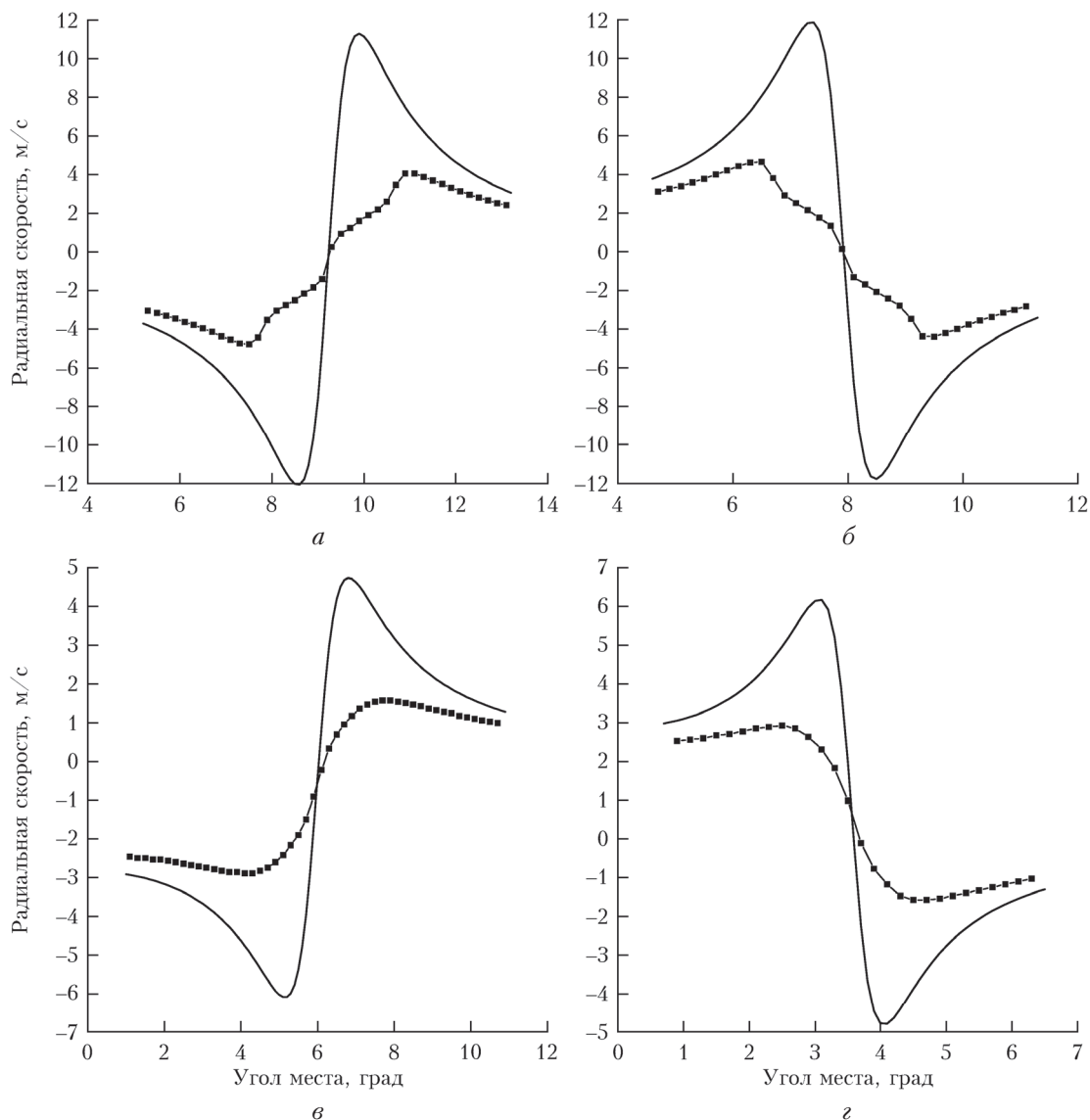


Рис. 6. Мгновенные распределения радиальных скоростей  $V_r(R_{Ci}, \varphi)$  (сплошные полужирные кривые) и  $V_L(R_{Ci}, \varphi_m; n)$  (мелкие квадратики) по углам места, удовлетворяющим условию (7а) ( $r_{\max} = 20$  м), рассчитанные при  $n = 1$  (а, б) и  $n = 9$  (в, г) с использованием параметров, приведенных в табл. 1 и 2 для случая  $\varphi(0) = 0^\circ$

$\varphi_{C_i}$  использовалось сглаживание зависимостей максимальных  $V_L^{\max}(R_k) = \max_{\varphi} \{V_L(R_k, \varphi(t_m); n)\}$  и минимальных  $V_L^{\min}(R_k) = \min_{\varphi} \{V_L(R_k, \varphi(t_m); n)\}$  значений лидарной оценки радиальной скорости от расстояния  $R_k$ .

На рис. 7 показаны лидарные оценки координат осей левого  $\hat{\mathbf{r}}_1[t_{C_1}(n)] = \{\hat{y}_1[t_{C_1}(n)], \hat{z}_1[t_{C_1}(n)]\}$  и правого  $\hat{\mathbf{r}}_2[t_{C_2}(n)] = \{\hat{y}_2[t_{C_2}(n)], \hat{z}_2[t_{C_2}(n)]\}$  самолетных вихрей. Для сравнения кривыми показаны траектории осей вихрей  $\mathbf{r}_i(t) = \{y_i(t), z_i(t)\}$ , задаваемые в численном эксперименте (такие же, как и на рис. 3, а). Получаемая из данных  $n$ -го сканирования оценка  $\hat{\mathbf{r}}_i[t_{C_i}(n)]$  имеет погрешность  $\Delta \hat{\mathbf{r}}_i(n) = \hat{\mathbf{r}}_i[t_{C_i}(n)] - \mathbf{r}_i[t_{C_i}(n)] = \{\Delta \hat{y}_i(n), \Delta \hat{z}_i(n)\}$ .

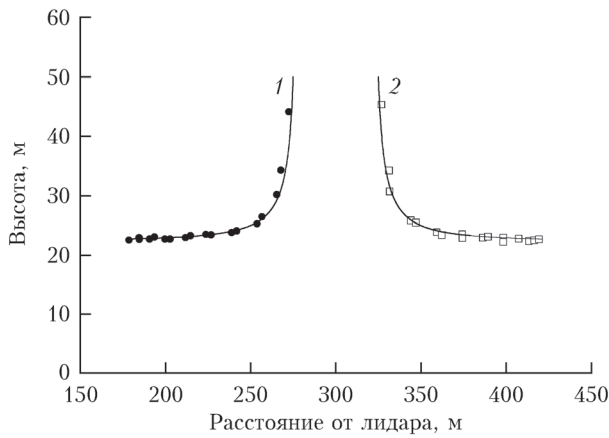


Рис. 7. Модель траектории осей левого (кривая 1) и правого (кривая 2) самолетных вихрей, используемая в численном эксперименте, и лидарные оценки координат осей вихрей (кружочки для левого и квадратики для правого вихрей)

Погрешности оценок горизонтальной  $\Delta \hat{y}_i(n)$  и вертикальной  $\Delta \hat{z}_i(n)$  координат оси  $i$ -го вихря в зависимости от номера сканирования  $n$  представлены на рис. 8. По данным этого рисунка установлено, что

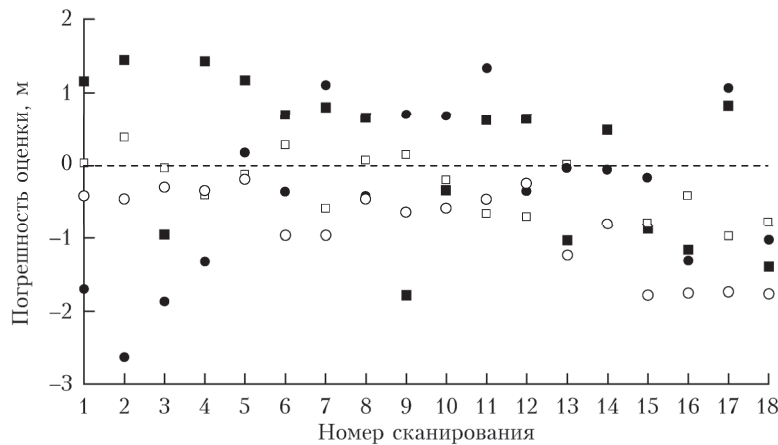


Рис. 8. Погрешности лидарных оценок горизонтальной (темные кружочки и квадратики) и вертикальной (светлые кружочки и квадратики) координат оси левого (кружочки) и правого (квадратики) вихрей в зависимости от номера сканирования зондирующим пучком

среднеквадратическая погрешность оценки координат оси вихря, рассчитываемая по формуле

$$E_{yz} = \sqrt{(4N)^{-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^N |\Delta \hat{\mathbf{r}}_i(n)|^2}, \quad (32)$$

равна 0,95 м, и это более чем в 3 раза меньше радиуса ядра вихря  $r_C = 3,2$  м. Такая погрешность оценки координат оси не должна существенно повлиять на точность определения циркуляции вихрей из лидарных измерений. Отметим, что оценки, приведенные на рис. 7, были получены при задании начального угла места  $\varphi(0) = 0^\circ$ . Численный эксперимент для  $\varphi(0) = \varphi_{\max} = 20^\circ$  показал, что погрешность  $E_{yz}$  почти такая же, как и при  $\varphi(0) = 0^\circ$ .

Если на точность оценки координаты оси вихря не влияет увеличение или уменьшение угла места  $\varphi$  во время сканирования зондирующим пучком, то, как следует из рис. 5, из-за перемещения вихрей (в основном по вертикали) распределение измеряемой лидаром радиальной скорости от угла места является искаженным (т.е.  $V_L(R_{C_i}, \varphi(t_m); n)$  отличается от мгновенного распределения  $V_L(R_{C_i}, \varphi_m)$  в момент времени  $t_{C_i}(n)$ ). При этом характер искажения зависит от того, увеличивается или уменьшается угол места во время сканирования. Поэтому, исследуя точность оценивания циркуляции вихрей, рассмотрим два случая: 1)  $\varphi(0) = 0^\circ$  и 2)  $\varphi(0) = \varphi_{\max} = 20^\circ$ . Для расчетов входящей в (7) модельной функции  $V_r^{(M)}(R_{C_i}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  используем формулу (17), учитывая влияние подстилающей поверхности на самолетные вихри.

Воспользовавшись моделью самолетных вихрей, показанной на рис. 3, и оценками координат их оси  $\hat{\mathbf{r}}_i[t_{C_i}(n)] = \{\hat{y}_i[t_{C_i}(n)], \hat{z}_i[t_{C_i}(n)]\}$  ( $R_{C_i}(n) = |\hat{y}_i[t_{C_i}(n)] + j\hat{z}_i[t_{C_i}(n)]|$  и  $\varphi_{C_i}(n) = \arg\{\hat{y}_i[t_{C_i}(n)] + j\hat{z}_i[t_{C_i}(n)]\}$ ), с помощью минимизации функционалов  $\rho(\Gamma_i)$  мы оценили циркуляции левого  $\hat{\Gamma}_1[t_{C_1}(n)]$  и правого  $\hat{\Gamma}_2[t_{C_2}(n)]$  самолетных вихрей. Затем рассчитывались зависимости погрешности

$$\Delta\Gamma_i(n) = \hat{\Gamma}_i[t_{Ci}(n)] - \Gamma[t_{Ci}(n)] \quad (33)$$

и относительной погрешности

$$\gamma_i(n) = \frac{\Delta\Gamma_i(n)}{\Gamma[t_{Ci}(n)]} \cdot 100\% \quad (34)$$

циркуляции  $i$ -го вихря от номера сканирования  $n$ , где  $\Gamma(t)$  — задаваемый в численном эксперименте временной профиль циркуляции вихря (см. (30) и рис. 3, б).

На рис. 9 приведены результаты численного эксперимента по оцениванию циркуляции вихрей с указанием точности оценок. Как и ожидалось, наибольшая по абсолютной величине погрешность  $|\Delta\Gamma_i(n)|$  (и  $|\gamma_i(n)|$ ) для начальных сканирований наблюдается, когда скорость перемещения осей вихрей по вертикали максимальна. При этом, когда результат получен из измерений при увеличении угла места, оценка циркуляции занижена, в противном случае —

завышена. Согласно данным этого рисунка относительная погрешность  $|\gamma_i(n)| \leq 6\%$ , а для  $n \geq 4$   $|\gamma_i(n)| \leq 2\%$ .

В реальном эксперименте крупные турбулентные неоднородности могут увеличить скорость перемещения оси самолетного вихря по вертикали, что приведет к еще большей погрешности оценки циркуляции. Так, в некоторых случаях из лидарных измерений в течение первого (после образования вихревого следа самолета) сканирования с увеличением угла места мы получали оценку циркуляции, значительно меньшую по величине, чем оценка из данных следующего сканирования (с уменьшением угла места), хотя лидарное отношение сигнал-шум было довольно высоким и инструментальная погрешность лидарной оценки радиальной скорости была пренебрежимо мала. По-видимому, это связано именно с быстрым опусканием оси вихря. В случае сильного бокового ветра, быстро переносящего самолетные вихри по горизонтали, также может происходить

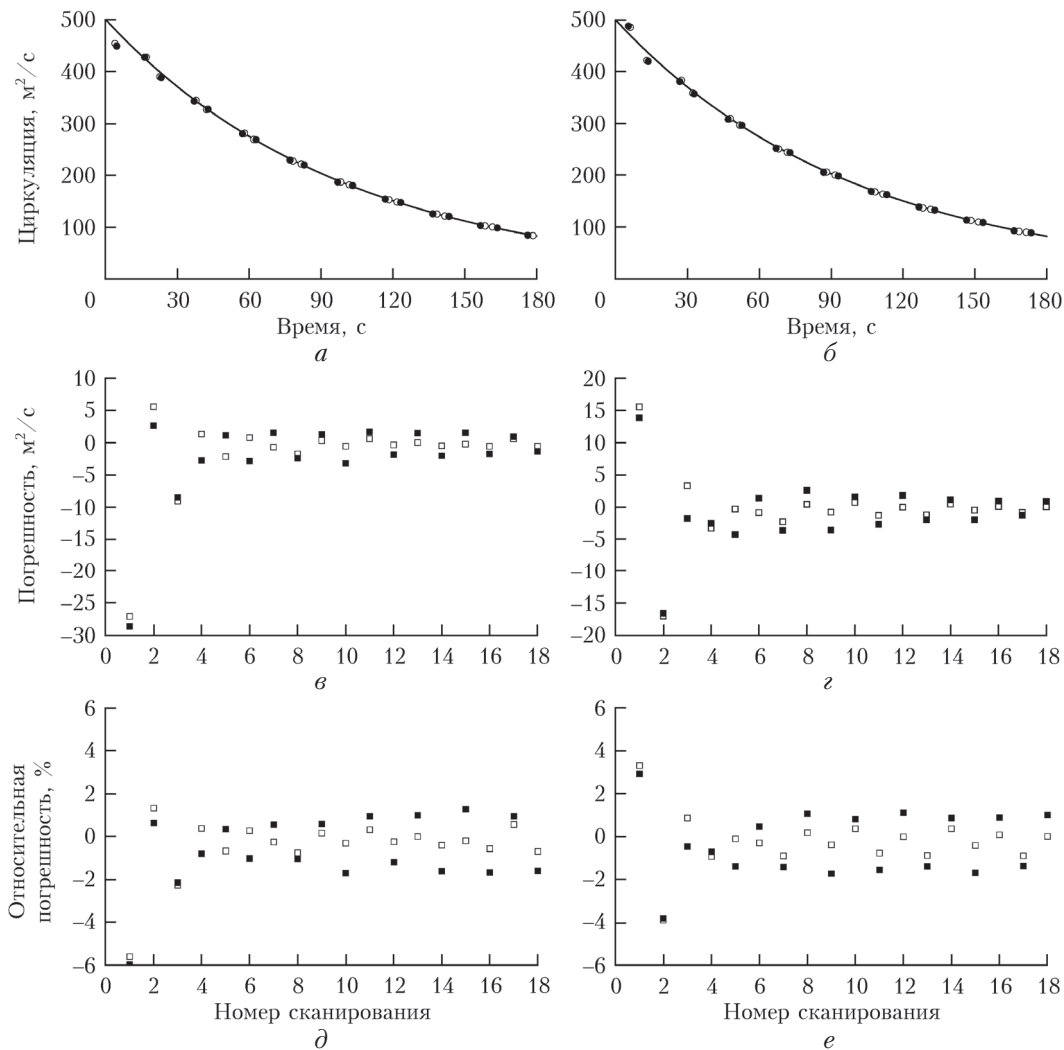


Рис. 9. Восстановленные из данных численного эксперимента временные профили циркуляции вихрей (отдельные оценки циркуляции показаны кружочками) (а, б); погрешности (в, з) и относительные погрешности оценок циркуляции (д, е) в зависимости от номера сканирования зондирующим пучком при  $\varphi(0) = 0^\circ$  (а, в, д) и  $20^\circ$  (б, з, е). Сплошной кривой показан задаваемый в численном эксперименте временной профиль циркуляции; темные и светлые значки соответствуют левому и правому вихрям. Оценки циркуляции получены с учетом влияния на вихри подстилающей поверхности (формула (17))

искажение измеряемого лидаром распределения радиальной скорости от расстояния и угла места, что скажется на точности оценивания их циркуляции.

Теоретически погрешность лидарной оценки (см. рис. 9, *в–е* для 1-го и 2-го сканирований), обусловленную относительно быстрым опусканием вихрей, можно уменьшить, если увеличить скорость сканирования зондирующим пучком, задав, например,  $\omega_s$  не 2 град/с, а 8 град/с. В этом случае, с учетом того, что  $\varphi_{\max} = 20^\circ$  и время измерения массива радиальных скоростей для одного луча  $\Delta t = 0,1$  с, лидар будет измерять массивы радиальных скоростей с недостаточно высоким угловым разрешением  $\Delta\varphi = \omega_s \Delta t = 0,8^\circ$  (например, если ось вихря находится на расстоянии  $R = 500$  м от лидара, то разрешение по вертикали  $\Delta z = R \Delta\varphi \approx 7$  м ( $\Delta\varphi$  в радианах), что превышает радиус ядра вихря  $r_c$  примерно в 2 раза для самолета Боинг-747 и в 4 раза для А320).

Результаты, представленные на рис. 9, были получены с использованием модели вихрей, описываемой (17), где учитывается влияние подстилающей поверхности на самолетные вихри. В [7, 8, 15] для получения оценок циркуляции мы использовали модель в виде (14) в предположении, что учет такого влияния незначительно скажется на точности оценивания циркуляции. С целью установления, насколько это предположение верно, был проведен численный эксперимент, в котором для расчетов входящей в (7) функции  $V_r^{(M)}(R_{Ci}, \varphi_m | \Gamma_1, \Gamma_2)$  (с помощью приведенных в [8] формул (10) и (12)) была использована модель для  $V_r(R, \varphi)$  в виде формулы (14).

На рис. 10 представлены результаты численного эксперимента по оцениванию циркуляции вихрей (с использованием модели радиальной скорости в виде (14)) с указанием точности оценок. Видно, что, в отличие от предыдущего численного эксперимента

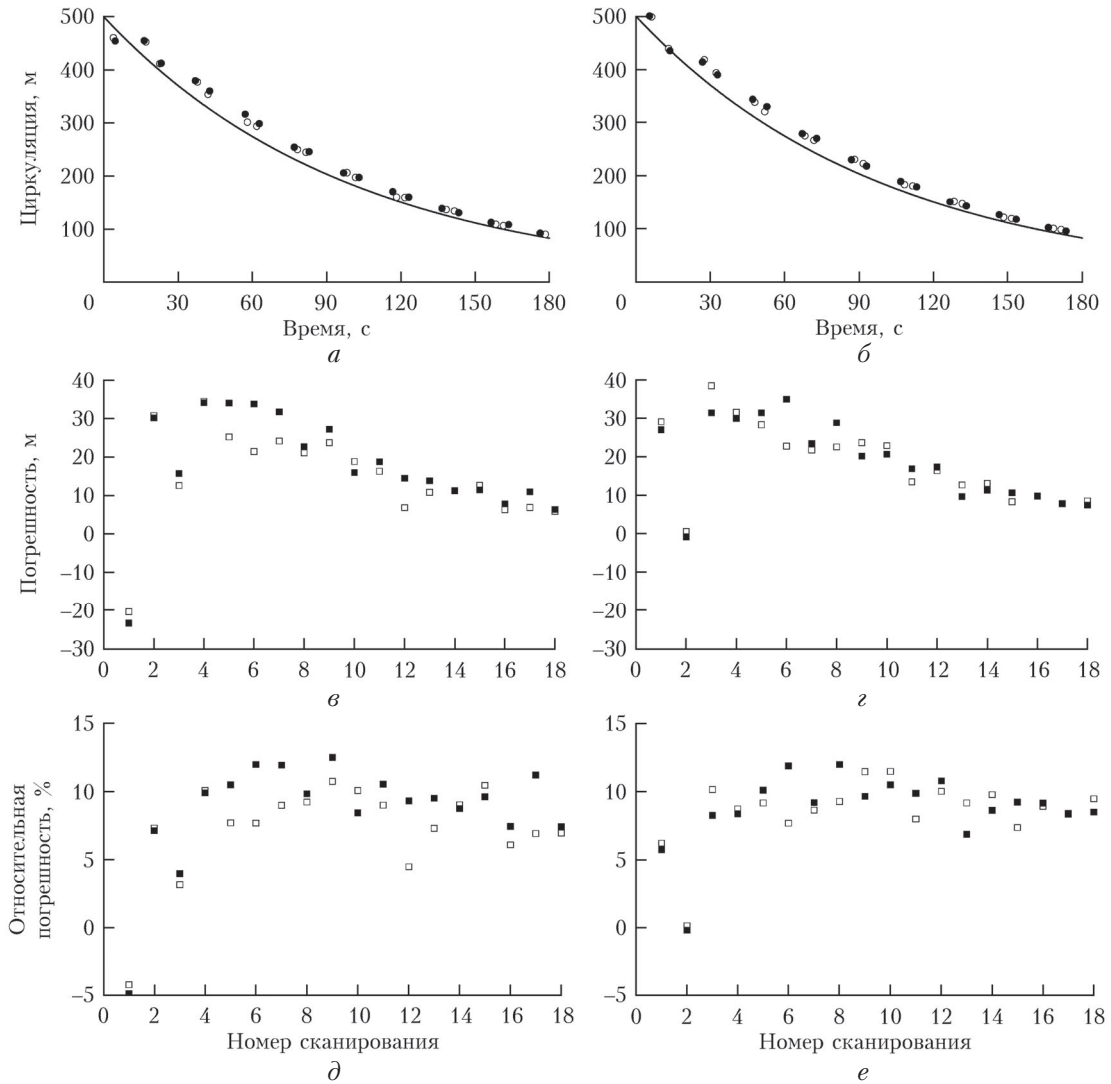


Рис. 10. Восстановленные из данных численного эксперимента временные профили циркуляции вихрей (отдельные оценки циркуляции показаны кружочками) (*а, б*); погрешности (*в, г*) и относительные погрешности оценок циркуляции (*д, е*) в зависимости от номера сканирования зондирующим пучком при  $\varphi(0) = 0^\circ$  (*а, в, д*) и  $20^\circ$  (*б, г, е*). Сплошной кривой показан задаваемый в численном эксперименте временной профиль циркуляции; темные и светлые значки соответствуют левому и правому вихрям. Оценки циркуляции получены без учета влияния на вихри подстилающей поверхности (формула (14))

(рис. 9), начиная с 3-го сканирования, когда оси вихрей опустились примерно до 30 м (рис. 7), все оценки циркуляции превышают истинные значения в среднем на 8–10%. Этого и следовало ожидать, исходя из данных рис. 4. Таким образом, учет влияния подстилающей поверхности на самолетные вихри при получении оценок циркуляции важен в случае опускания вихрей до высот  $\sim b_0/2$ .

Описанный выше алгоритм оценивания циркуляции вихрей с использованием модели (17), учитывающей влияния на вихри подстилающей поверхности, был применен нами для обработки данных лидарного эксперимента, проведенного на летном поле аэропорта Толмачево в 2018 г. [16].

### Заключение

В настоящей работе усовершенствован метод определения циркуляции самолетных вихрей из измерений ИКДЛ Stream Line путем инкорпорации в алгоритм обработки данных лидарных измерений модели вихря, учитывающей влияние подстилающей поверхности Земли. В численном эксперименте показано, что без учета такого влияния оценка циркуляции может быть завышена более чем на 10%.

В численном эксперименте, имитирующем реальные лидарные измерения самолетных вихрей, установлено, что из-за относительно быстрого опускания вихрей в начальный период времени после их формирования лидарные оценки могут быть как завышены, так и занижены, в зависимости от того, увеличивается или уменьшается угол места во время сканирования зондирующим пучком. Для уменьшения погрешности следует (с учетом технических возможностей лидара Stream Line и отношения сигнал/шум) проводить измерения при угловой скорости сканирования, превышающей 2 град/с.

1. Бабкин В.И., Белоцерковский А.С., Турчак Л.И., Баранов Н.А., Замятин А.И., Каневский М.И., Морозов В.В., Пасекунов И.В., Чижов Н.Ю. Системы обеспечения вихревой безопасности полетов летательных аппаратов. М.: Наука, 2008. 373 с.
2. Hannon S.M., Thomson J.A. Aircraft wake vortex detection and measurement with pulsed solid-state coherent laser radar // J. Mod. Opt. 1994. V. 41, N 11. P. 2175–2196.
3. Köpp F., Rahm S., Smalikho I. Characterization of aircraft wake vortices by 2- $\mu$ m pulsed Doppler lidar // J. Atmos. Ocean. Technol. 2004. V. 21, N 2. P. 194–206.
4. Frehlich R.G., Sharman R. Maximum likelihood estimates of vortex parameters from simulated coherent Doppler lidar data // J. Atmos. Ocean. Technol. 2005. V. 22, N 2. P. 117–129.
5. Rahm S., Smalikho I. Aircraft wake vortex measurement with airborne coherent Doppler lidar // J. Aircr. 2008. V. 45, N 4. P. 1148–1155.

6. Wassaf H.S., Burnham D.C., Wang F.Y. Wake vortex tangential velocity adaptive spectral (TVAS) algorithm for pulsed lidar systems // Proc. of the 16<sup>th</sup> Bi-annual Coherent Laser Radar Conf. Session 9 – Wind Measurement Systems II. 20–24 June 2011, California. 4 p.
7. Smalikho I.N., Banakh V.A. Estimation of aircraft wake vortex parameters from data measured with 1.5 micron coherent Doppler lidar // Opt. Lett. 2015. V. 40, N 14. P. 3408–3411.
8. Smalikho I.N., Banakh V.A., Holzäpfel F., Rahm S. Method of radial velocities for the estimation of aircraft wake vortex parameters from data measured by coherent Doppler lidar // Opt. Express. 2015. V. 23, N 19. P. A1194–A1207.
9. Yoshikawa E., Matayoshi N. Aircraft wake vortex retrieval method on lidar lateral range-height indicator observation // AIAA J. 2017. V. 55, N 7. P. 2269–2278.
10. Gao H., Li J., Chan P.W., Hon K.K., Wang X. Parameter-retrieval of dry-air wake vortices with a scanning Doppler lidar // Opt. Express. 2018. V. 26, N 13. P. 16377–16392.
11. Wu S., Zhai X., Liu B. Aircraft wake vortex and turbulence measurement under near-ground effect using coherent Doppler lidar // Opt. Express. 2019. V. 27, N 2. P. 1142–1163.
12. Gerz T., Holzäpfel F., Darracq D. Commercial aircraft wake vortices // Prog. Aerosp. Sci. 2002. V. 38. P. 181–208.
13. Robin R.E., Delisi D.P., Greene G.C. Algorithm for prediction of trailing vortex evolution // J. Aircr. 2001. V. 38, N 5. P. 911–917.
14. Pierson G., Davies F., Collier C. An analysis of performance of the UFAM Pulsed Doppler lidar for the observing the boundary layer // J. Atmos. Ocean. Technol. 2009. V. 26, N 2. P. 240–250.
15. Смалихо И.Н., Банах В.А., Фалиц А.В. Измерения параметров вихревых следов самолетов когерентным доплеровским лидаром Stream Line // Оптика атмосф. и океана. 2017. Т. 30, № 8. С. 664–671; Smalikho I.N., Banakh V.A., Falits A.V. Measurements of aircraft wake vortex parameters by a Stream Line Doppler lidar // Atmos. Ocean. Opt. 2017. V. 30, N 6. P. 588–595.
16. Смалихо И.Н., Банах В.А., Фалиц А.В., Сухарев А.А. Эксперимент с целью изучения вихревых следов самолетов, проведенный на летном поле аэропорта Толмачево в 2018 году // Оптика атмосф. и океана. 2019 (представлена для печати).
17. Банах В.А., Смалихо И.Н. Когерентные доплеровские ветровые лидары в турбулентной атмосфере. Томск: Изд-во ИОА СО РАН, 2013. 304 с.
18. Lamb H. Hydrodynamics. New York: Dover, 1932. 592 p.
19. Burnham D.C., Hallock J.N. Chicago monostatic acoustic vortex sensing system // U.S. Department of Transportation. DOT-TSC-FAA-79-103. 1982. 206 p.
20. Schwarz C.W., Hahn K.U., Fischenberg D. Wake encounter severity assessment based on validated aerodynamic interaction models // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf., 2–5 August 2010, Toronto, Ontario, Canada. URL: [http://www.wakenet.eu/fileadmin/user\\_upload/News%26Publications/AIAA-237438-765.pdf](http://www.wakenet.eu/fileadmin/user_upload/News%26Publications/AIAA-237438-765.pdf).

#### **I.N. Smalikho. Taking into account of the ground effect on aircraft wake vortices when evaluating their circulation from lidar measurements.**

The previously developed algorithm for estimating the circulation of aircraft wake vortices from measurements by a Stream Line pulsed coherent Doppler lidar has been improved by using the model of a pair of aircraft vortices in the algorithm that takes into account the ground effect on the spatial dynamics and evolution of the vortices. In a numerical experiment, it was shown that an improved algorithm allows obtaining a result with high accuracy, while the approach used earlier overestimates the lidar assessment of vortex circulation by about 10%.