О СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

С. И. Мешков

(Москва)

Слабосингулярные функции, используемые в качестве ядер интегральных уравнений Больцмана — Вольтерра при решении статических задач наследственной теории упругости [1], стали широко применяться и при решении динамических задач [2]. Только изучению поведения одномерного осциллятора посвящена целая серия работ [3-5]. В данной работе исследуются неизвестные ранее особенности стационарного режима одномерного осциллятора, наследственные свойства которого описываются функциями, обладающими интегрируемой особенностью абелевского типа.

1. В силу известной связи между ядрами релаксации $R(t)$ и последействия $K(t)$ уравнение движения наследственно-упругого осциллятора можно записать в эквивалентных формах

$$x^{\cdot\cdot} + \omega_\infty^2 x - (\omega_\infty^2 - \omega_0^2)\int_0^\infty R(t')\,x(t-t')\,dt' = p\sin\omega t \tag{1.1}$$

$$x^{\cdot\cdot} + \omega_\infty^2 x + \nu_\sigma \int_0^\infty K(t')\,x^{\cdot\cdot}(t-t')\,dt' = p\left[\sin\omega t + \nu_\sigma\int_0^\infty K(t')\sin\omega(t-t')\,dt'\right] \tag{1.2}$$

$$\nu_\sigma = (E_\infty - E_0)\,E_0^{-1},$$

Здесь x — координата, точка над буквой означает производную по времени, p — отнесенная к единице массы амплитуда внешней моногармонической силы, действующей с частотой ω, а релаксированное E_0 и нерелаксированное E_∞ значения упругого модуля определяют соответствующие собственные частоты упругих колебаний ω_0 и ω_∞.

Для стационарного решения

$$x = X\sin(\omega t - \varphi_1) \tag{1.3}$$

уравнения (1.1) и (1.2) записываются в форме упруго-вязкой аналогии

$$(\omega_0^2 A - \omega^2)x + \omega_0^2\omega^{-1}Bx^{\cdot} = p\sin\omega t \tag{1.4}$$

$$(\omega_\infty^2 - \omega^2 C)x + \omega D x^{\cdot} = P\sin(\omega t - \varphi_2)$$

$$P \equiv p\,(C^2 + D^2)^{1/2},\quad \operatorname{tg}\varphi_2 = DC^{-1} \tag{1.5}$$

Амплитуда X и фаза φ_1 определяются выражениями

$$a = Xp^{-1} = [(\omega_0^2 A - \omega^2)^2 + \omega_0^4 B^2]^{-1/2} = Pp^{-1}[(\omega_\infty^2 - \omega^2 C)^2 + \omega^4 D^2]^{-1/2} \tag{1.6}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = B\,[A - (\omega/\omega_0)^2]^{-1} = D\,[C - (P\omega/p\omega_\infty)^2]^{-1} \tag{1.7}$$

Здесь введены обозначения

$$A \equiv 1 + \nu_\sigma\left(1 - \int_0^\infty R(t)\cos\omega t\,dt\right),\qquad B \equiv \nu_\sigma\int_0^\infty R(t)\sin\omega t\,dt \tag{1.8}$$

$$C \equiv 1 + \nu_\sigma\int_0^\infty K(t)\cos\omega t\,dt,\qquad D \equiv \nu_\sigma\int_0^\infty K(t)\sin\omega t\,dt$$

Нетрудно определить и величину, обратную добротности системы Q^{-1}, обычно принимаемую за меру внутреннего трения

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W} \tag{1.9}$$

Здесь ΔW — энергия, рассеиваемая в течение одного цикла, а W — максимальное значение энергии в данном цикле.

Согласно уравнению (1.4) ΔW вычисляется по формуле

$$\Delta W = p\int_0^{2\pi/\omega} x^{\cdot}\sin\omega t\,dt = \pi p X\sin\varphi_1 \tag{1.10}$$

или определяется как площадь петли гистерезиса

$$\Delta W = \pi X^2 \omega_0^2 B = \pi X^2 \omega_\infty^2 D\,(C^2 + D^2)^{-1} \tag{1.11}$$

В эквивалентности формул (1.10) и (1.11) легко убедиться после подстановки в них значений X и φ_1 из (1.6) и (1.7). Максимальное значение энергии определяется выражением

$$W = {}^1\!/_2 X^2 \omega_0^2 A = {}^1\!/_2 X^2 \omega_\infty^2 C\,(C^2 + D^2)^{-1} \tag{1.12}$$

В результате для внутреннего трения получается формула

$$Q^{-1} = BA^{-1} = DC^{-1} = \operatorname{tg}\varphi_2 \tag{1.13}$$

Следует заметить, что в квазистатическом случае, т. е. когда инерционными свойствами системы можно пренебречь, тангенс угла сдвига фаз (1.7) переходит в тангенс угла механических потерь, который тождественно совпадает с Q^{-1}(1.13).

Более подробные сведения, касающиеся расчета колебаний упруго-наследственных систем, содержатся в книге [6].

2. В качестве первого примера рассмотрим простейшее слабосингулярное ядро Абеля, которое выберем в качестве ядра последействия

$$K(t) = t^{\gamma-1} / \tau_\sigma^{\gamma}\Gamma(\gamma) \qquad (0 < \gamma \leqslant 1) \tag{2.1}$$

Здесь τ_σ — время ретардации. Аналогичное ядро, только без гамма-функции $\Gamma(\gamma)$, использовал Дюффинг [7] для обработки статических кривых ползучести ремней и других материалов. Решение динамической задачи непосредственно с ядром Дюффинга приводит лишь к появлению гамма-функции в окончательных формулах, а зависимость от частоты ω и времени ретардации τ_σ (релаксации τ_ε) останется той же самой.

Резольвента ядра (2.1) — ядро релаксации — определяется дробно-экспоненциальной функцией Ю. Н. Работнова [8]

$$R(t) = \tau_\varepsilon^{-\gamma}\partial_\gamma(-\nu, \tau, t), \qquad \partial_\gamma \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\nu}{\tau^\gamma}\right)^n \frac{t^{\gamma(n+1)-1}}{\Gamma[\gamma(n+1)]}, \qquad \frac{E_0}{E_\infty} = \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}\right)^\gamma \tag{2.2}$$

Нетрудно вычислить синус и косинус трансформанты Фурье функций (2.1) и (2.2), а затем и величины

$$A = \frac{(1+\nu_\sigma)(\varkappa^\gamma\nu^{-1} + \cos\psi)}{\varkappa^\gamma\nu^{-1} + \varkappa^{-\gamma}\nu + 2\cos\psi}, \qquad B = \frac{(1+\nu_\sigma)\sin\psi}{\varkappa^\gamma\nu^{-1} + \varkappa^{-\gamma}\nu + 2\cos\psi} \tag{2.3}$$

$$C = 1 + \nu\varkappa^{-\gamma}\cos\psi, \qquad D = \nu\varkappa^{-\gamma}\sin\psi, \qquad \varkappa \equiv \omega\tau, \qquad \psi = {}^1\!/_2\pi\gamma \tag{2.4}$$

Подставляя эти значения в формулы (1.6) и (1.7), найдем соответственно амплитуду, тангенс угла сдвига фаз и внутреннее трение

$$a = \left(\frac{\varkappa^\gamma\nu^{-1} + \varkappa^{-\gamma}\nu + 2\cos\psi}{\Omega_\infty^2\varkappa^\gamma\nu^{-1} + \omega^4\nu\varkappa^{-\gamma} - 2\omega^2\Omega_\infty}\right)^{1/2}, \qquad \Omega_\infty \equiv \omega_\infty^2 - \omega^2 \tag{2.5}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = [\Omega_\infty(\cos\psi + \varkappa^\gamma\nu^{-1}) - \omega^2(\cos\psi + \varkappa^{-\gamma}\nu)]^{-1}\,\omega_\infty^2\sin\psi \tag{2.6}$$

$$Q^{-1} = \operatorname{tg}\varphi_2 = (\cos\psi + \varkappa^\gamma\nu^{-1})^{-1}\sin\psi \tag{2.7}$$

В формулах (2.2) — (2.7) и в дальнейшем, где величины τ и ν стоят без индексов, принято $\tau = \tau_\sigma$ при $\nu = \nu_\sigma$ и $\tau = \tau_\varepsilon$ при $\nu = \nu_\varepsilon = \Delta E / E_\infty$.

При $\gamma = 1$ использование ядер (2.1) и (2.2) в интегральных соотношениях Больцмана — Вольтерра приводит с точностью до константы ν_ε ($\nu_\varepsilon = 1$, если $E_0 = 0$) к реологической модели Максвелла. В этом случае динамические формулы (2.5) — (2.7) соответствуют модели Максвелла, для которой при частоте $\omega = \omega_* = \omega_\infty / \sqrt{2}$ все резонансные амплитуды независимо от τ пересекаются в одной точке, достигая в ней значения $a_*^{(0)} = 2\omega_\infty^{-2}$ [9]. Для ядер (2.1) и (2.2) при частоте $\omega = \omega_*$ пересекаются и имеют значения $2\omega_\infty^{-2}$ только резонансные амплитуды, соответствующие $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. При произвольных τ в точке $\omega = \omega_*$ формулы (2.5), (2.6) имеют вид

$$a_* = a_*^{(0)}\left(\frac{\varkappa_*^\gamma\nu^{-1} + \varkappa_*^{-\gamma}\nu + 2\cos\psi}{\varkappa_*^\gamma\nu^{-1} + \varkappa_*^{-\gamma}\nu - 2\cos\psi}\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{1*} = 2(\varkappa_*^\gamma\nu^{-1} - \varkappa_*^{-\gamma}\nu)\sin\psi \tag{2.9}$$

Исследуем поведение амплитуды a_*, так как формула (2.8) может быть использована для нахождения релаксационных характеристик по экспериментальным данным. При фиксированных значениях γ и $\xi = E_0 / E_\infty$ зависимость a_* от времени релаксации τ_ε представляет собой симметричный пик, который при условии $\varkappa_*^\gamma = \nu$ достигает максимума

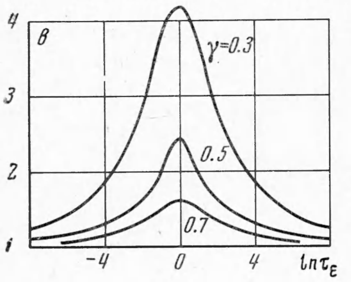
$$a_{*m} = a_*^{(0)} \operatorname{ctg} {}^1/_2 \psi \tag{2.10}$$

При больших и малых значениях τ поведение амплитуды a_* соответственно определяется асимптотическими формулами

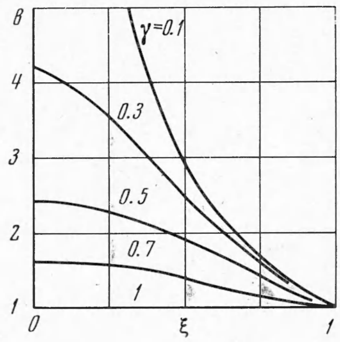
$$\tau \gg 1, \qquad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\nu\varkappa_*^{-\gamma} \cos\psi) \tag{2.11}$$

$$\tau \ll 1, \qquad a^* \approx a_*^{(0)} (1 + 2\nu^{-1}\varkappa_*^{\gamma} \cos\psi) \tag{2.12}$$

На фиг. 1 приведена зависимость величины $b \equiv a_* - a_*^{(0)}$ от $\ln \tau_\varepsilon$ при $\nu_\varepsilon = 1$, $(\xi = 0)$, $\omega_\infty = \sqrt{2}$. Цифрами у кривых отмечены значения параметра γ.



Фиг. 1



Фиг. 2

Зависимость амплитуды a_* от параметра дробности γ при фиксированных значениях τ, ξ сначала проследим, используя формулу (2.10) для максимального значения a_{*m}. Тогда нетрудно установить, что a_{*m} монотонно возрастает от значения $a_*^{(0)}$ при $\gamma = 1$ до бесконечности при $\gamma \to 0$. Справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\gamma \to 1, \quad a_{*m} \approx a_*^{(0)} [1 + {}^1/_2 \pi (1 - \gamma)], \qquad \gamma \to 0, \quad a_{*m} \approx 8 (\pi\omega_\infty^2 \gamma)^{-1} \tag{2.13}$$

Если $\varkappa_*^\gamma \neq \nu$, то поведение a_* при $\gamma \to 1$ и $\gamma \to 0$ соответственно определяется выражениями

$$\gamma \to 1, \qquad a_* \approx a_*^{(0)} [1 + \pi (1 - \gamma) \nu\varkappa_* (\nu^2 + \varkappa_*^2)^{-1}] \tag{2.14}$$

$$\gamma \to 0, \qquad a_* \approx a_*^{(0)} (1 + \nu)^2 (1 - \nu)^{-2} [1 + 2\gamma (\nu - \nu^{-1})^{-1} \ln \varkappa_*] \tag{2.15}$$

Амплитуда a_* как функция степени релаксации ξ, когда τ и γ играют роль параметров, определена в области $\xi \in [0, 1]$ и при том же условии $\varkappa_*^\gamma = \nu$ (или в переменных τ_ε, ξ, это равносильно $\xi = 1 - \varkappa_{*\varepsilon}^\gamma$) достигает максимального значения, определяемого выражением (2.10). Отсюда видно, что при изменении ξ положение пика на оси $\ln \tau_\varepsilon$ меняется, и он проявится не при любых значениях параметров τ_ε и γ, а только для тех, которые удовлетворяют условию $\varkappa_{*\varepsilon}^\gamma < 1$. Асимптотическое поведение амплитуды a_* при $\xi \to 0$ и $\xi \to 1$ определяется соответственно выражениями:

$$\xi \to 0, \qquad a_* \approx h [1 + 2\xi (\varkappa_{*\varepsilon}^{2\gamma} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-2\gamma} - 2\cos 2\psi)^{-1} (\varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} - \varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma}) \cos\psi] \tag{2.16}$$

$$h \equiv a_*^{(0)} (\varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} + 2\cos\psi)^{1/2} (\varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} - 2\cos\psi)^{-1/2}$$

$$\xi \to 1, \qquad a_* \approx a_*^0 [1 + 2\varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} (1 - \xi) \cos\psi] \tag{2.17}$$

На фиг. 2 приведена зависимость величины b от ξ при $\tau_\varepsilon = 1$, $\omega_\infty = \sqrt{2}$ для различных γ, значения которых указаны цифрами у кривых. Следует заметить, что при $\xi = 1$ все кривые для a_* сходятся в одну точку $a_* = a_*^{(0)}$ в силу специфики ядра (2.1), описывающего неограниченный процесс ползучести.

3. В качестве второго примера рассмотрим специальный случай $Э_\gamma$-функции Ю. Н. Работнова при $\nu = 1$. Тогда ядра релаксации и последействия запишутся в симметричном виде

$$R(t) = \tau_\varepsilon^{-\gamma} Э_\gamma(-1, \tau_\varepsilon, t), \qquad K(t) = \tau_\sigma^{-\gamma} Э_\gamma(-1, \tau_\sigma, t) \tag{3.1}$$

В этом случае

$$A = \frac{\xi^{-1}\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + (1+\xi^{-1})\cos\psi}{\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2\cos\psi}, \qquad B = \frac{\nu_\sigma \sin\psi}{\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2\cos\psi} \tag{3.2}$$

$$C = \frac{\varkappa_\sigma^{\gamma} + \xi^{-1}\varkappa_\sigma^{-\gamma} + (1+\xi^{-1})\cos\psi}{\varkappa_\sigma^{\gamma} + \varkappa_\sigma^{-\gamma} + 2\cos\psi}, \qquad D = \frac{\nu_\sigma \sin\psi}{\varkappa_\sigma^{\gamma} + \varkappa_\sigma^{-\gamma} + 2\cos\psi} \tag{3.3}$$

Согласно (1.6), (1.7) и (1.16) для амплитуды, сдвига фаз и внутреннего трения получим

$$a = \left(\frac{\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2\cos\psi}{\Omega_\infty^2\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \Omega_0^2\varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + 2\Omega_\infty\Omega_0\cos\psi}\right)^{1/2}, \qquad \Omega_0 \equiv \omega_0^2 - \omega^2 \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = [\Omega_\infty\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \Omega_0\varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + (\Omega_0+\Omega_\infty)\cos\psi]^{-1}(\Omega_\infty - \Omega_0)\sin\psi \tag{3.5}$$

$$Q^{-1} = \operatorname{tg}\varphi_2 = [\varkappa_\varepsilon^{\gamma} + \xi\varkappa_\varepsilon^{-\gamma} + (1+\xi)\cos\psi]^{-1}\nu_\varepsilon \sin\psi \tag{3.6}$$

При $\gamma = 1$ все соотношения (3.1) — (3.6) соответствуют модели стандартного линейного тела, для которого при частоте

$$\omega_*^2 = {}^1/_2(\omega_\infty^2 + \omega_0^2) \tag{3.7}$$

резонансная амплитуда a_* не зависит от времени релаксации τ_ε, т. е. все амплитуды независимо от τ_ε пересекаются в одной точке [10]. При $\gamma \neq 1$ в этой точке $\omega = \omega_*$ пересекаются только две резонансные амплитуды, соответствующие $\tau_\varepsilon = 0$ и $\tau_\varepsilon = \infty$. Для произвольных τ_ε при $\omega = \omega_*$ амплитуда a_* и фаза φ_{1*} определяются формулами

$$a_* = a_*^{(0)}\left(\frac{\varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} + 2\cos\psi}{\varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma} - 2\cos\psi}\right)^{1/2}; \qquad a_*^{(0)} = \frac{2}{\omega_\infty^2 - \omega_0^2} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{1*} = 2(\varkappa_{*\varepsilon}^{\gamma} - \varkappa_{*\varepsilon}^{-\gamma})\sin\psi \tag{3.9}$$

Следует заметить, что формула (3.9) справедлива только когда $\omega_\infty \neq \omega_0$. При $\omega_\infty = \omega_0$, т. е. при отсутствии дефекта модуля, из формулы (3.5) сразу следует $\varphi_1 = 0$, что соответствует упругому решению.

Исследования, аналогичные ядру Абеля — Дюффинга, приводят к следующим результатам.

Функция $a_* = f(\tau_\varepsilon)$ (γ, ξ — параметры) образует симметричный пик, который при условии $\varkappa_{*\varepsilon} = 1$ достигает максимальное значение, равное

$$a_{*m} = a_*^{(0)} \operatorname{ctg}{}^1/_2\psi \tag{3.10}$$

При больших и малых значениях τ_ε амплитуда a_* стремится к значению $a_*^{(0)}$, что хорошо видно, из следующих асимптотических оценок:

$$\tau_\varepsilon \gg 1, \qquad a_* \approx a_*^{(0)}(1 + 2\varkappa_\varepsilon^{-\gamma}\cos\psi) \tag{3.11}$$

$$\tau_\varepsilon \ll 1, \qquad a_* \approx a_*^{(0)}(1 + 2\varkappa_\varepsilon^{\gamma}\cos\psi) \tag{3.12}$$

При соответствующем значении γ график функции $a_* = f(\ln\tau_\varepsilon)$ аналогичен приведенному на фиг. 1, а для $\xi = 0$ в точности с ним совпадает.

При фиксированных значениях τ_ε и ξ амплитуда a_* с уменьшением γ монотонно возрастает от величины $a_*^{(0)}$ при $\gamma = 1$ до бесконечности при $\gamma \to 0$. Например, при условии $\varkappa_{*\varepsilon} = 1$, это легко видно из формулы (3.10), а при других значениях $\varkappa_{*\varepsilon}$ асимптотика a_* определяется формулами

$$\gamma \to 1, \qquad a_* \approx a_*^{(0)}[1 + \pi(1-\gamma)(\varkappa_{*\varepsilon} + \varkappa_{*\varepsilon}^{-1})^{-1}] \tag{3.13}$$

$$\gamma \to 0, \qquad a_* \approx 2a_*^{(0)}\gamma^{-1}[{}^1/_4\pi^2 + (\ln\varkappa_*)^2]^{-1/2} \tag{3.14}$$

Наконец, при изменении степени релаксации ξ амплитуда a_* меняется, монотонно возрастая от постоянного значения при $\xi = 0$ до бесконечности при $\xi \to 1$.

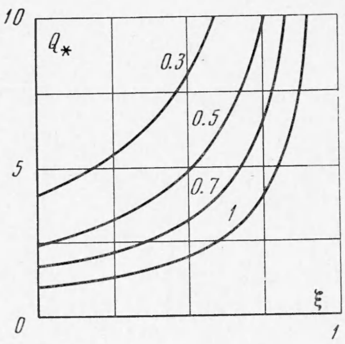
Последнее нетрудно понять, так как при $\omega_\infty^2 = \omega_0^2$ получается упругое решение, и амплитуда в резонансе, естественно, равна бесконечности. При $\xi \to 0$ справедлива асимптотическая формула

$$a_* \approx a_\infty \{1 + \gamma\xi [1 + (\varkappa_\infty^{2\gamma} + \varkappa_\infty^{-2\gamma} - 2\cos 2\psi)^{-1} (\varkappa_\infty^{-\gamma} - \varkappa_\infty^{\gamma}) \cos\psi]\} \tag{3.15}$$

$$a_\infty \equiv (\varkappa_\infty^{\gamma} + \varkappa_\infty^{-\gamma} + 2\cos\psi)^{1/2} (\varkappa_\infty^{\gamma} + \varkappa_\infty^{-\gamma} - 2\cos\psi)^{-1/2}, \quad \varkappa_\infty \equiv \omega_\infty \tau_\varepsilon / \sqrt{2}$$

На фиг. 3 приведена зависимость a_* от степени релаксации ξ для различных γ, значениями которых помечены кривые, ($\tau_\varepsilon = 1$, $\omega_\infty = \sqrt{2}$). Принципиальное отличие от кривых, изображенных на фиг. 2, состоит в том, что все амплитуды a_* при $\xi \to 1$ стремятся к бесконечности, так как они соответствуют упругому резонансу.

4. Полученные результаты допускают возможность использования их для экспериментальных приложений. Во-первых, следует заметить, что рассмотренные выше ядра релаксации и последействия эквивалентны вполне определенным функциям распределения времен релаксаций (ретардаций). Например, для ядра последействия Абеля — Дюффинга соответствующую функцию распределения наиболее просто получить, если воспользоваться определением гамма-функции через интеграл Эйлера и сделать в нем замену переменных. В результате можно записать соотношение



Фиг. 3

$$t^{\gamma-1}\Gamma(1-\gamma) = \int_0^\infty \tau^{\gamma-2} e^{-t/\tau}\, d\tau \tag{4.1}$$

из которого следует, что функции распределения времен ретардаций, эквивалентные ядрам Абеля и Дюффинга, соответственно имеют вид

$$f_A(\tau) = (\pi\tau_\sigma^{\gamma})^{-1} \tau^{\gamma-1} \sin\pi\gamma$$

$$f_D(\tau) = [\tau_\sigma^{\gamma}\Gamma(1-\gamma)]^{-1} \tau^{\gamma-1} \tag{4.2}$$

Функцию распределения времен релаксаций для ядра Ю. Н. Работнова (2.2) можно получить, если воспользоваться интегральным представлением ϑ_γ-функции по формуле Меллина

$$\tau_\varepsilon^{-\gamma}\vartheta_\gamma(-\nu_\varepsilon, \tau_\varepsilon, t) = \frac{1}{2\pi i\nu_\varepsilon} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)\, dp}{1 + \nu_\varepsilon^{-1}(p\tau_\varepsilon)^{\gamma}} \tag{4.3}$$

Тогда, вычисляя контурный интеграл (4.3) методами теории функций комплексной переменной, придем к соотношению

$$\tau_\varepsilon^{-\gamma}\vartheta_\gamma(-\nu_\varepsilon, \tau_\varepsilon, t) = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi\nu_\varepsilon} \int_0^\infty \frac{\tau^{-2}\exp(-t/\tau)\, d\tau}{\nu_\varepsilon(\tau/\tau_\varepsilon)^{\gamma} + \nu_\varepsilon^{-1}(\tau/\tau_\varepsilon)^{-\gamma} + 2\cos\pi\gamma} \tag{4.4}$$

из которого видно, что функция распределения времен релаксаций определяется выражением

$$f_R(\tau) = \frac{\sin\pi\gamma}{\pi\nu_\varepsilon\tau} \left[\nu_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right)^{\gamma} + \nu_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\tau}{\tau_\varepsilon}\right)^{-\gamma} + 2\cos\pi\gamma\right]^{-1} \tag{4.5}$$

При $\nu_\varepsilon = 1$ получается функция распределения, соответствующая ядру (3.1).

Из формул (4.2) и (4.5) следует, что параметр γ, определяющий слабую сингулярность наследственных функций, характеризует «размытие» релаксационно-ретардационных спектров. Поэтому экспериментальное определение γ представляет несомненный интерес. На примере осциллятора это наиболее просто сделать, если исследовать температурную зависимость амплитуды a_* при частоте $\omega = \omega_*$, учитывая, что время релаксации τ_ε зависит от температуры T по формуле Аррениуса

$$\tau_\varepsilon = \tau_{\varepsilon 0} \exp(-H / kT) \tag{4.6}$$

Здесь H — энергия активации релаксационного процесса, k — константа Больцмана, $\tau_{\varepsilon 0}$ — частотный фактор.