

УДК 519.6

## Построение областей абсолютной устойчивости методом Бернулли\*

И.В. Киреев<sup>1,2</sup>, А.Е. Новиков<sup>2</sup>, Е.А. Новиков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук, Академгородок, 50/44, Красноярск, 660036

<sup>2</sup>Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, просп. Свободный, 79, Красноярск, 660041

E-mails: kiv@icm.krasn.ru (Киреев И.В.), aenovikov@bk.ru (Новиков А.Е.), novikov@icm.krasn.ru (Новиков Е.А.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

**Киреев И.В., Новиков А.Е., Новиков Е.А.** Построение областей абсолютной устойчивости методом Бернулли // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 417–428.

В статье предложен новый алгоритм построения областей абсолютной устойчивости многошаговых численных схем, основанный на алгоритме Бернулли вычисления наибольшего по модулю корня полинома с комплексными коэффициентами и методе Данделена–Лобачевского–Греффе. Приведены результаты численных экспериментов, построены области абсолютной устойчивости методов Адамса–Башфорта 3–11 порядков.

DOI: 10.15372/SJNM20220407

**Ключевые слова:** метод Адамса–Башфорта, годограф, область устойчивости, метод Бернулли, метод Данделена–Лобачевского–Греффе.

**Kireev I.V., Novikov A.E., Novikov E.A.** Stability domains of explicit multistep methods // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 417–428.

A new algorithm is proposed for obtaining stability domains of multistep numerical schemes. The algorithm is based on Bernoulli’s algorithm for computing the greatest in magnitude root of a polynomial with complex coefficients and the Dandelin–Lobachevsky–Graeffe method for squaring the roots. Numerical results on the construction of stability domains of Adams–Bashforth methods of order 3–11 are given.

**Keywords:** Adams–Bashforth method, locus, stability domain, Bernoulli method, Dandelin–Lobachevsky–Graeffe method.

---

### 1. Введение

Во многих приложениях возникает задача Коши для явной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1]:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра в рамках мероприятий Минобрнауки РФ по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение № 075-02-2022-873).

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}$  — достаточно гладкие вещественные  $N$ -мерные вектор-функции, а  $t$  — независимая переменная,  $t_0 \leq t \leq t_k$ . Хотя в этой статье рассматривается автономная задача, все полученные далее результаты остаются справедливыми и для неавтономного случая.

Одношаговые методы обладают, как правило, хорошими свойствами точности и устойчивости [1, 2], но обычно являются более трудоемкими по сравнению с многошаговыми. Если требуется осуществлять расчеты с высокой точностью, как например в задачах небесной механики [3], то в ряде случаев для интегрирования (1) целесообразно привлекать многошаговые алгоритмы. В частности, таковыми являются методы Адамса  $k$ -го порядка: значения  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$  заданы; для  $n \geq k$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \mathbf{x}_{n-j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-j}), \quad \mathbf{x}_{n-j} = \mathbf{x}(t_n - jh), \quad (2)$$

где  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  — числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2),  $h$  — шаг интегрирования,  $h > 0$ ; при  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \dots = \alpha_k = 0, \beta_0 = 0$  имеем общеизвестные методы Адамса–Башфорта [4].

Как показывают результаты расчетов общеизвестных тестовых задач, глобальная ошибка решения (1) достаточно быстро увеличивается, если осуществлять расчеты с постоянным шагом. Поэтому следует менять размер шага интегрирования в процессе расчетов. Однако для гибкого управления величиной шага необходимо иметь процедуру оценки погрешности аппроксимации и знать область устойчивости разностной схемы (2).

Несмотря на то, что задача (1) в общем случае является нелинейной, устойчивость методов ее решения, как правило, исследуется на линейном тестовом уравнении Далквиста [1, 5]:

$$x' = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

здесь через  $\mathbb{C}$  обозначено поле комплексных чисел. Применяя (2) для решения этого модельного уравнения, приходим к уравнению

$$x_n + c_{k-1}x_{n-1} + \dots + c_1x_{n-k+1} + c_0x_{n-k} = 0 \quad (3)$$

с коэффициентами  $c_l(\omega)$ , зависящими от комплексного параметра

$$\omega = h\lambda \in \mathbb{C}; \quad (4)$$

в случае (2) имеем

$$c_l(\omega) = \frac{\alpha_{k-l} - \omega\beta_{k-l}}{\alpha_0 - \omega\beta_0}, \quad l = \overline{0, k}, \quad \Leftrightarrow \quad x_n = - \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j - \omega\beta_j}{\alpha_0 - \omega\beta_0} x_{n-j}. \quad (5)$$

Уравнению (3) соответствует характеристический алгебраический полином степени  $k$  следующего вида [6]:

$$p_k(z) = z^k + c_{k-1}z^{k-1} + \dots + c_1z + c_0.$$

Используя соотношение (5), возможно построить годограф (локус) схемы (2), который дает некоторое, вообще говоря, избыточное представление о свойствах устойчивости рассматриваемой схемы. Поэтому необходимо найти область абсолютной устойчивости.

**Определение** [1]. Областью абсолютной устойчивости схемы (3) называется множество  $\mathfrak{D}$  комплексных чисел  $\omega \in \mathbb{C}$ , в каждой точке которого корни характеристического многочлена по модулю не превосходят 1.

Далее, отдавая должное автору работы [5] и для краткости, множество  $\mathfrak{D}$  будем называть областью Далквиста.

Таким образом, для нахождения области устойчивости (2) необходимо как-нибудь вычислить или, по крайней мере, оценить максимальное по модулю собственное число характеристического многочлена. Из теории многошаговых методов [7] следует, что  $0 \in \mathfrak{D}$ : при  $\omega = 0$  максимальный по модулю корень многочлена  $p_k(z)$  равен 1. Естественный подход построения области  $\mathfrak{D}$  связан с методом Бернулли нахождения наибольшего по модулю корня многочлена с комплексными коэффициентами [8, 9].

Следуя [8, Chapter 4.10, Chapter 5], рассмотрим полином  $k$ -й степени от комплексного аргумента  $z$ :

$$p_k(z) = z^k + c_{k-1}z^{k-1} + \dots + c_1z + c_0 = \prod_{1 \leq j \leq k} (z - \zeta_j), \quad z, c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

корни которого  $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in \mathbb{C}$  отличны от нуля и упорядочены по убыванию их модулей:

$$|\zeta_1| > |\zeta_2| \geq \dots \geq |\zeta_k|,$$

что является необходимым требованием для того, чтобы метод Бернулли сходил к максимальному по модулю корню.

Для простоты считаем, что многочлен  $p_k(z)$  не имеет кратных корней (при наличии кратных корней применимы, например, методы классической алгебры многочленов [10]). Пусть заданы комплексные числа  $z_0, \dots, z_{k-1}$ ; для  $n \geq k$  полагаем

$$z_n = -c_{k-1}z_{n-1} - c_{k-2}z_{n-2} - \dots - c_1z_{n-k+1} - c_0z_{n-k}. \quad (7)$$

Тогда, согласно методу Бернулли [9, Chapter 10], величина  $\xi_n = z_n/z_{n-1}$  является очередным приближением к корню  $\zeta_1$ . Очевидна аналогия последовательности  $\{z_n\}$  из процесса (7) с решением разностного уравнения (3), и она сохраняется при реальных вычислениях. Заметим, что модификации метода Бернулли [11] отличаются выбором начальных данных  $z_0, \dots, z_{k-1}$  для процесса (7).

В работе уточнены оценки скорости сходимости для двух известных модификаций метода Бернулли и предложена новая версия алгоритма Бернулли. На основе этих методов создана программа расчета областей Далквиста явных линейных многошаговых схем решения задачи Коши для явных систем ОДУ.

## 2. Уточнение параметров сходимости метода Бернулли

Известно [9], что погрешность аппроксимации корня  $\zeta_1$  величиной  $\xi_n$  для (7) стремится к нулю, как правило, со скоростью геометрической прогрессии. В качестве меры отличия числа  $z$  от корня  $\zeta_1$  выбираем модуль относительной погрешности

$$\delta(z) = \frac{z - \zeta_1}{\zeta_1}, \quad (8)$$

поскольку при конкретных вычислениях относительная погрешность результата связана с разрядностью мантииссы плавающей формы вещественного числа более сильно, нежели абсолютная погрешность. Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.**  $\delta(z)$  удовлетворяет соотношению  $\zeta_1 = z[1 + \delta(z)]^{-1}$  и является корнем полинома  $k$ -й степени относительно переменной  $\delta$ :

$$\begin{aligned}
(1 + \delta)^k p_k \left( \frac{z}{1 + \delta} \right) &= z^k + c_{k-1} z^{k-1} (1 + \delta) + \dots + c_1 z (1 + \delta)^{k-1} + c_0 (1 + \delta)^k \\
&= c_0 \delta^k + (k c_0 + c_1 z) \delta^{k-1} + \dots + \\
&\quad \{k(k-1)p_k(z) - [k + z(k-2)]p'_k(z) + z^2 p''_k(z)\} \delta^2 + \\
&\quad [k p_k(z) - z p'_k(z)] \delta + p_k(z).
\end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает следующее асимптотическое представление:

$$\delta(z) \underset{\delta(z) \rightarrow 0}{=} \frac{p_k(z)}{z p'_k(z) - k p_k(z)} + O(\delta^2(z)). \quad (9)$$

Для уточнения оценки скорости сходимости итерационного процесса Бернулли важно иметь точное решение соответствующего разностного уравнения (7), как например в версии алгоритма из [12, Chapter III.4.6]. Дальнейшие построения базируются на следующем утверждении.

**Лемма 2.** Пусть полином (6) не имеет кратных корней. Тогда решение разностного уравнения (7) при начальных условиях  $z_0 = \dots = z_{k-2} = 0$ ,  $z_{k-1} = 1$  имеет вид  $z_n = \alpha_1 \zeta_1^n + \dots + \alpha_k \zeta_k^n$ ,  $n \geq k$ , где

$$\alpha_l = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq l} (\zeta_l - \zeta_j)^{-1} = \frac{1}{p'_k(\zeta_l)} \in \mathbb{C}, \quad l = \overline{1, k}. \quad (10)$$

Если же  $\xi \in \mathbb{C}$  и  $z_0 = 1$ ,  $z_1 = \xi$ ,  $\dots$ ,  $z_{k-1} = \xi^{k-1}$ , то числа

$$\alpha_l = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq l} \frac{\xi - \zeta_j}{\zeta_l - \zeta_j} = \frac{p_k(\xi)}{(\xi - \zeta_l) p'_k(\zeta_l)} \in \mathbb{C}, \quad l = \overline{1, k}, \quad (11)$$

задают новый класс решений (7).

**Доказательство.** Представление произвольного решения уравнения (7) в форме  $z_n = \alpha_1 \zeta_1^n + \dots + \alpha_k \zeta_k^n$  следует из общей теории разностных соотношений [6]. Поэтому числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  должны удовлетворять системе из  $k$  линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \dots + \alpha_k &= z_0, \\
\alpha_1 \zeta_1 + \dots + \alpha_k \zeta_k &= z_1, \\
\dots & \\
\alpha_1 \zeta_1^{k-1} + \dots + \alpha_k \zeta_k^{k-1} &= z_{k-1},
\end{aligned} \quad (12)$$

определитель матрицы которой является определителем Вандермонда [10] от корней  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  многочлена  $p_k(z)$ :

$$W(\zeta_1, \dots, \zeta_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_1^{k-1} & \zeta_2^{k-1} & \dots & \zeta_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < l \leq k} (\zeta_l - \zeta_j).$$

Теперь решение системы (12) может быть получено на основании теоремы Крамера [10]. В частности, при  $z_0 = \dots = z_{k-2} = 0, z_{k-1} = 1$  для каждого  $l = \overline{1, k}$  получаем

$$\alpha_l = (-1)^{k+l} \frac{W(\zeta_1, \dots, \zeta_{l-1}, \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_k)}{W(\zeta_1, \dots, \zeta_k)} = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq l} (\zeta_l - \zeta_j)^{-1} = \frac{1}{p'_k(\zeta_l)}.$$

Если же  $z_0 = 1, z_1 = \xi, \dots, z_{k-1} = \xi^{k-1}$ , то для любого  $l = \overline{1, k}$  справедливо:

$$\alpha_l = \frac{W(\zeta_1, \dots, \zeta_{l-1}, \xi, \zeta_{l+1}, \dots, \zeta_k)}{W(\zeta_1, \dots, \zeta_k)} = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq l} \frac{\xi - \zeta_j}{\zeta_l - \zeta_j} = \frac{p_k(\xi)}{(\xi - \zeta_l) p'_k(\zeta_l)}.$$

Утверждение доказано. □

Перейдем к рассмотрению конкретных версий метода Бернулли. Описание следующего алгоритма можно найти в [9], а приведенное далее утверждение уточняет параметры его сходимости.

**Теорема 1.** Пусть  $|\zeta_1| > |\zeta_2| > |\zeta_3| \geq \dots \geq |\zeta_k| > 0, z_0 = \dots = z_{k-2} = 0, z_{k-1} = 1$ . Тогда последовательность  $\xi_n = z_n/z_{n-1}$  для (7) сходится к  $\zeta_1$  и

$$\delta(\xi_n) = C_n \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = -\delta(\zeta_2) \frac{p'_k(\zeta_1)}{p'_k(\zeta_2)},$$

где  $C_n$  — ограниченная при  $n \rightarrow \infty$  последовательность комплексных чисел.

**Доказательство.** При данных начальных условиях и отсутствии кратных корней у полинома (6) решение разностного уравнения (7), в силу соотношений (10), имеет вид

$$z_n = \alpha_1 \zeta_1^n + \dots + \alpha_k \zeta_k^n, \quad \alpha_l = [p'_k(\zeta_l)]^{-1} \in \mathbb{C}, \quad l = \overline{1, k}.$$

Поэтому

$$\delta(\xi_n) = \frac{\xi_n - \zeta_1}{\zeta_1} = \frac{z_n - \zeta_1 z_{n-1}}{\zeta_1 z_{n-1}} = C_n \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1},$$

где

$$C_n = \frac{\alpha_2 \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1} + \frac{\alpha_3}{\zeta_1} (\zeta_3 - \zeta_1) \left( \frac{\zeta_3}{\zeta_2} \right)^{n-1} + \dots + \frac{\alpha_k}{\zeta_1} (\zeta_k - \zeta_1) \left( \frac{\zeta_k}{\zeta_2} \right)^{n-1}}{\alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1} + \alpha_3 \left( \frac{\zeta_3}{\zeta_2} \right)^{n-1} \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1} + \dots + \alpha_k \left( \frac{\zeta_k}{\zeta_2} \right)^{n-1} \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_2 \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1}}{\alpha_1} = \delta(\zeta_2) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\delta(\zeta_2) \frac{p'_k(\zeta_1)}{p'_k(\zeta_2)}$$

есть ограниченная при  $n \rightarrow \infty$  комплексная величина. □

При построении областей устойчивости и решении ряда прикладных задач требуется найти наибольший по модулю корень уравнения (6), для которого уже известно хорошее приближение  $\xi$ . Только что доказанное утверждение не учитывает этот факт, но справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $|\zeta_1| > |\zeta_2| > |\zeta_3| \geq \dots \geq |\zeta_k| > 0, z_0 = 1, z_1 = \xi, \dots, z_{k-1} = \xi^{k-1}$ . Тогда последовательность  $\xi_n = z_n/z_{n-1}$  для (7) сходится к  $\zeta_1$  и

$$\delta(\xi_n) = C_n \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{\delta(\zeta_2) \delta(\xi) p'_k(\zeta_1)}{\delta(\zeta_2) - \delta(\xi) p'_k(\zeta_2)}, \quad (13)$$

где  $C_n$  — ограниченная при  $n \rightarrow \infty$  последовательность комплексных чисел.

**Доказательство.** Решение разностного уравнения (7) при данных начальных условиях и отсутствии кратных корней у полинома (6), в силу соотношений (11) леммы 1, имеет вид

$$z_n = \alpha_1 \zeta_1^n + \dots + \alpha_k \zeta_k^n, \quad \alpha_l = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq l} \frac{\xi - \zeta_j}{\zeta_l - \zeta_j} \in \mathbb{C}, \quad l = \overline{1, k}.$$

Поэтому для  $n \geq k$  справедливо представление

$$\delta(\xi_n) = \frac{\xi_n - \zeta_1}{\zeta_1} = \frac{z_n - \zeta_1 z_{n-1}}{\zeta_1 z_{n-1}} = C_n \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\alpha_2 \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_1} + \alpha_3 \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{\zeta_1} \left( \frac{\zeta_3}{\zeta_2} \right)^{n-1} + \dots + \alpha_k \frac{\zeta_k - \zeta_1}{\zeta_1} \left( \frac{\zeta_k}{\zeta_2} \right)^{n-1}}{\alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1} + \alpha_3 \left( \frac{\zeta_3}{\zeta_2} \right)^{n-1} \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1} + \dots + \alpha_k \left( \frac{\zeta_k}{\zeta_2} \right)^{n-1} \left( \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right)^{n-1}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\delta(\zeta_2) \frac{\delta(\xi)}{\delta(\zeta_2) + \delta(\xi)} \prod_{2 \leq j \leq k} \frac{\zeta_1 - \zeta_j}{\zeta_2 - \zeta_j} \\ &= \frac{\delta(\xi) \delta(\zeta_2) p'_k(\zeta_1)}{\delta(\zeta_2) - \delta(\xi) p'_k(\zeta_2)} \end{aligned}$$

есть ограниченная при  $n \rightarrow \infty$  комплексная величина.  $\square$

Рассмотренную версию метода Бернулли, в силу специального выбора начальных данных  $z_j = \xi^j$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ , для уравнения (7), для краткости будем называть степенной.

В случае  $n = k$  приведенное выше представление (13) относительной погрешности  $\delta(\xi_n)$  может быть уточнено, так как  $z_{k-1} = \alpha_1 \zeta_1^{k-1} + \dots + \alpha_k \zeta_k^{k-1} = \xi^{k-1}$ , и тогда

$$\xi_k = \frac{z_k}{z_{k-1}} = \frac{\xi^k - p_k(\xi)}{\xi^{k-1}} = \frac{1}{\xi^{k-1}} \left[ \xi^k - \prod_{1 \leq j \leq k} (\xi - \zeta_j) \right]. \quad (14)$$

Поэтому, согласно лемме 2, имеем

$$\begin{aligned} \delta(\xi_k) &= \frac{\xi^k - p_k(\xi)}{\zeta_1 \xi^{k-1}} - 1 \\ &\stackrel{\delta(\xi) \rightarrow 0}{=} \delta(\xi) \left\{ 1 - \prod_{2 \leq j \leq k} \left( 1 - \frac{\zeta_j}{\zeta_1} \right) \left[ 1 + \delta(\xi) \sum_{2 \leq l \leq k} \frac{\zeta_l}{\zeta_1} \left( 1 - \frac{\zeta_l}{\zeta_1} \right)^{-1} + O(\delta^2(\xi)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Теперь, переобозначив в (14)  $\xi$  на  $\xi_{n-1}$ , а  $\xi_k$  на  $\xi_n$ , приходим к итерационному процессу и необходимому условию сходимости степенной версии алгоритма Бернулли.

**Теорема 3.** Пусть  $\xi_0 = \xi$  задано, и для любого натурального  $n$  полагаем

$$\xi_n = \frac{\xi_{n-1}^k - p_k(\xi_{n-1})}{\xi_{n-1}^{k-1}} = \xi_{n-1} - c_{k-1} - c_{k-2} \frac{1}{\xi_{n-1}} - \dots - c_1 \left( \frac{1}{\xi_{n-1}} \right)^2 - c_0 \left( \frac{1}{\xi_{n-1}} \right)^{k-1}. \quad (15)$$

Тогда асимптотически при  $\delta(\xi_{n-1}) \rightarrow 0$

$$\delta(\xi_n) \underset{\varepsilon(\xi_{n-1}) \rightarrow 0}{=} \delta(\xi_{n-1}) \left\{ 1 - \prod_{2 \leq j \leq k} \left( 1 - \frac{\zeta_j}{\zeta_1} \right) - \delta(\xi_{n-1}) \prod_{2 \leq j \leq k} \left( 1 - \frac{\zeta_j}{\zeta_1} \right) \times \right. \\ \left. \sum_{2 \leq l \leq k} \frac{\zeta_l}{\zeta_1} \left( 1 - \frac{\zeta_l}{\zeta_1} \right)^{-1} + O(\delta^2(\xi_{n-1})) \right\},$$

и выполнение неравенства

$$\left| 1 - \prod_{2 \leq j \leq k} \frac{\zeta_1 - \zeta_j}{\zeta_1} \right| < 1 \quad (16)$$

является необходимым условием сходимости последовательности  $\{\xi_n\}$  к  $\zeta_1$ .

Заметим, что (16) выполняется в случае, когда все корни многочлена  $p_k(z)$  лежат на одном луче, выходящем из начала отчета на комплексной плоскости. Более того, если сдвинуть аргумент многочлена (6) на число  $-c$ , т. е. вместо многочлена  $p_k(z)$  рассмотреть многочлен

$$p_{k,c}(z) = p_k(z - c) = \prod_{1 \leq j \leq k} [z - (\zeta_j + c)], \quad (17)$$

то при надлежащем выборе числа  $c$  неравенство (16) можно выполнить. Оптимальный выбор параметра сдвига  $c$  в данной статье не обсуждается.

### 3. Численная реализация метода Бернулли

Алгоритмы из теорем 1–3 были реализованы на языке C++ с использованием библиотеки GCC libquadmath и класса complex в различных режимах точности double, long double и \_float128. Признаком окончания каждого из этих итерационных процессов было выполнение неравенства  $|\delta(\xi_n)| \leq \delta_\xi$ , где  $\delta_\xi$  наперед заданная величина предельной относительной погрешности (8) вычисления максимального по модулю корня  $\zeta_1$ ; асимптотическое равенство (9) приводит к следующей форме критерия остановки итераций:

$$|p_k(\xi_n)| \leq \delta_\xi |\xi_n p'_k(\xi_n) - k p_k(\xi_n)|.$$

При необходимости подключался контроль малости величины  $|p_k(\xi_n)|$ . Основываясь на этих соображениях, была создана программа для вычисления областей устойчивости  $\mathfrak{D}$  методов Адамса.

Область Далквиста строилась в интерактивном режиме как сеточное множество точек комплексной плоскости с одинаковыми шагами по действительной и мнимой осям. Если в процессе счета для данного значения  $\omega$  (4) сходимость метода Бернулли не фиксировалась (контроль по числу итераций алгоритма), то к многочлену  $p_k(z)$  (6) применялось преобразование (17) и процесс Бернулли начинался заново для полинома  $p_{k,c}(z)$ ;

параметр сдвига  $s$  выбирался как результат линейной экстраполяции  $\zeta_1(\omega)$  по ранее вычисленным значениям.

В качестве тестовой рассматривалась задача построения областей  $\mathfrak{D}$  для явных методов Адамса–Башфорта 3–11 порядков точности. Точные границы соответствующих множеств Далквиста изображены на рисунке 1 и построены с помощью граничных годографов [7] этих схем. В силу симметрии  $\mathfrak{D}$  относительно оси абсцисс на всех рисунках изображена только “верхняя” часть множества.

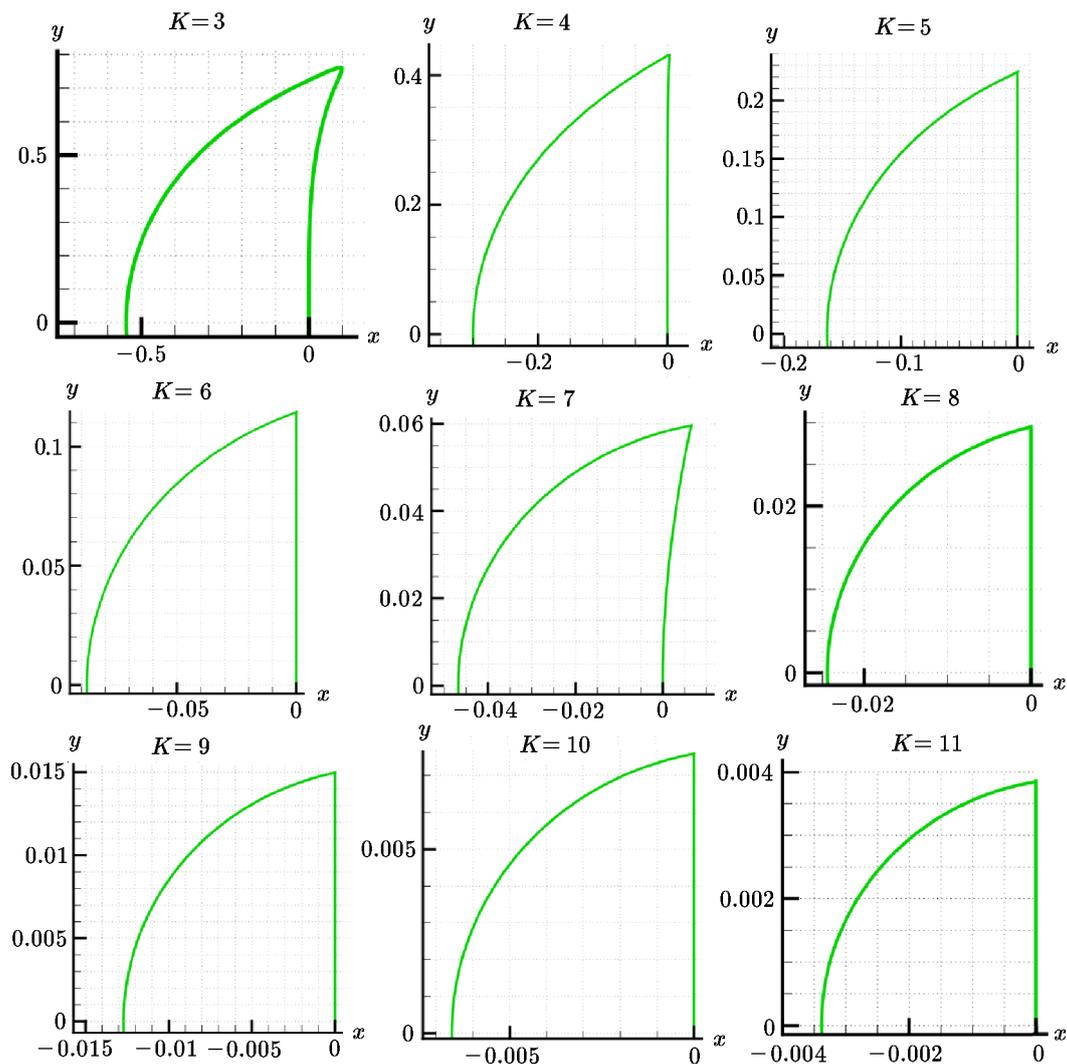
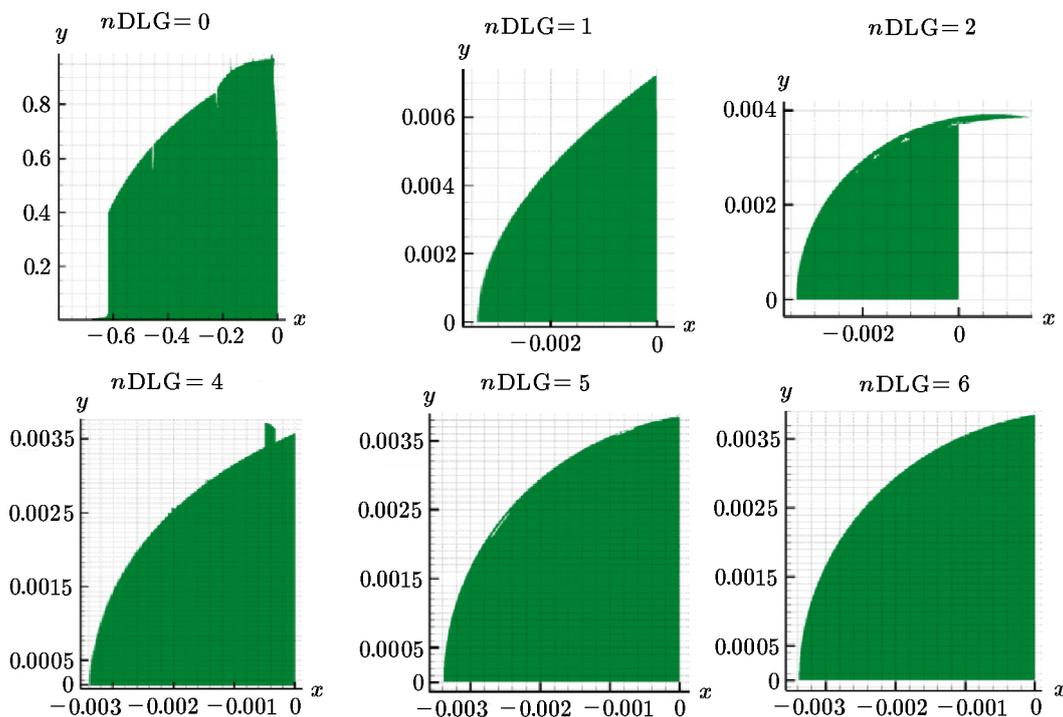


Рис. 1. Граничные годографы областей  $\mathfrak{D}$  для различных  $K$ ;  $\omega = x + iy$ ,  $y \geq 0$

Неожиданным результатом вычислений оказалось значительное увеличение полученной области Далквиста по сравнению с точной. Для этого достаточно сравнить область, ограниченную годографом, на рис. 1 для порядка точности  $K = 11$  с первой областью на рис. 2. Это явление наблюдалось во всех рассмотренных случаях, **линейные параметры вычисленных  $\mathfrak{D}$  на порядки превышали теоретические**. Изменение режима точности вычислений и параметров итерационного алгоритма не привело к улучшению ситуации. Естественно предположить, что указанный факт является следствием свойств исследуемых многошаговых методов и алгоритма Бернулли.



**Рис. 2.** Эволюция для различных  $nDLG$ -вычисленных областей  $\mathfrak{D}$ ;  $\omega = x + iy, y \geq 0$ ;  $K = 11$

Численные эксперименты показали, что наиболее эффективным на данном классе задач является степенной алгоритм Бернулли (15), быстрдействие которого в большой степени зависит от удачного выбора начальных условий процесса. При переходе к новому узловому значению параметра  $\omega$  начальное приближение к  $\zeta_1(\omega)$  определялось линейной экстраполяцией по ранее вычисленным значениям. Во всех рассмотренных случаях стартовой точкой процесса являлась точка  $\omega = 0$ , для которой  $\zeta_1(0) = 1$ .

Как показывают результаты расчетов, если корни многочлена  $p_{k,c}(z)$  близки по модулю, то метод Бернулли может не сойтись к максимальному по модулю корню. Эту проблему можно решить с помощью преобразования Данделена–Лобачевского–Греффе, т.е. путем применения известной процедуры квадрирования корней многочлена некоторое количество раз до тех пор, пока в результирующем многочлене наибольший по модулю корень достаточно не отдалится от второго по абсолютной величине корня. Затем к результирующему многочлену применяется метод Бернулли [12, 13]:

$$\begin{aligned}
 p_{k,c}(z) &\xrightarrow{DLG} {}^{(1)}p_{k,c}(z) = (-1)^k p_{k,c}(\sqrt{z}) p_{k,c}(-\sqrt{z}), \quad z \in \mathbb{C}; \\
 {}^{(n-1)}p_{k,c}(z) &\xrightarrow{DLG} {}^{(n)}p_{k,c}(z), \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Если числа  $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in \mathbb{C}$  являются корнями полинома  $p_{k,c}(z)$ , то многочлен  ${}^{(1)}p_{k,c}(z)$  обращается в ноль в точках  $\zeta_1^2, \dots, \zeta_k^2$ , и потому области Далквиста для многочленов  $p_{k,c}(z)$  и  ${}^{(1)}p_{k,c}(z)$  совпадают.

На рис. 2 приведена эволюция вычисленных областей  $\mathfrak{D}$  методов Адамса–Башфорта порядка точности  $K = 11$  при изменении числа  $nDLG$  итераций метода Данделена–Лобачевского–Греффе; рис. 3 содержит изображения множеств  $\mathfrak{D}$  при  $nDLG = 4$  для схем различного порядка точности  $K$ .

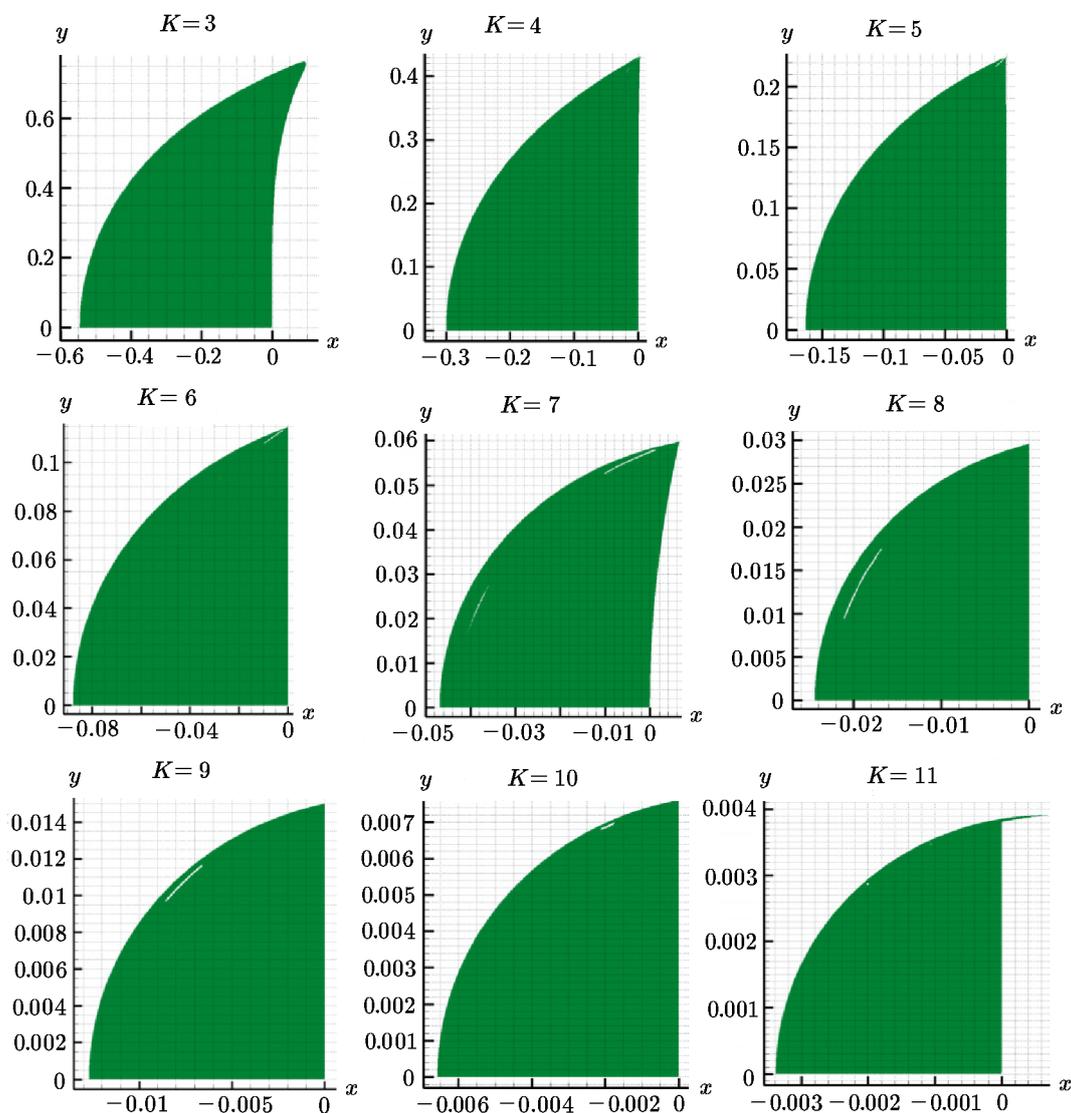


Рис. 3. Вычисленные при  $nDLG = 4$  области  $\mathfrak{D}$ ;  $\omega = x + iy$ ,  $y \geq 0$

Очевидно, что преобразование (18) значительно повышает эффективность нахождения  $\mathfrak{D}$ .

#### 4. Заключение

Предложен алгоритм получения областей Далквиста (областей абсолютной устойчивости) явных методов Адамса. Он основан на методе Бернулли вычисления наибольшего по модулю корня характеристического уравнения численной схемы. Несмотря на естественность предложенного подхода, оказывается, что при прямом применении этого алгоритма получается участок на комплексной плоскости значительно больший, чем область  $\mathfrak{D}$ , которую требуется найти. Поэтому исследование устойчивости численных схем только на модельной задаче может привести к ошибочному результату. Показано, что применение преобразования Данделена–Лобачевского–Греффе к характеристическому многочлену (6) делает алгоритм гораздо более эффективным.

В этой статье приведены области Далквиста для явных методов Адамса–Башфорта 3–11 порядков. По мере того, как увеличивается порядок точности формулы, область уменьшается в размерах. Естественным продолжением этой работы является получение областей Далквиста для методов Адамса более высоких порядков.

## Литература

1. **Hairer E., Wanner G., Norsett S.P.** Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff problems. 2nd ed. 3rd corrected printing. — Berlin: Springer, 2008. — (Springer Series in Computational Mathematics; Vol. 8). — DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1.
2. **Новиков Е.А., Шорников Ю.В.** Компьютерное моделирование жестких гибридных систем. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013.
3. **Авдюшев В.А.** Численное моделирование орбит небесных тел. — Томск: Издательский дом ТГУ, 2015.
4. **Абрамов В.В.** Применение методов Адамса к решению уравнений движения больших планет, Луны и Солнца // Матем. моделирование и краев. задачи. — 2006. — Часть 3. — С. 13–19.
5. **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. — 1963. — Vol. 3. — P. 27–43.
6. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. 5-е изд. — М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012.
7. **Butcher J.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons Ltd., 2016. — DOI: 10.1002/9781119121534.
8. **McNamee J.M.** Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part I // Studies in Computational Mathematics. — Elsevier, 2007. — Vol. 14.
9. **McNamee J.M., Pan V.Y.** Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part II. // Studies in Computational Mathematics. — Elsevier, 2013. — Vol. 16. — DOI: 10.1016/B978-0-444-52730-1.00004-7.
10. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры: учебник для студентов вузов. 19-е изд., стер. — СПб.: Изд-во “Лань”, 2013.
11. **Hildebrand F.B.** Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. — Dover Publications, 1987.
12. **Zaguskin V.L.** Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations. — Elsevier, 1961.
13. **Householder A.S.** Dandelin, Lobacevskii, or Graeffe // The American Mathematical Monthly. — 1959. — Vol. 66, № 6. — P. 464–466. — URL: <https://doi.org/10.2307/2310626>.

*Поступила в редакцию 17 марта 2022 г.*

*После исправления 24 марта 2022 г.*

*Принята к печати 18 июля 2022 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Hairer E., Wanner G., Norsett S.P.** Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff problems. 2nd ed. 3rd corrected printing. — Berlin: Springer, 2008. — (Springer Series in Computational Mathematics; Vol. 8). — DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1.
2. **Novikov E.A., Shornikov Yu.V.** Komp’yuternoe modelirovanie zhestkih gibridnyh sistem. — Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2013.

3. **Avdyushev V.A.** Chislennoe modelirovanie orbit nebesnyh tel. — Tomsk: Izdatel'skii dom TGU, 2015.
4. **Abramov V.V.** Primenenie metodov Adamsa k resheniyu uravnenii dvizheniya bol'shih planet, Lunny i Solntsa // Matem. modelirovanie i kraev. zadachi. — 2006. — Chast' 3. — S. 13–19.
5. **Dahlquist G.** A special stability problem for linear multistep methods // BIT Numerical Mathematics. — 1963. — Vol. 3. — P. 27–43.
6. **Gel'fond A.O.** Ischislenie konechnykh raznostei. 5-e izd. — M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012.
7. **Butcher J.** Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. — John Wiley & Sons Ltd., 2016. — DOI: 10.1002/9781119121534.
8. **McNamee J.M.** Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part I // Studies in Computational Mathematics. — Elsevier, 2007. — Vol. 14.
9. **McNamee J.M., Pan V.Y.** Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part II. // Studies in Computational Mathematics. — Elsevier, 2013. — Vol. 16. — DOI: 10.1016/B978-0-444-52730-1.00004-7.
10. **Kurosh A.G.** Kurs vysshei algebrы: uchebnyk dlya studentov vuzov. 19-e izd., ster. — SPb.: Izd-vo "Lan'", 2013.
11. **Hildebrand F.B.** Introduction to Numerical Analysis. 2nd ed. — Dover Publications, 1987.
12. **Zaguskin V.L.** Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations. — Elsevier, 1961.
13. **Householder A.S.** Dandelin, Lobacevskii, or Graeffe // The American Mathematical Monthly. — 1959. — Vol. 66, № 6. — P. 464–466. — URL: <https://doi.org/10.2307/2310626>.