

УДК 001.891.573

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО КОПИРОВАНИЯ В ЯЧЕЙКЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, А. А. Зарипов

Уфимский государственный авиационный технический университет, 450000 Уфа, Россия  
E-mails: zhitnik@mail.ru, n\_sher@mail.ru, jacud@yandex.ru

Решается задача моделирования электрохимической обработки путем сведения к решению задачи Шварца на параметрическом прямоугольнике с использованием тета-функций. Рассмотрены различные условия (неэквипотенциальность электродов, непостоянство выхода по току) на границе обрабатываемой поверхности. Исследованы нестационарные, квазистационарные, стационарные, предельные решения. Приведены результаты обработки поверхности электродами-инструментами различной формы. Показано, что параметры режима обработки существенно влияют на величину припуска, необходимую для достижения высокой точности копирования.

**Ключевые слова:** задача Хеле-Шоу, нестационарность, квазистационарное решение, комплексные переменные, точность копирования.

DOI: 10.15372/PMTF20170616

**Введение.** Задачи моделирования электрохимического копирования решались во многих работах (см., например, [1–7]). При этом основное внимание уделялось исследованию стационарных решений [1–3]. Решение нестационарных задач позволяет определить различные дополнительные параметры, в том числе время установления стационарного процесса, с заданной точностью. Однако для решения таких задач требуются значительные вычислительные ресурсы. Поэтому обычно рассматриваются задачи обработки поверхности электродами-инструментами (ЭИ) простой формы: точечными, плоскими, угловыми и т. п. [4–7]. Моделирование обработки ЭИ произвольной формы значительно сложнее, поскольку в этом случае требуется выполнение условий на двух криволинейных поверхностях. Поэтому представляет интерес разработка метода вычисления различных параметров. При решении задачи в случае ЭИ, имеющего сложную криволинейную форму, можно использовать метод декомпозиции задачи. При этом межэлектродное пространство условно разрезается на несколько областей пластинами из изоляционного материала. Для уменьшения погрешности, вызванной спрямлением линий тока, можно использовать метод наложения отдельных областей.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим нестационарную задачу электрохимической обработки с помощью электрода-инструмента  $FCG$  в виде выступа или впадины некоторой формы. На рис. 1 показана область межэлектродного пространства в некоторый момент времени. Межэлектродное пространство (МЭП) ограничено вертикальными пластинами  $FA$  и  $GB$  из изоляционного материала. ЭИ движется в направлении изначально плоской

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-07-00356).

© Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Зарипов А. А., 2017

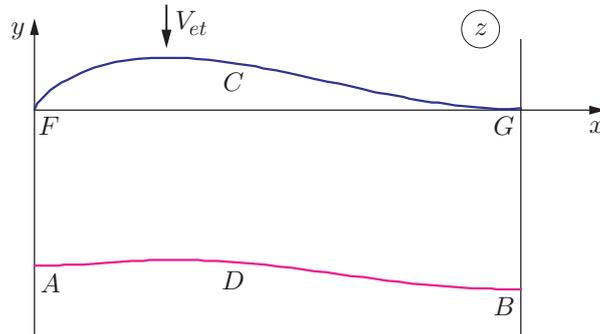


Рис. 1. Схема МЭП в физической плоскости  $z$ :  
 $F CG$  — ЭИ (катод);  $A DB$  — обрабатываемая поверхность (анод)

заготовки  $A DB$  со скоростью  $V_{et}$ . Начальный размер межэлектродного зазора (расстояние  $AF$ ) равен  $S_0$ , напряжение между электродами равно  $U$ .

Моделирование процесса электрохимической обработки (ЭХО) основано на законе Фарадея, согласно которому скорость растворения (сдвига границы заготовки)  $V_{ecm}$  равна

$$V_{ecm} = \frac{k}{\varkappa} \eta j, \quad k = \frac{\varkappa \varepsilon}{\rho}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  — электрохимический эквивалент;  $\rho$  — плотность растворяемого материала;  $\varkappa$  — электропроводность электролита;  $j$  — плотность тока на анодной границе;  $\eta = \eta(j)$  — выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла).

В данной работе зависимость  $\eta(j)$  моделируется ступенчатой функцией [5–7]

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \eta \in [0, \eta_0], & j = j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (2)$$

Возможны различные режимы обработки. Если в каждой точке границы обрабатываемой поверхности (анода)  $j > j_1$ , то  $\eta = \eta_0$ , т. е. имеет место обычная постановка задачи идеальной ЭХО. При другом режиме, называемом предельным, во всех точках анода  $j = j_1$ , а величина  $\eta$  может изменяться в диапазоне от  $\eta_0$  до нуля или какой-либо малой величины. При этом достигается высшая степень локализации процесса растворения [6]. В общем случае режим обработки характеризуется параметром

$$\alpha = \frac{E_0}{E_1} = \frac{j_0}{j_1}.$$

Здесь  $E_0 = V_{et}/(k\eta_0)$ ;  $E_1 = j_1/\varkappa$ . В обычном режиме  $\alpha = \infty$ , в предельном —  $\alpha = 1$ .

Перейдем к безразмерным координатам  $x$ ,  $y$  и времени  $\tau$ :

$$x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \frac{V_{et}}{l} t = \frac{k\eta_0 U}{l^2} t \quad (3)$$

( $l$  — размер стационарного зазора в задаче обработки плоским горизонтальным ЭИ). Из условия  $V_{ecm} = V_{et}$  в (1) определяем  $V_{et} = k\eta_0 U/l$ . Тогда  $l = k\eta_0 U/V_{et}$ .

В предположении однородности свойств электролита для решения задачи можно применять методы теории функций комплексной переменной. Рассматриваемая задача является вариантом задачи Хеле-Шоу для области со свободной границей и решается с помощью конформных отображений [8].

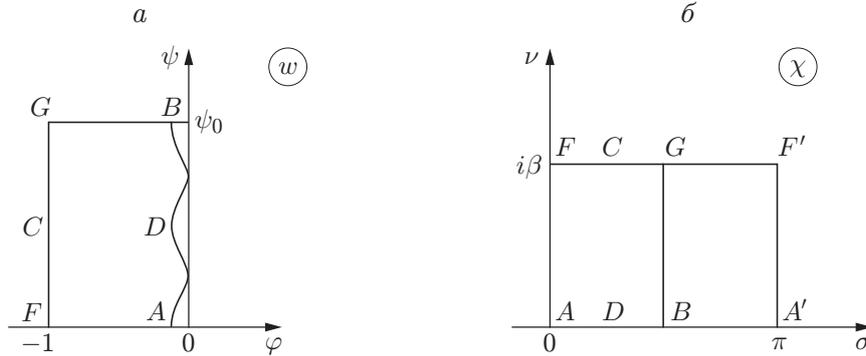


Рис. 2. Формы образов МЭП:

*a* — плоскость безразмерного комплексного потенциала  $w$ ; *б* — параметрическая плоскость  $\chi$

Пусть  $z = Z/l = x + iy$ . Вследствие неэквипотенциальности анода область МЭП на плоскости комплексного потенциала  $w = W/U = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  — безразмерный потенциал электрического поля;  $\psi$  — функция тока) представляет собой криволинейную фигуру (рис. 2, *a*). Линиям тока  $FA$  и  $GB$  соответствуют горизонтальные отрезки. При этом величина напряженности электрического поля определяется производной  $E = \overline{dW/dZ}$ , а плотность тока в соответствии с законом Ома равна  $j = \varkappa|E|$ . В каждый момент времени задача сводится к определению конформного отображения области МЭП физической плоскости на плоскость  $w$ .

Согласно (1), (3)

$$v_{et} = -\frac{dy_F}{d\tau} = -\frac{1}{V_{et}} \frac{dY_F}{dt} = 1;$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{V_{et}} \frac{dZ}{dt} = \frac{k\eta U}{V_{et}l} \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} = \frac{\eta}{\eta_0} \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)}. \quad (4)$$

Конформно отобразим область МЭП на прямоугольник параметрической плоскости  $\chi$  (рис. 2, *б*). Для того чтобы условие  $\text{Re } z(\chi) = \text{const}$  выполнялось на участках границы  $FA$  и  $GB$ , согласно принципу симметрии функцию  $z(\chi, \tau)$  следует аналитически продолжить симметрично отрезку  $GB$  (см. рис. 2, *б*). Если форма ЭИ является симметричной, то продолжение не требуется.

**2. Численно-аналитический метод.** При решении нестационарной задачи Хеле-Шоу методами теории функций комплексной переменной необходимо найти аналитические функции  $z(\chi, \tau)$ ,  $w(\chi, \tau)$ ,  $(\partial z/\partial \tau)(\chi, \tau)$ .

2.1. *Задача 1.* Данная задача является задачей определения конформного отображения полосы на криволинейную полосу с периодическими (с периодом  $2L$ ) зависимостями ординат от абсциссы  $y_1(x, \tau)$ ,  $y_1(x, 0) = 0$ ,  $y_2(x, \tau) = y_2(x, 0) - \tau$  на нижней и верхней границах. Функцию  $z(\chi, \tau)$  представим в виде

$$z(\chi, \tau) = 2L\chi/\pi + z_1(\chi, \tau),$$

где  $z_1(\chi, \tau)$  — периодическая (с периодом  $\pi$ ) функция  $\chi$ , определяющая отклонение формы границ МЭП от прямых.

Краевыми условиями, используемыми для определения аналитической функции  $z_1(\chi, \tau)$  для каждого значения  $\tau$ , являются равенства

$$\text{Im } z_1(\sigma + i0, \tau) = \varphi_1(\sigma); \quad (5)$$

$$\text{Im } z_1(\sigma + i\beta, \tau) = \varphi_2(\sigma). \quad (6)$$

При условиях (5), (6) аналитическая внутри прямоугольника и непрерывная в его замыкании функция, осуществляющая конформное отображение, в каждый момент времени может быть найдена с помощью интеграла Шварца [9]

$$z_1(\chi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_1(u) \left( \frac{\vartheta'_1(u - \chi)}{\vartheta_1(u - \chi)} - \frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)} \right) du - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi_2(u) \left( \frac{\vartheta'_4(u - \chi)}{\vartheta_4(u - \chi)} - \frac{\vartheta'_4(u)}{\vartheta_4(u)} \right) du + c_1, \quad (7)$$

где  $c_1$  — произвольная действительная постоянная (для данной задачи  $c_1 = 0$ ). Для того чтобы условие (6) было выполнено, должно выполняться равенство

$$\int_0^\pi \varphi_1(u) du = \int_0^\pi \varphi_2(u) du. \quad (8)$$

Введем обозначение  $q = e^{-2\pi\beta}$ . Логарифмические производные тета-функций вычисляются через ряды [10]

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta'_1(\chi)}{\vartheta_1(\chi)} &= \frac{d}{d\chi} \ln \vartheta_1(\chi) = \operatorname{ctg} \chi + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \sin(2m\chi), \\ \frac{\vartheta'_4(\chi)}{\vartheta_4(\chi)} &= \frac{d}{d\chi} \ln \vartheta_4(\chi) = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin(2m\chi). \end{aligned} \quad (9)$$

При выполнении условия (8) функции  $\varphi_1(\sigma)$  и  $\varphi_2(\sigma)$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z_1(\sigma + i0, \tau) &= y_1 \left( \frac{L}{\pi} \sigma + \operatorname{Re} z_1(\sigma + i0, \tau) \right), \\ \frac{L}{\pi} \beta + \operatorname{Im} z_1(\sigma + i\beta, \tau) &= y_2 \left( \frac{L}{\pi} \sigma + \operatorname{Re} z_1(\sigma + i\beta, \tau) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Функцию  $z_1(\chi, \tau_j)$  можно получить следующим образом. На границах  $\chi = \sigma + i\beta$  и  $\chi = \sigma' + i0$  в узловых точках  $\sigma_m$  ( $m = \overline{0, n_2}$ ),  $\sigma'_m$  ( $m = \overline{0, n_1}$ ) задаются значения  $\varphi_2(\sigma_m) = \operatorname{Im} z_1(\sigma_m + i\beta, \tau_j) = y_m^{(2)}$  и  $\varphi_1(\sigma'_m) = \operatorname{Im} z_1(\sigma'_m + i0, \tau_j) = y_m^{(1)}$ . Значения  $\varphi_1(\sigma')$ ,  $\varphi_2(\sigma)$  в точках, расположенных между узловыми точками, вычисляются с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Численное интегрирование (7) проводится с помощью двухточечной квадратурной формулы Гаусса четвертого порядка точности относительно параметра  $h_{\max} = \max_{1 \leq m \leq n} (\sigma_m - \sigma_{m-1})$ . Для интегралов с особенностями вычисляются главные значения. Для ускорения вычислений ряды в (9) интерполируются сплайнами.

Задача конформного отображения решалась численно методом коллокаций. В силу симметрии МЭП уравнение формы ЭИ (10) справедливо в отдельных точках  $\chi = \sigma_m + i\beta$  ( $m = \overline{0, n_2/2}$ ). Кроме того, требовалось выполнение уравнения (8). Значения  $\operatorname{Re} z_1(\sigma'_m, \tau_j)$  и  $\operatorname{Im} z_1(\sigma'_m, \tau_j)$  на аноде на каждом временном шаге известны, поэтому при конформном отображении искомыми являются значения  $\sigma'_m$ ,  $m = \overline{1, n_1/2 - 1}$ . Получаемая при этом система  $n_1/2 + n_2/2 + 1$  нелинейных уравнений относительно параметров  $\beta$ ,  $y_m^{(2)}$  ( $m = \overline{0, n_2/2}$ ),  $\sigma'_m$  ( $m = \overline{1, n_1/2 - 1}$ ) решалась методом Ньютона с регулированием шага.

**2.2. Задача 2.** Задача определения  $w(\chi, \tau)$  решается следующим образом. Пусть связь потенциала на аноде с нормальной составляющей напряженности определяется функцией  $\Phi_a = Uf(E_n)$ , при этом на аноде выполняется следующее условие:

$$\varphi_a(\sigma) = f[E_n(\sigma)] = -\mu(\sigma), \quad E_n = \operatorname{Im} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z / \partial \sigma}{|\partial z / \partial \sigma|} \right).$$

Для учета неравномерности поляризации этого выражения представим комплексный потенциал в виде

$$r(\chi, \tau) = -iw(\chi, \tau) = -i\varphi + \psi = \gamma\chi + r_1(\chi, \tau). \quad (11)$$

Здесь  $r_1(\chi, \tau)$  — функция, определяемая с помощью интеграла Шварца (7). В (7) функции  $\varphi_1(\sigma)$  и  $\varphi_2(\sigma)$  равны

$$\varphi_1(\sigma) = \text{Im } r_1(\sigma + i0, \tau) = \mu(\sigma), \quad \varphi_2(\sigma) = \text{Im } r_1(\sigma + i\beta, \tau) = \lambda. \quad (12)$$

При этом в соответствии с (8), (11)

$$\lambda = 1 - \gamma\beta, \quad \gamma = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mu(u)(u) du \right).$$

Задача определения  $w(\chi, \tau)$  решалась итерациями, причем на каждом шаге по времени выполнялась только одна итерация. На нулевом шаге электроды считаются эквипотенциальными. Определяются значения  $\partial w / \partial z(\sigma, 0)$ . На следующем шаге эти значения подставляются в (12) и в интеграл Шварца. Затем зависимости  $\text{Re } w(\sigma_m, \tau_j)$ ,  $\text{Im } w(\sigma_m, \tau_j)$  интерполируются сплайнами, коэффициенты которых равны производным этих сплайнов в узловых точках, после чего определяются значения

$$\frac{\partial w}{\partial z}(\sigma, \tau_j) = \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma, \tau_j) \left[ \frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma, \tau_j) \right]^{-1},$$

используемые для перехода на следующий шаг по времени и вычисления потенциалов на нем. При использовании такого варианта численного метода не требуется решать дополнительные системы уравнений и при этом сохраняется первый порядок точности по времени.

2.3. *Задача 3.* Скорость сдвига границ можно вычислить, решив уравнения типа уравнений Полубариновой-Кочиной — Галина [11, 12]. Однако для этого требуется решить систему линейных алгебраических уравнений.

Данную задачу можно решить более простым способом. Поскольку в соответствии с (4) сдвиг точек поверхности анода происходит вдоль вектора напряженности, после вычисления значений  $\partial w / \partial z(\sigma, \tau_j)$  для  $\chi = \sigma_m^0 + i0$  с использованием метода Эйлера выполняется переход на следующий шаг по времени длиной  $\Delta\tau$ :

$$z_{m,j+1} = z_{m,j} + \left( \frac{\partial w}{\partial z}(\sigma_m^0 + i0, \tau_j) \tilde{\eta}(\tilde{j}_m) + iv_{et} \right) \Delta\tau \quad (13)$$

(используемая система координат связана с ЭИ,  $v_{et} = 1$ ).

В (13) можно использовать равенство (2) в упрощенной форме

$$\tilde{\eta}(\tilde{j}) = \begin{cases} 1, & \tilde{j} \geq 1/\alpha, \\ 0, & \tilde{j} < 1/\alpha, \end{cases} \quad \tilde{j} = \frac{j}{j_0} = \frac{|E|}{E_0} = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right| \left| \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right|^{-1}, \quad (14)$$

так как выполнение равенства  $\tilde{j} = 1/\alpha$  практически невозможно.

Однако, поскольку сдвиг точек происходит почти по нормали к поверхности анода, точки, находящиеся на выпуклых в направлении заготовки участках поверхности, на каждом шаге по времени расходятся. Чтобы избежать потерь точности и устойчивости решения, можно перейти к частной производной по времени  $\partial z / \partial \tau$  следующим способом. Так как при совершении шага в соответствии с формулой (13) и решении задачи конформного отображения получают новые значения  $\sigma'_m$ ,  $m = \overline{1, n_1 - 1}$ , то, для того чтобы получить прежние значения  $\sigma_m^0$ , строятся сплайны  $S_x(\sigma')$ ,  $S_y(\sigma')$  и определяются значения

$$z(\sigma_m^0 + i0, \tau_{j+1}) = S_x(\sigma_m^0) + iS_y(\sigma_m^0), \quad m = \overline{1, n_1 - 1}. \quad (15)$$

Таким способом осуществляется сдвиг точек вдоль вектора частных производных  $\partial z/\partial \tau(\sigma_m^0, \tau_j)$ , что позволяет сохранить точность и устойчивость решения. Затем вновь выполняются сдвиг (13), конформное отображение, пересчет в соответствии с (15) и т. д.

Оценка погрешности численного решения проводилась методом фильтрации результатов вычислений [13, 14]. Из этих оценок следует, что при  $n_1 = n_2 = n = 80$  в получаемых результатах вычислений верными являются три десятичные цифры, а при  $n = 160$  — четыре цифры.

**3. Квазистационарное решение.** Рассмотрим случай  $\alpha = 1$  ( $E_0 = E_1$ ). Поскольку согласно (14) при  $|dw/dz| = |\omega| < 1$  растворения не происходит, часть анодной поверхности  $ADB$  (см. рис. 1) сохраняет первоначальную (плоскую) форму. На всех участках, где происходит растворение, в данном случае принимается  $|E| = E_1$ ,  $|\omega| = 1$  (в случае нестационарного процесса эти равенства устанавливаются в соответствии с (14)). Это позволяет получать решения для различных моментов времени  $\tau$  аналогично тому, как это сделано в работах [6, 7]. Однако в данной задаче при  $\alpha = 1$  такое решение является точным.

Задача решалась численно методом коллокаций. Уравнение формы ЭИ (10) справедливо в точках  $\chi = \sigma_m + i\beta$  ( $m = \overline{0, n_2/2}$ ). Кроме того, требовалось выполнение уравнения (8). На части поверхности анода  $\chi = \sigma_m + i0$  при  $\sigma \leq \sigma_H$  ( $\sigma_H$  — образ точки  $H$  — начала нерастворившегося участка границы) требовалось выполнение условия  $|dw/dz| = 1$ , при этом искомыми являлись значения  $y_m^{(1)} = \text{Im } z_1(\sigma_m + i0)$ ,  $m = \overline{0, n_1/4}$ . На нерастворившейся части поверхности анода  $\text{Im } z_1(\sigma_m + i0) = y_{n_1/4}^{(1)}$ ,  $m = \overline{n_1/4 + 1, n_1/2}$ . Дополнительным условием являлось равенство  $y_{n_1/4}^{(1)}$  заданной величине  $y_D = \tau - 1$ . Получаемая при этом система  $n_1/4 + n_2/2 + 4$  нелинейных уравнений решалась методом Ньютона с выбором шага, зависящим от параметров  $\beta$ ,  $\sigma_H$ ,  $y_m^{(2)}$  ( $m = \overline{0, n_2}$ ),  $y_m^{(1)}$  ( $m = \overline{0, n_1/4}$ ).

Поскольку решения для различных значений  $y_D$  получаются независимо друг от друга, отсутствует необходимость проведения вычислений с малым шагом по времени, что позволяет существенно уменьшить время решения задачи.

Квазистационарное решение может существовать также при  $\alpha > 1$ . В этом случае на плоскости годографа безразмерной напряженности  $\omega = dw/dz$  граница анода состоит из дуги окружности  $|\omega - i/2| = 1/2$ , на которой выполняется условие стационарности [1, 6], дуги окружности  $|\omega| = 1/\alpha$  и вертикального разреза, соответствующего нерастворившемуся участку анода. Однако имеется ряд ограничений, в частности, если точка пересечения этих дуг находится вне области образа МЭП, то квазистационарного решения не существует.

Следует отметить, что для частного случая зубчатой поверхности катода при  $\alpha = 1$  существует точное решение квазистационарной задачи [15], которое было использовано для тестирования алгоритма решения общей задачи для произвольной формы катода.

**4. Результаты численных расчетов.** На рис. 3 показан периодический рельеф в виде треугольных зубцов на заготовке, полученный в результате ЭХО [4]. При длине периода, приближенно равной 250 мкм, средний размер зазора при обработке составлял  $12 \div 13$  мкм. Поэтому было выбрано безразмерное значение ширины ячейки  $L = 20$ .

Вследствие симметрии формы ЭИ увеличения области решения в два раза не требуется (см. рис. 2, б). Сначала рассмотрим режим обработки с постоянным выходом по току:  $\eta = \eta_0$  (обработка в активизирующем электролите). На рис. 4, а показаны формы ЭИ и обрабатываемой поверхности при безразмерном шаге по времени  $\Delta\tau = 2$ . (Расчет проводился при  $n = n_1 = n_2 = 40$  и  $\Delta\tau = 0,01$ ). Формы ЭИ представлены в системе координат, связанной с ЭИ, т. е. заготовка движется вверх с безразмерной скоростью, равной

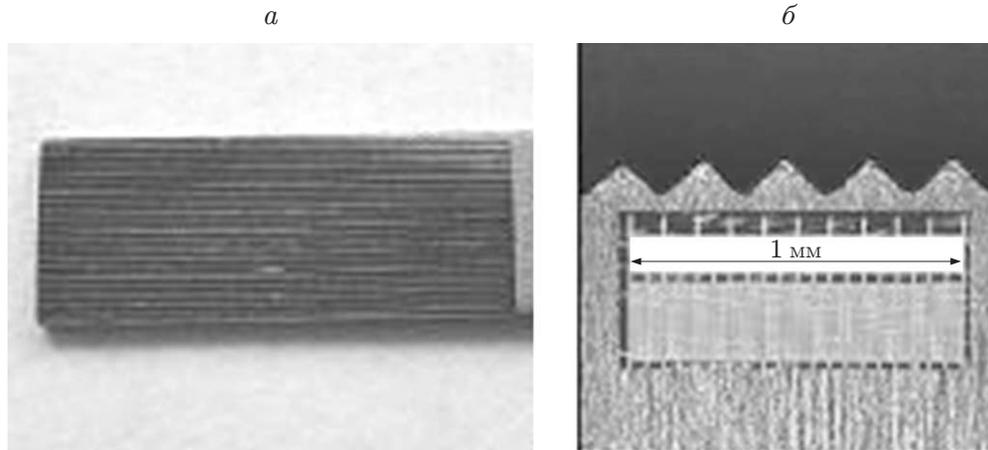


Рис. 3. Губка микропинцета:  
*a* — общий вид, *б* — поперечное сечение

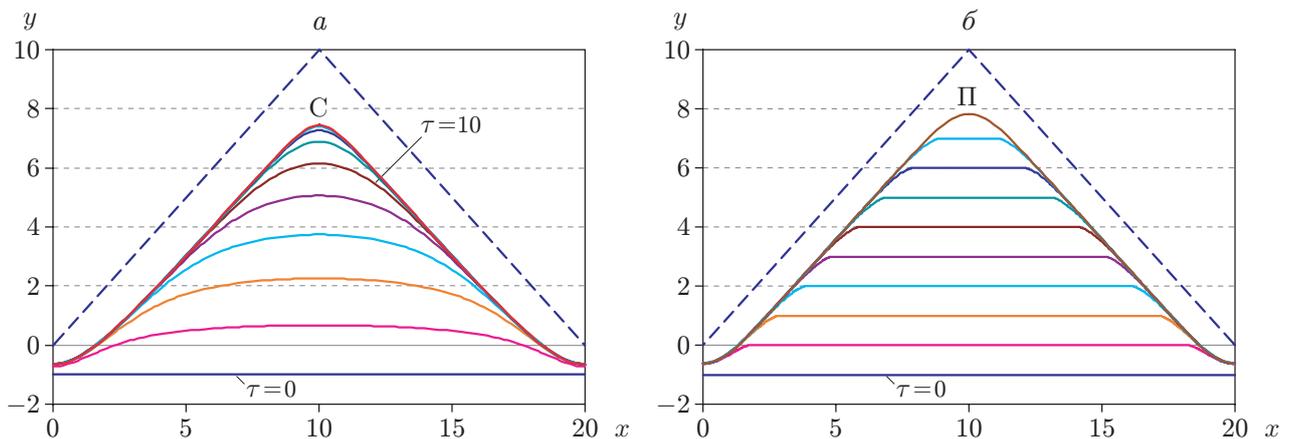


Рис. 4. Формы поверхностей в виде периодических клиньев, полученных при обработке ЭИ (штриховая линия):  
*a* —  $\alpha = \infty$  ( $\eta = \eta_0$ ),  $\Delta\tau = 2$ , С — стационарная форма; *б* —  $\alpha = 1$ ,  $\Delta\tau = 1$ , П — предельная форма

единице. На аноде образуется выступ, высота которого со временем увеличивается, а форма асимптотически приближается к стационарной. Общий сдвиг заготовки составляет 20 единиц, т. е. происходит ее заглубление на расстояние, равное двум высотам выступа на ЭИ (см. рис. 4, *a*). Форма поверхности при  $\tau = 10$  соответствует заглублению, равному высоте выступа. Видно, что эта форма существенно отличается от стационарной. При  $\tau = 16$  поверхность приобретает практически стационарную форму, но для достижения такой формы требуется большее время обработки и снятие дополнительного припуска, составляющего приблизительно 60 % высоты выступа. Согласно расчетам минимальная напряженность на поверхности анода  $|E| \approx 0,152$  имеет место в точке *D* при  $\tau = 0$ . При увеличении  $\tau$  напряженность растет. Следовательно, при любых  $\alpha > 6,58$  ограничение на растворение (14) является несущественным, и картина процесса электрохимического растворения будет такой же, как на рис. 4, *a*.

Нестационарный процесс в предельном режиме  $\alpha = 1$  (рис. 4, *б*) существенно отличается от процесса при  $\eta = \eta_0$  и является квазистационарным. На вершине выступа, образующегося на поверхности анода, имеет место прямолинейный участок, соответствующий нерастворенному участку поверхности. Этот участок движется вверх со скоростью  $v_{et} = 1$ .

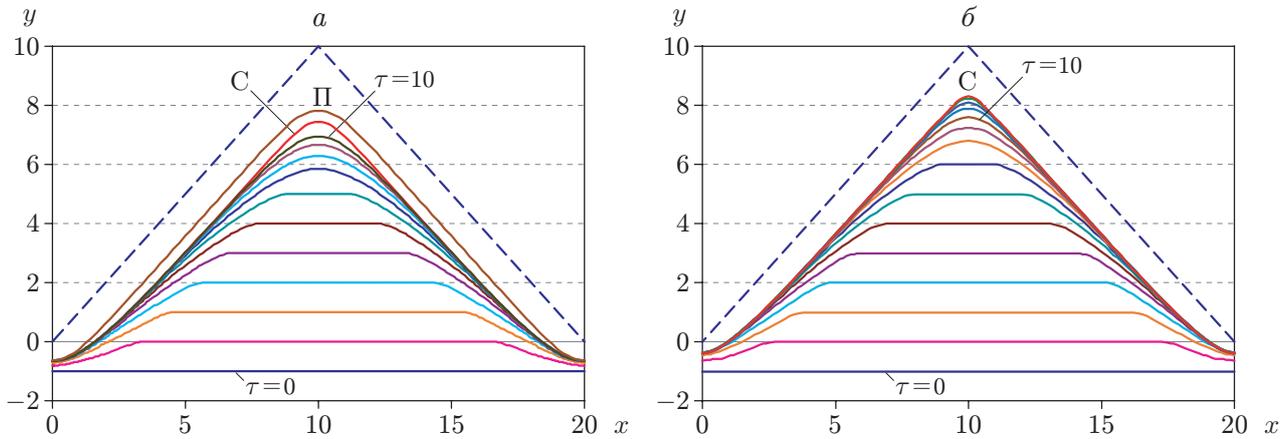


Рис. 5. Формы поверхностей в виде периодических клиньев, полученных при обработке ЭИ (штриховая линия) для  $\alpha = 2$ ,  $\Delta\tau = 1$ :

$a$  — при постоянном потенциале анода,  $b$  — при непостоянном потенциале анода;  
 С — стационарная форма, П — предельная форма

После завершения обработки, выполненной за конечное время (в отличие от режима при  $\eta = \eta_0$ )  $\tau < 9$ , получается окончательная предельная форма (см. рис. 4,  $b$ ), при этом на всей поверхности анода выполняется условие  $|\omega| = 1/\alpha = 1$ . Предельная форма отличается от стационарной (рис. 5,  $a$ ). Заметим, что предельное решение является аналогом течения идеальной жидкости вдоль зубчатой поверхности.

Результаты процесса ЭХО при  $\alpha = 2$  показаны на рис. 5,  $a$ . Так же как и при  $\alpha = 1$ , на вершине выступа при  $\tau < 7$  имеет место нерастворившийся участок поверхности, движущийся вверх со скоростью  $v_{et} = 1$ , а вблизи этого участка находятся зоны, в которых согласно (14) растворение происходит не постоянно, а через некоторые промежутки времени. По мере удаления от нерастворившегося участка напряженность увеличивается и форма участка приближается к стационарной. При  $\tau > 7$  напряженность на всей поверхности анода больше  $1/\alpha$  и происходит нестационарный процесс, при этом форма всей поверхности асимптотически приближается к стационарной. Заметим, что на рис. 5,  $a$  шаг по времени в два раза меньше, чем на рис. 4,  $a$ , следовательно, при  $\alpha = 2$  стационарная форма достигается существенно быстрее и с меньшим дополнительным припуском, чем при  $\alpha = \infty$ .

Следует отметить, что предельная форма является окончательной только при  $\alpha = 1$ , при  $\alpha > 1$  на вершине выступа асимптотически устанавливается стационарная форма. Однако при  $1 < \alpha < \sqrt{2}$  обычная стационарная форма не может образоваться на всей поверхности анода, поскольку в этом случае разрез  $|\omega - i/2| = 1/2$  на плоскости годографа частично содержался бы в круге  $|\omega| < 1/\alpha$ . Поэтому при  $1 < \alpha < \sqrt{2}$  на части поверхности выполняется условие стационарности, на других частях, расположенных вблизи середин правого и левого склонов поверхности анода, — условие  $|\omega| = 1/\alpha$ . На плоскости годографа эти участки границы соответствуют разрезу, состоящему из дуг обеих окружностей.

Проводя сравнение полученных теоретически форм анодной поверхности с экспериментальными данными (см. рис. 3), нетрудно показать, что вблизи вершины и стационарная поверхность при  $\eta = \text{const}$ , и предельная при  $|\omega| = 1$  в расчетах имеют более закругленную форму, чем в эксперименте. Более того, безразмерное значение локальной кривизны предельной поверхности в точке  $D$ , равное 0,85, меньше локальной кривизны стационарной поверхности, равной 1,3, т. е. использование ступенчатой функции выхода по току не позволяет объяснить результаты натурального эксперимента.

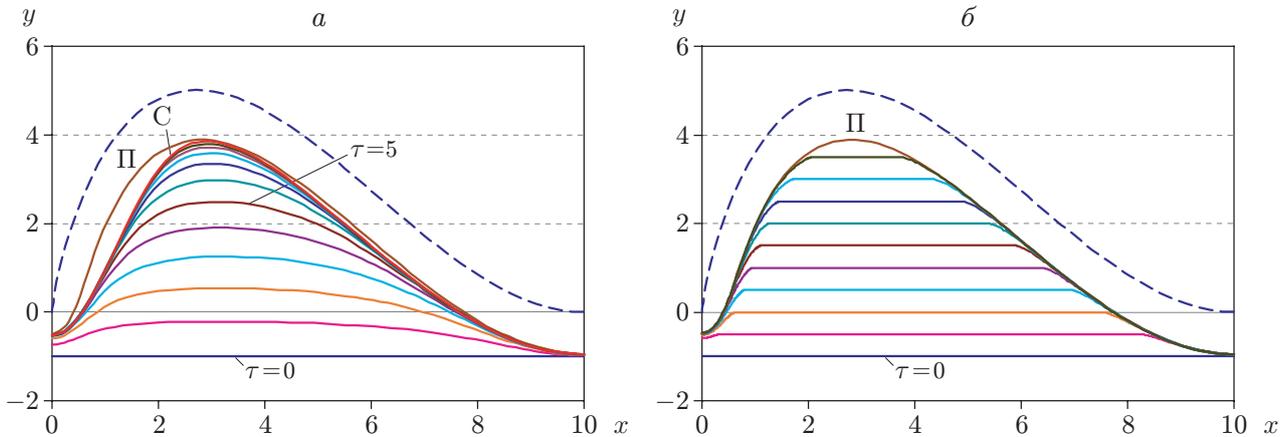


Рис. 6. Формы поверхностей при обработке ЭИ с заострением:  
 а —  $\alpha = \infty$  ( $\eta = \eta_0$ ),  $\Delta\tau = 1$ , б —  $\alpha = 1$ ,  $\Delta\tau = 0,5$ ; С — стационарная форма,  
 П — предельная форма

На рис. 5, б приведены результаты решения нестационарной задачи с учетом зависимости анодного потенциала от плотности тока. В этом случае обрабатываемые поверхности имеют более “острую” вершину. Это позволяет получить формы поверхности с существенно большей кривизной в точке D, равной 2,6. Однако вблизи впадины как теоретические, так и экспериментальные обрабатываемые поверхности являются более сглаженными.

В работе [16] решалась задача обработки с помощью ЭИ в виде бесконечного клина с углом раствора, меньшим  $\pi$ , в случае переменного анодного потенциала. Углы, большие  $\pi$ , не рассматривались, поэтому “заострение” выпуклой поверхности анода ранее не было замечено.

На рис. 6 приведены результаты моделирования обработки поверхности криволинейным ЭИ, форма которого задана уравнением

$$y_2(x) = H \frac{x^{3/4}(L-x)^2}{(3L/11)^{3/4}(8L/11)^2}, \quad H = 5.$$

На рис. 6, а видно, что предельная форма анода ближе к форме ЭИ, чем стационарная. Такое поведение кривых можно объяснить следующим образом. На плоскости годографа напряженности  $\omega = dw/dz$  стационарной поверхности анода соответствует разрез по дуге окружности  $|\omega - i/2| = 1/2$ , проходящей через начало координат. При угле наклона вектора напряженности к оси абсцисс  $\theta = -\pi/2$   $|\omega| = 1$ . По мере приближения значения  $\theta$  к нулю  $|\omega|$  на этой дуге уменьшается. Уменьшение напряженности приводит к увеличению размера зазора, при этом чем ближе  $\theta$  к нулю, тем значительнее это увеличение. В предельном решении на всей анодной поверхности  $|\omega| = 1$ , а выход по току в точках, где значение  $\theta$  ближе к нулю, уменьшается. Поэтому предельная кривая расположена на большем расстоянии от кривой, соответствующей стационарной форме, и ближе к кривой, соответствующей форме ЭИ.

**Заключение.** В работе предложены методы численного решения нестационарных и квазистационарных задач Хеле-Шоу, основанные на решении задачи Шварца на параметрическом прямоугольнике. Результаты расчетов подтвердили высокую эффективность предложенных методов.

В результате исследования характеристик процессов установления форм обрабатываемой поверхности при постоянном значении выхода по току показано, что для получения стационарной формы с достаточной точностью необходимо существенное увеличение ве-

личины заглупления ЭИ по сравнению с вертикальным размером выступа или впадины на нем. Обработка поверхности с переменным выходом по току позволяет значительно уменьшить дополнительные затраты.

Установлено, что непостоянство анодного потенциала способствует увеличению кривизны выпуклых участков обрабатываемой поверхности. Эти результаты согласуются с результатами натурного эксперимента.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Клоков В. В.** Электрохимическое формообразование. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984.
2. **Каримов А. Х.** Методы расчета электрохимического формообразования / А. Х. Каримов, В. В. Клоков, Е. И. Филатов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990.
3. **Котляр Л. М.** Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ / Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов. М.: Academia, 2005.
4. **Житников В. П.** Импульсная электрохимическая размерная обработка / В. П. Житников, А. Н. Зайцев. М.: Машиностроение, 2007.
5. **Житников В. П., Ошмарина Е. М., Зиннатуллина О. Р.** Моделирование прецизионной электрохимической обработки металлов секционированным катодом // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 185–192.
6. **Житников В. П., Ошмарина Е. М., Поречный С. С., Федорова Г. И.** Предельная модель электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 4. С. 193–201.
7. **Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И.** Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 21–29.
8. **Howison S. D.** Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Eur. J. Appl. Math. 1992. V. 3. P. 209–224.
9. **Терентьев А. Г.** К линейной теории кавитационного обтекания препятствий // Вопросы прикладной математики и механики. Чебоксары: Чуваш. ун-т, 1971. Вып. 1. С. 3–35.
10. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979.
11. **Полубаринова-Кочина П. Я.** Нестационарное движение в теории фильтрации // Прикл. математика и механика. 1945. Т. 9. С. 79–90.
12. **Галин Л. А.** Нестационарная фильтрация со свободными границами // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. С. 246–249.
13. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Применение многократной фильтрации при численном решении задач методами теории функций комплексного переменного // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 1. С. 15–24.
14. **Житников В. П.** Моделирование течений несжимаемой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина. Уфа: Гилем, 2009.
15. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Зарипов А. А.** Квазистационарное решение задачи электрохимического копирования зубчатой поверхности // Изв. вузов. Математика. 2017. № 8. С. 86–91.
16. **Газизов Е. Р., Маклаков Д. В.** Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. вузов. Авиационная техника. 2002. № 4. С. 55–57.