

**РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ ЧАСТИЦ,  
ИНТЕНСИВНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СТЕНКАМИ КАНАЛА**

Турбулентные газодисперсные потоки имеют широкую область приложений в энергетике, авиации, химической технологии. При пневмотранспорте дисперсных материалов часто реализуется режим турбулентного течения газозвеси довольно крупных частиц, время динамической релаксации которых значительно превосходит характерный временной масштаб турбулентных пульсаций несущей фазы. В этом случае характер пульсационного и осредненного движения дисперсной примеси существенным образом отличается от поведения мелких частиц, время динамической релаксации которых меньше либо сравнимо с временным масштабом пульсаций скорости жидкой фазы. Интенсивность пульсационного движения мелких частиц определяется степенью вовлечения дисперсной примеси в турбулентное движение энергоемких молекул несущей фазы и может быть оценена в рамках локально-равновесного приближения без учета столкновения частиц со стенками каналов [1]. Осредненные и пульсационные характеристики крупных частиц зависят от характера взаимодействия частиц со стенками. Эффекты существенного скоростного скольжения фаз, интенсивного хаотичного движения примеси (причем уровень пульсационного движения дискретной фазы в каналах может значительно превосходить уровень пульсаций частиц в безграничном пространстве при одинаковой интенсивности турбулентности жидкой фазы) объясняются только на основе учета столкновений инерционных частиц с ограничивающими поверхностями. Вследствие соударения частиц со стенкой происходит потеря импульса частиц и появляется вращение частицы вокруг точки контакта с поверхностью. Возникающая в результате вращения частицы сила Магнуса вызывает интенсивное поперечное перемещение частиц [2, 3]. Таким образом, стенки канала в системе газ — частицы выполняют роль «положительной обратной связи», приводящей к дополнительной генерации пульсаций дисперсной фазы по сравнению с турбулентным течением в безграничном пространстве.

В настоящее время известно два подхода к расчету характеристик турбулентных течений дисперсных потоков. Во-первых, метод прямого стохастического моделирования, основанный на решении уравнений движения одиночной частицы в случайном поле скоростей несущей фазы [2, 5—8]. Однако для получения информации об осредненных характеристиках течения необходим расчет многих тысяч траекторий одиночных частиц, что требует значительных затрат времени на ЭВМ. Несмотря на кажущуюся простоту реализации, метод расчета лагранжевых траекторий не находит широкого применения при проектировании реальных пневмотранспортных систем. Второй метод описания основан на привлечении уравнений баланса массы, импульса, момента импульса частиц и интенсивности турбулентных пульсаций [3, 9]. В этом случае для замыкания системы уравнений необходимо найти выражения, представляющие интенсивность турбулентного переноса импульса, момента импульса и пульсационной энергии частиц, а также поставить граничные условия для уравнений первых и вторых моментов, учитывающие характер взаимодействия частиц со стенками каналов. Формулы для интенсивности турбулентного переноса энергии пульсационного движения примеси получены в частном случае из уравнений для соответствующих третьих моментов с последующим привлечением гипотезы Миллионщикова о четвертых моментах [10]. Нетривиальна задача о постановке граничных условий для уравнений баланса характеристик дисперсной фазы. В [9,

11] найдены граничные условия для уравнений баланса массы, импульса и вторых моментов пульсаций скорости частиц при условии, что в результате столкновения со стенкой частицы теряют часть импульса. Граничные условия, представленные в [3], записаны в предположении о  $\delta$ -образном распределении по скоростям и скоростям углового вращения падающих на стенку частиц; кроме того, в граничные условия входит отношение скоростей углового вращения частиц до и после соударения, что требует дополнительной эмпирической информации о скоростях вращения.

В настоящей работе получено замкнутое уравнение для функции плотности вероятности (ФПВ) распределения по координатам, скоростям и скоростям углового вращения частиц; записана система уравнений для первых и вторых моментов пульсаций скорости и угловой скорости вращения. На основе приближенного решения кинетического уравнения с учетом членов, линейных по градиентам характеристик дисперсной фазы, определены выражения, представляющие турбулентный перенос импульса, момента импульса и интенсивности турбулентных пульсаций скорости дискретной фазы. Найдены граничные условия для уравнений баланса массы, импульса, момента импульса и пульсационной энергии частиц, учитывающие как потерю импульса, так и возникновение интенсивного вращения частиц в результате столкновения. Проведены расчеты характеристик дисперсной фазы в горизонтальных и вертикальных каналах для восходящего и нисходящего течения газозвеси.

**1. Уравнение для ФПВ. Система уравнений для первых и вторых моментов.** Рассматривается течение газозвеси частиц без обратного влияния дискретной фазы на характеристики несущего потока, что соответствует течению с весовой концентрацией частиц, значительно меньшей единицы. В этом случае, считая известными характеристики течения жидкой фазы, достаточно рассмотреть ФПВ частиц, осредненную по реализациям турбулентного потока:

$$\langle \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_p) \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p) \rangle.$$

Здесь уравнения движения одиночной частицы, описывающие динамику изменения координаты  $\mathbf{R}_p$ , скорости  $\mathbf{V}_p$  и скорости углового вращения  $\boldsymbol{\Omega}_p$ , имеют вид [1-3]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dR_{pi}}{dt} &= V_{pi}(t), \\ \frac{dV_{pi}}{dt} &= \frac{1}{\tau} (U_i(\mathbf{R}_p, t) + \tau g_i - V_{pi}) - \gamma_\omega \varepsilon_{ijk} \Omega_{pk} (U_j(\mathbf{R}_p, t) - V_{pj}), \\ \frac{d\Omega_{pi}}{dt} &= -\frac{1}{\tau_\omega} \Omega_{pi}(t), \end{aligned}$$

где  $\tau$ ,  $\tau_\omega$  — времена динамической релаксации скорости и угловой скорости вращения;  $\varepsilon_{ijk}$  — антисимметричный тензор;  $U_i(\mathbf{x}, t) = \langle U_i(\mathbf{x}, t) \rangle + u_i(\mathbf{x}, t)$  — скорость течения несущей фазы, в которой выделены осредненная и пульсационная компоненты; величина константы  $\gamma_\omega$  зависит от скорости обтекания частицы и пропорциональна отношению плотностей газа и материала частиц:  $\gamma_\omega \sim \rho_g/\rho_p$ ;  $g_i$  — ускорение свободного падения.

Для инерционных частиц  $\tau \gg T_E$  ( $T_E$  — характерный временной масштаб турбулентных пульсаций жидкой фазы) пульсации скорости несущей фазы можно аппроксимировать в виде  $\delta$ -коррелированного во времени гауссовского случайного поля:

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1, t) u_j(\mathbf{x}_2, t + s) \rangle = T_E \langle u_i(\mathbf{x}_1, t) u_j(\mathbf{x}_2, t) \rangle \delta(s).$$

Используя аппарат функционального дифференцирования [12], аналогично [9] для ФПВ частиц запишем замкнутое уравнение

$$(1.2) \quad \frac{D\langle \Phi \rangle}{Dt} + \left\{ -\frac{D\langle V_k \rangle}{Dt} + \frac{\langle U_k \rangle + \tau g_k - \langle V_k \rangle}{\tau} - \gamma_\omega \varepsilon_{ijk} \langle \Omega_j \rangle \langle \langle U_i \rangle - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \langle V_j \rangle - \langle \Omega_j \rangle v_j + \omega_i (\langle U_i \rangle - \langle V_j \rangle) - \omega_i v_j \} \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial v_k} - \left( \frac{D \langle \Omega_k \rangle}{Dt} + \frac{\langle \Omega_k \rangle}{\tau_\omega} \right) \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial \omega_k} - \\
& - v_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial v_i} - v_k \frac{\partial \langle \Omega_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial \omega_i} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial v_k} \langle \Phi \rangle - \frac{1}{\tau_\omega} \frac{\partial}{\partial \omega_k} \omega_k \langle \Phi \rangle = \\
& = \left[ \frac{T_E}{\tau^2} \langle u_j u_k \rangle - \frac{2T_E}{\tau} \gamma_\omega \varepsilon_{ink} (\langle \Omega_i \rangle + \omega_i) \langle u_j u_n \rangle + T_E \gamma_\omega^2 \varepsilon_{nlj} \varepsilon_{imk} \langle u_m u_l \rangle \times \right. \\
& \quad \left. \times (\langle \Omega_n \rangle + \omega_n) (\langle \Omega_i \rangle + \omega_i) \right] \frac{\partial^2 \langle \Phi \rangle}{\partial v_j \partial v_k}, \\
& \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad v_i = V_i - \langle V_i \rangle, \quad \omega_i = \Omega_i - \langle \Omega_i \rangle, \\
& \langle V_i \rangle \langle N \rangle = \int dV \int d\Omega V_i \langle \Phi \rangle, \quad \langle \Omega_i \rangle \langle N \rangle = \int dV \int d\Omega \Omega_i \langle \Phi \rangle, \\
& \langle N \rangle = \int dV \int d\Omega \langle \Phi \rangle
\end{aligned}$$

$\langle N \rangle$ ,  $\langle V_i \rangle$ ,  $\langle \Omega_i \rangle$  — осредненные числовая концентрация частиц, скорость и скорость углового вращения). Уравнение (1.2) представляет собой уравнение Фоккера — Планка, обобщенное на случай частиц с вращением. Из уравнения для ФПВ (1.2) вытекает система уравнений для первых и вторых моментов пульсаций скорости и угловой скорости вращения частиц:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle N \rangle \langle V_k \rangle = 0, \\
& \frac{D \langle V_i \rangle}{Dt} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle v_i v_k \rangle}{\partial x_k} = \frac{\langle U_i \rangle + \tau g_i - \langle V_i \rangle}{\tau} - \\
& - \gamma_\omega \varepsilon_{ijk} (\langle \Omega_k \rangle (\langle U_j \rangle - \langle V_j \rangle) - \langle \omega_k v_j \rangle), \\
& \frac{D \langle \Omega_i \rangle}{Dt} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle \omega_i v_k \rangle}{\partial x_k} = - \frac{\langle \Omega_i \rangle}{\tau_\omega}, \\
& \frac{D \langle v_i v_j \rangle}{Dt} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle v_i v_j v_k \rangle}{\partial x_k} + \langle v_i v_k \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} + \langle v_j v_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} = \frac{2}{\tau} (\sigma_{ij}^0 - \langle v_i v_j \rangle), \\
& \sigma_{ij}^0 = \frac{T_E}{\tau} \langle u_i u_j \rangle - \frac{\tau \gamma_\omega}{2} \left\{ \varepsilon_{lmj} [(\langle U_m \rangle - \langle V_m \rangle) \langle \omega_l v_i \rangle + \langle \Omega_l \rangle \left( \frac{T_E}{\tau} \langle u_m u_i \rangle - \right. \right. \\
& \left. \left. - \langle v_m v_i \rangle \right) - \langle \omega_l v_m v_i \rangle] + \varepsilon_{lmi} [(\langle U_m \rangle - \langle V_m \rangle) \langle \omega_l v_j \rangle + \langle \Omega_l \rangle \left( \frac{T_E}{\tau} \langle u_m u_j \rangle - \right. \right. \\
& \left. \left. - \langle v_m v_j \rangle \right) - \langle \omega_l v_m v_j \rangle] \right\} + \frac{T_E \tau \gamma_\omega^2}{2} \varepsilon_{nlj} \varepsilon_{kmi} \langle u_m u_l \rangle (\langle \Omega_n \rangle \langle \Omega_k \rangle + \langle \omega_n \omega_k \rangle), \\
& \frac{D \langle \omega_i \omega_j \rangle}{Dt} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle \omega_i \omega_j v_k \rangle}{\partial x_k} + \langle \omega_i v_k \rangle \frac{\partial \langle \Omega_j \rangle}{\partial x_k} + \langle \omega_j v_k \rangle \frac{\partial \langle \Omega_i \rangle}{\partial x_k} = - \frac{2}{\tau_\omega} \langle \omega_i \omega_j \rangle, \\
& \frac{D \langle \omega_i v_j \rangle}{Dt} + \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial \langle N \rangle \langle \omega_i v_j v_k \rangle}{\partial x_k} + \langle \omega_i v_k \rangle \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_k} + \langle v_j v_k \rangle \frac{\partial \langle \Omega_i \rangle}{\partial x_k} + \\
& + \gamma_\omega \varepsilon_{lmi} [\langle \omega_l \omega_i \rangle (\langle U_m \rangle - \langle V_m \rangle) - \langle \Omega_l \rangle \langle v_m \omega_i \rangle - \langle \omega_l \omega_i v_m \rangle] = \\
& = - \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\omega} \right)^{-1} \langle \omega_i v_j \rangle.
\end{aligned}$$

Здесь вторые моменты пульсаций скорости и угловой скорости вращения частиц  $\langle v_i v_j \rangle$ ,  $\langle \omega_i \omega_j \rangle$  являются турбулентными потоками импульса и момента импульса частиц, возникающими в результате пульсационного движения дисперсной фазы. Третьи моменты пульсаций  $\langle v_i v_j v_k \rangle$ ,  $\langle \omega_i \omega_j v_k \rangle$ ,  $\langle \omega_i v_j v_k \rangle$  представляют собой турбулентный перенос интенсивности хаотического движения частиц.

Для замыкания полученной системы уравнений и построения граничных условий предлагается приближенный метод решения кинетиче-

ского уравнения (1.2) для ФПВ. Осредненные характеристики дисперсной фазы инерционных частиц слабо изменяются по сечению канала. В этом случае при решении кинетического уравнения можно ограничиться членами, линейными по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы. Из уравнения движения одиночной частицы (1.1) и уравнения для ФПВ (1.2) видно, что вращение частиц возникает только в результате столкновения со стенкой канала. Нулевое приближение в решении кинетического уравнения имеет вид

$$\langle \Phi_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, t) \rangle = \langle N \rangle \varphi_0(\mathbf{v}) \delta(\boldsymbol{\omega}),$$

$$\varphi_0(\mathbf{v}) = \prod_{i=1}^3 (2\pi\sigma_{ii})^{-1/2} \exp\left(-\frac{v_i v_i}{2\sigma_{ii}}\right), \quad \sigma_{ii} = \langle v_i v_i \rangle.$$

Замыкая систему уравнений для первых и вторых моментов в нулевом приближении и применяя процедуру решения кинетического уравнения (1.2), аналогичную методу Чепмена — Энскога [13], получаем приближенное решение для ФПВ, линейное по градиентам осредненных параметров дисперсной фазы:

$$(1.3) \quad \langle \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, t) \rangle = \langle N \rangle \varphi_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sigma_{ii}^0 (1 - \delta_{ik}) \frac{v_i v_k}{\sigma_{ii} \sigma_{kk}} - \frac{\tau}{2\sigma_{ii}} (v_i v_k - \varepsilon_{ik} v^2) \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} - \frac{\tau}{3} v_k \left[ \frac{v_i^2}{2\sigma_{ii}} - \left( \frac{1}{2} + \delta_{ik} \right) \right] \frac{\partial \ln \sigma_{ii}}{\partial x_k} \right\} \delta(\boldsymbol{\omega}) +$$

$$+ \langle N \rangle \varphi_0 \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\omega} \right)^{-1} v_k \frac{\partial \langle \Omega_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \delta(\boldsymbol{\omega})}{\partial \omega_i}.$$

Формула (1.3) позволяет вычислить выражения для вторых и третьих моментов пульсаций скорости и угловой скорости вращения частиц:

$$\langle v_i v_j \rangle = \sigma_{ii} \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \sigma_{ij}^0 - \frac{\tau}{2} \left[ \sigma_{ii} \frac{\partial \langle V_j \rangle}{\partial x_i} + \sigma_{jj} \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \frac{\partial \langle V_k \rangle}{\partial x_k} \right],$$

$$\langle v_i \omega_j \rangle = - \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\omega} \right)^{-1} \langle v_i v_k \rangle \frac{\partial \langle \Omega_j \rangle}{\partial x_k}, \quad \langle \omega_i \omega_j \rangle = 0,$$

$$\langle v_i \omega_j \omega_k \rangle = 0, \quad \langle v_i v_j v_k \rangle = - \delta_{ij} \frac{2\delta_{ik} + \delta_{ii}}{3} \tau \sigma_{kk} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_k},$$

$$\langle \omega_i v_m v_j \rangle = - \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\omega} \right)^{-1} \langle v_k v_m v_j \rangle \frac{\partial \langle \Omega_l \rangle}{\partial x_k}.$$

**2. Граничные условия.** Рассматривается модель столкновения частиц с поверхностью, в результате которого импульсы частиц, отраженных по осям  $y$  и  $z$ , составляют соответственно  $k_n$  и  $k_t$  — части импульсов падающих частиц (ось  $y$  направлена по нормали к поверхности,  $x$  совпадает с направлением течения, по оси  $y$  направление импульса отраженной частицы противоположно направлению импульса падающей), а аксиальные скорости и скорости углового вращения падающих и отраженных частиц связаны между собой [1–3]:

$$(2.1) \quad V_x'' = \alpha_1 V_x' + \alpha_2 \Omega_z', \quad \Omega_z'' = \beta_1 V_x' + \beta_2 \Omega_z', \quad V_y'' = -k_n V_y', \quad V_z'' = k_t V_z',$$

$$\alpha_1 = \frac{5 + 2k_t}{7}, \quad \alpha_2 = -d_p \frac{1 - k_t}{7}, \quad \beta_1 = -\frac{10(1 - k_t)}{7d_p}, \quad \beta_2 = \frac{5k_t + 2}{7}$$

(штрихом обозначены величины до соударения со стенкой, двумя штрихами — после соударения).

ФПВ частиц, отраженных от стенки канала, связана с ФПВ падающих частиц соотношением

$$\langle \Phi_+ (\mathbf{x}, \mathbf{V}'', \boldsymbol{\Omega}'', t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dV_x' \int_{-\infty}^0 dV_y' \int_{-\infty}^{\infty} dV_z' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_z' G(\mathbf{V}'', \boldsymbol{\Omega}''; \mathbf{V}', \boldsymbol{\Omega}') \times$$

$$\times \langle \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{V}', \boldsymbol{\Omega}', t) \rangle, \quad V_y'' > 0,$$

где ядро преобразования явным образом зависит от соотношений (2.1), описывающих результат столкновения частиц с поверхностью:

$$G(\mathbf{V}'', \boldsymbol{\Omega}''; \mathbf{V}', \boldsymbol{\Omega}') = \delta(V_z'' - k_t V_z') \delta(V_y'' + k_n V_y') \delta(\beta_2 V_x'' - \alpha_2 \Omega_z'' - k_t V_z') \times \\ \times \delta(\alpha_1 \Omega_z'' - \beta_1 V_x'' - k_t \Omega_z').$$

Вычисляя сумму потоков характеристик дисперсной фазы для падающих и отраженных от поверхности частиц и приравнявая ее потоку в течении, отнесенному к поверхности [9, 11], находим граничные условия для нормальной и аксиальной скоростей дискретной фазы, угловой скорости вращения частиц, а также интенсивности поперечных и продольных пульсаций скорости частиц ( $y = 0$ ):

$$\langle V_y \rangle + \frac{1 - k_{r_1}}{1 + k_{r_1}} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} = 0, \\ \frac{\tau \sigma_{yy}}{2} \frac{\partial \langle V_x \rangle}{\partial y} - \left[ \langle V_y \rangle + \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \frac{1 - k_n^2 k_t - (3/7) k_n (1 - k_t)}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \right] \langle V_x \rangle = \\ = - \frac{2 k_n \alpha_2}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \langle \Omega_z \rangle, \\ \left( \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_\omega} \right)^{-1} \sigma_{yy} \frac{\partial \langle \Omega_z \rangle}{\partial y} - \left[ \langle V_y \rangle + \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \frac{1 - k_n^2 k_t + (3/7) k_n (1 - k_t)}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \right] \langle \Omega_z \rangle = \\ = - \frac{2 k_n \beta_1}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \langle V_x \rangle, \\ \tau \sigma_{yy} \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \left[ \langle V_y \rangle + 2 \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \frac{1 - k_{r_1}^2}{1 + k_{r_1}^2} \right] \sigma_{yy} = 0, \\ \frac{\tau}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - \left[ \langle V_y \rangle + \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy} \right)^{1/2} \frac{1 - k_n \alpha_1^2}{1 + k_n \alpha_1^2} \right] \sigma_{xx} = 0.$$

Приведенные граничные условия обобщают полученные в [9, 11] для течения частиц с учетом их вращения, приобретаемого в результате столкновения со стенкой канала.

**3. Результаты расчетов.** Расчеты гидродинамики потока газозвеси проведены для стабилизированного участка течения в круглой трубе. В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$  уравнения баланса импульса, момента импульса и концентрации частиц в безразмерных переменных имеют вид

$$(3.1) \quad \frac{1}{(1 - \bar{y}) \bar{N}} \frac{d}{d\bar{y}} \left[ (1 - \bar{y}) \bar{N} \frac{\tau^+ \sigma_{yy}^+ d\bar{V}_x}{z} \right] - V_y^+ \frac{d\bar{V}_x}{d\bar{y}} R^+ - \\ - \frac{R^{+2}}{\tau^+} \bar{V}_x = - \frac{R^{+2}}{\tau^+} \bar{U}_x, \\ \bar{U}_x' = \bar{U}_x - \gamma_\omega \left[ \bar{\Omega} (U_y^+ - V_y^+) \frac{St}{U_m^+} + \left( 1 + \frac{\tau}{\tau_\omega} \right)^{-1} \frac{St^2}{U_m^+} \sigma_{yy} \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{y}} \right] + St \bar{g}_x, \\ \frac{1}{(1 - \bar{y}) \bar{N}} \frac{d}{d\bar{y}} \left[ (1 - \bar{y}) \bar{N} \tau^+ \left( 1 + \frac{\tau}{\tau_\omega} \right)^{-1} \sigma_{yy}^+ \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{y}} \right] - R^+ V_y^+ \frac{d\bar{\Omega}}{d\bar{y}} - \\ - \frac{R^{+2}}{\tau^+} \left( \frac{\tau}{\tau_\omega} \right) \bar{\Omega} = 0, \\ \tau^+ \sigma_{yy}^+ \frac{d\bar{N}}{d\bar{y}} - R^+ (V_{ni}^+ + \bar{U}_y^+) \bar{N} = R^+ (1 - \bar{y}) J^+ = - \bar{N} V_y^+, \\ J^+ = \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \frac{1 - k_n}{1 + k_n} \bar{N}_w, \quad N_m = 2 \int_0^1 d\bar{y} (1 - \bar{y}) \langle N \rangle,$$

$$\bar{N} = \langle N \rangle / N_m, \quad V_{mig}^+ = \frac{\tau^+}{R^+} \frac{d\sigma_{yy}^+}{dy},$$

$$\tilde{U}_y^+ = \gamma_\omega \left[ \text{St} U_m^+ \bar{\Omega} (\bar{U}_x - \bar{V}_x) - \left(1 + \frac{\tau}{\tau_\omega}\right)^{-1} \frac{\text{St}^3}{2U_m^+} \sigma_{yy}^+ \frac{d\bar{\Omega}}{dy} \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right] + U_y^+,$$

где  $\bar{U} = \langle U \rangle / U_m$ ;  $\bar{V} = \langle V \rangle / U_m$  ( $U_m$  — среднemasовая скорость потока);  $U_m^+ = U_m / u_+$  ( $u_+$  — динамическая скорость жидкой фазы);  $R^+ = Ru^+ / \nu$  ( $R$  — радиус канала);  $\nu$  — кинематическая вязкость газа;  $\tau^+ = \tau u_+^2 / \nu$ ;  $\text{St} = \tau U_m / R$  — число Стокса частиц;  $\bar{\Omega} = \Omega_\theta R / U_m$  — безразмерная скорость вращения частиц;  $V_{mig}$  — скорость турбулентной миграции частиц, вызванная неоднородностью поля пульсационной энергии дискретной фазы;  $J^+ = J / u_+$  — поток частиц на стенку канала;  $\bar{N}_w$  — концентрация примеси на поверхности;  $\bar{y} = 1 - r/R$ ;  $r$  — радиальная координата;  $\bar{g}_x = g_x R / U_m^2$ .

Граничные условия для уравнений (3.1) отражают симметричность течения на оси канала, отсутствие вращения потока дисперсной фазы на оси, а также эффект возникновения вращения частиц в результате соударения со стенкой:

$$\bar{y} = 1: \quad \frac{d\bar{V}_x}{dy} = 0, \quad \bar{\Omega} = 0;$$

$$\bar{y} = 0:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^+ \sigma_{yy}^+}{2} \frac{d\bar{V}_x}{dy} - R^+ \left[ V_y^+ + \frac{1 - k_n^2 k_t - (3/7) k_n (1 - k_t)}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \right] \times \\ & \quad \times \bar{V}_x = - \frac{2k_n R^+ \bar{\alpha}_2}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \bar{\Omega}, \\ & \tau^+ \left(1 + \frac{\tau}{\tau_\omega}\right)^{-1} \sigma_{yy}^+ \frac{d\bar{\Omega}}{dy} - R^+ \left[ V_y^+ + \frac{1 - k_n^2 k_t + (3/7) k_n (1 - k_t)}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \right] \bar{\Omega} = \\ & \quad = - \frac{2k_n \bar{\beta}_1 R^+}{1 + k_n (1 + k_t) + k_n^2 k_t} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \bar{V}_x, \\ & \quad \bar{\alpha}_2 = \bar{d} (1 - k_t) / 7, \quad \bar{\beta}_1 = 10(1 - k_t) / (7\bar{d}), \quad \bar{d} = d_p / R. \end{aligned}$$

Интенсивность пульсационного движения частиц в аксиальном и нормальном к поверхности канала направлениях рассчитывается согласно уравнениям

$$\begin{aligned} (3.2) \quad & \frac{1}{(1 - \bar{y}) \bar{N}} \frac{d}{dy} \left[ (1 - \bar{y}) \bar{N} \frac{\tau^+ \sigma_{yy}^+}{3} \frac{d\sigma_{xx}^+}{dy} \right] - R^+ V_y^+ \frac{d\sigma_{xx}^+}{dy} - \frac{2R^{+2}}{\tau^+} \sigma_{xx}^+ = \\ & = - \left[ \frac{2R^{+2}}{\tau^+} \sigma_{xx}^0 + R^+ U_m^+ \text{St} \sigma_{yy}^+ \left( \frac{d\bar{V}_x}{dy} \right)^2 \right], \\ & \sigma_{xx}^0 = \frac{T^+}{\tau^+} e_{xx}^+ + \frac{\gamma_\omega^2}{2} \text{St} \frac{T^+ U_m^+}{R^+} e_{yy}^+ \bar{\Omega}^2 - \gamma_\omega \frac{\text{St}^2}{2} \sigma_{yy}^+ \bar{\Omega} \frac{d\bar{V}_x}{dy}, \\ & \frac{1}{(1 - \bar{y}) \bar{N}} \frac{d}{dy} \left[ (1 - \bar{y}) \bar{N} \tau^+ \sigma_{yy}^+ \frac{d\sigma_{yy}^+}{dy} \right] - R^+ V_y^+ \frac{d\sigma_{yy}^+}{dy} - \frac{2R^{+2}}{\tau^+} \sigma_{yy}^+ = - \frac{2R^{+2}}{\tau^+} \sigma_{yy}^0, \\ & \sigma_{yy}^0 = \frac{T^+}{\tau^+} e_{yy}^+ + \frac{\gamma_\omega^2}{2} \text{St} \frac{T^+ U_m^+}{R^+} e_{xx}^+ \bar{\Omega}^2 + \gamma_\omega \left(1 + \frac{\tau}{\tau_\omega}\right)^{-1} \text{St} (\bar{U}_x - \bar{V}_x) \sigma_{yy}^+ \frac{d\bar{\Omega}}{dy} + \\ & \quad + \frac{\gamma_\omega}{2} \text{St}^2 \sigma_{yy}^+ \bar{\Omega} \frac{d\bar{V}_x}{dy}, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij} / u_+^2$ ;  $e_{ij}^+ = \langle u_i u_j \rangle / u_+^2$ ;  $T^+ = T_E u_+^2 / \nu$  — безразмерный времен-

ной масштаб турбулентных пульсаций газа. Граничные условия для уравнений баланса интенсивности пульсационного движения частиц (3.2) записываются из условия симметрии на оси и столкновения со стенкой канала:

$$\begin{aligned} \bar{y} = 1: \quad \frac{d\sigma_{xx}^+}{dy} = \frac{d\sigma_{yy}^+}{dy} = 0; \\ \bar{y} = 1: \quad \tau^+ \sigma_{yy}^+ \frac{d\sigma_{yy}^+}{dy} - R^+ \left[ V_y^+ + 2 \frac{1 - k_n^3}{1 + k_n^3} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \right] \sigma_{yy}^+ = 0, \\ \frac{\tau^+ \sigma_{yy}^+}{3} \frac{d\sigma_{xx}^+}{dy} - R^+ \left[ V_y^+ + \frac{1 - k_n \alpha_1^2}{1 + k_n \alpha_1^2} \left( \frac{2}{\pi} \sigma_{yy}^+ \right)^{1/2} \right] \sigma_{xx}^+ = 0. \end{aligned}$$

При проведении расчетов учитывается зависимость времен релаксаций поступательного и вращательного движений частицы от осредненной относительной скорости и скорости вращения [1, 14]:

$$\begin{aligned} \tau = \tau^0 (1 + \text{Re}_p/60)^{-1}, \quad \tau^0 = (1/18) \rho_p / \rho_g d_p^2 / \nu, \\ \text{Re}_p = |\bar{U}_x - \bar{V}_x| \bar{d} \text{Re} / 2, \quad \text{Re} = 2RU_m / \nu, \\ \tau_\omega = \tau_\omega^0 (1 + \text{Re}_\omega^{1/2} / 7,8)^{-1}, \quad \tau_\omega^0 = (1/60) \rho_p / \rho_g d_p^2 / \nu, \\ \text{Re}_\omega = \bar{d}^2 \bar{\Omega} \text{Re} / 8. \end{aligned}$$

Константа  $\gamma_\omega$  оценивалась по результатам [15]:  $\gamma_\omega = 6/\pi c_L \rho_g / \rho_p$ ,  $c_L \approx 0,3$ . Расчет параметров течения несущей фазы проводился на основе однопараметрической модели турбулентности [16]. Интенсивность поперечных пульсаций скорости газа и временной масштаб энергоемких пульсаций определяются по энергии турбулентности и пространственному масштабу Никурадзе  $L_E$ :

$$\langle u_i^2 \rangle = k_y E, \quad T_E = \gamma_E L_E / E^{1/2}, \quad k_y = 0,2, \quad \gamma_E = 1,16.$$

На рис. 1—5 представлены результаты расчетов характеристик дисперсной фазы при турбулентном течении газовзвеси в вертикальном цилиндрическом канале в случае подъемного (сплошные кривые) и опускающего (штриховые) течения. Характеристики несущей фазы показаны штрихпунктирными линиями. Расчеты проведены для условий экспериментов в [17]. Кривые 1—4 соответствуют диаметру частиц  $d_p = 100, 200, 400, 800$  мкм,  $k_n = k_t = 0,8$  (экспериментальные данные отмечены точками). Наблюдается тесная взаимосвязь пульсационных и осредненных характеристик частиц в течении. На рис. 1 показано распределение скорости частиц ( $U_0$  — скорость газа на оси канала); видно, что хаотическое движение частиц поперек канала приводит к интенсивному переносу аксиальной компоненты импульса к стенкам, а потеря импульса частиц после соударений с поверхностью вызывает значительное осредненное скоростное скольжение фаз. В результате столкновения частиц со стенками канала частицы приобретают вращение  $\Omega_0 > 0$  (рис. 2). Максимум угловой скорости вращения достигается на внутренней поверхности канала. Скорость вращения мелких частиц на стенке значительно превосходит скорость вращения крупных, однако вследствие инерции угловая скорость вращения крупных частиц уменьшается к центру канала в меньшей степени, чем мелких. В той области течения, где частицы опережают несущий газ, сила Магнуса направлена к омываемой поверхности, а где частицы отстают от движения несущей фазы, сила Магнуса направлена к оси канала.

На рис. 3 представлены концентрации частиц при подъемном и опускающем течении. Отметим, что профиль концентрации частиц складывается под воздействием скорости турбулентной миграции частиц, вызванной неоднородностью пульсационного поля нормальных к поверхности скоростей частиц и направленной в сторону уменьшения интенсивности

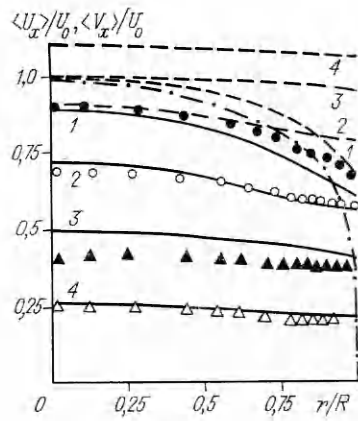


Рис. 1

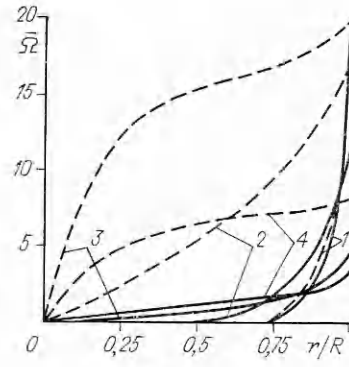


Рис. 2

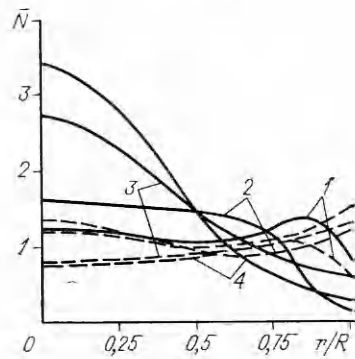


Рис. 3

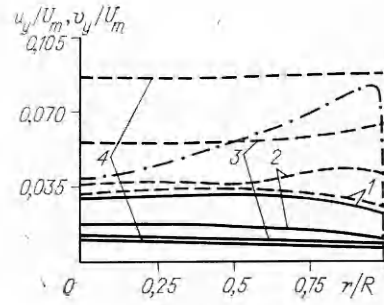


Рис. 4

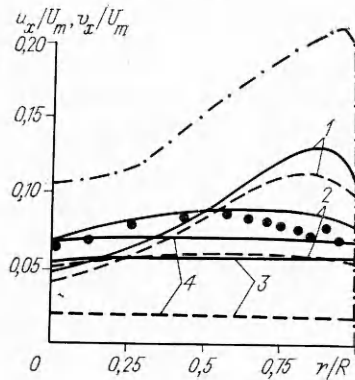


Рис. 5

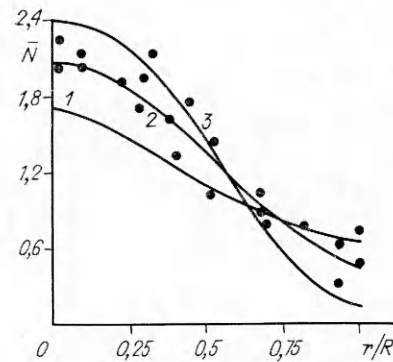


Рис. 6

пульсационного движения примеси (силы Магнуса), а также турбулентной диффузии частиц, уменьшающей градиенты концентрации. Из рис. 3 следует, что для более крупных частиц при подъемном течении в формировании профиля концентрации существенную роль играет сила Магнуса. При этом уровень турбулентных пульсаций скорости, нормальной к поверхности, для крупных частиц ниже, чем для мелких (рис. 4,  $u_y = \langle u_y^2 \rangle^{1/2}$ ,  $v_y = \langle v_y^2 \rangle^{1/2}$ ), а скорость турбулентной миграции мала вследствие однородного профиля пульсационной энергии по сечению. В случае опускного течения увеличение аксиальной скорости примеси на стенке вызывает рост угловой скорости вращения частиц по сравнению с подъемным течением (рис. 2). Это в свою очередь приводит к дополнительной генерации интенсивности нормальных пульсаций скорости дискретной фазы (рис. 4) и уменьшению интенсивности аксиальных пульсаций ско-



росту частиц (рис. 5,  $u_x = \langle u_x^2 \rangle^{1/2}$ ,  $v_x = \langle v_x^2 \rangle^{1/2}$ , точки отвечают  $d_p = 800$  мкм). Увеличение интенсивности хаотического движения частиц в сечении обуславливает большую наполненность профилей угловой скорости вращения при опускном течении (рис. 2), а также более равномерные профили концентрации частиц (рис. 3). Отметим, что сравнительно высокий уровень пульсационного движения крупных частиц получается в расчетах только при учете генерации хаотического движения в результате столкновений со стенками канала.

На рис. 6 представлено сравнение результатов расчета концентрации частиц ( $d_p = 23$  мкм) с экспериментальными данными, полученными в [18] для высокоскоростного потока, когда влиянием силы тяжести на движение частиц можно пренебречь (кривые 1—3 соответствуют скорости  $U_m = 98, 144, 190$  м/с). Отметим, что колоколообразное распределение концентрации частиц в сечении канала может быть получено в расчетах только с учетом силы Магнуса.

Таким образом, в работе на основе статистического подхода разработано замкнутое описание течения газозвеси частиц, интенсивно взаимодействующих со стенками канала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шрайбер А. А., Гавин Л. Б., Наумов В. А., Яценко В. П. Турбулентные течения газозвесей. — Киев: Наук. думка, 1987.
2. Matsumoto S., Saito S., Maeda S. Simulation of gas-solid two-phase flow in horizontal pipe // J. Chem. Eng. Japan. — 1976. — V. 9, N 10.
3. Кондразьев Л. В., Шор В. В. Исследование турбулентного течения газозвеси в трубе с учетом соударения частиц со стенкой и вращения частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 1.
4. Govan A. H., Hewitt G. F., Ngan C. F. Particle motion in a turbulent pipe flow // Int. J. Multiphase Flow. — 1989. — V. 15, N 3.
5. Shuen J.-S., Chen L.-D., Faeth G. M. Evaluation of a stochastic model of particle dispersion in a turbulent round jet // AIChE J. — 1983. — V. 29, N 1.
6. Kallio G. A., Reeks M. W. A numerical simulation of particle deposition in turbulent boundary layers // Int. J. Multiphase Flow. — 1989. — V. 15, N 3.
7. Squires K. D., Eaton J. K. Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence // Phys. Fluids A: Fluid Dynamics. — 1990. — V. 2, N 7.
8. Lee S. L. Particle motion in a turbulent two-phase dilute suspension flow // Particle and Particle systems Characterization. — 1989. — V. 6, N 1.
9. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Расчет осредненного скоростного скольжения фаз при турбулентном течении дисперсных потоков в каналах // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 2.
10. Гусев И. Н., Зайчик Л. И. Моделирование динамики частиц в пристеночной области газодисперсного турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1991. — № 1.
11. Деревич И. В., Ерошенко В. М. Граничные условия для уравнений тепло- и массопереноса грубодисперсных аэрозолей в турбулентном потоке // ИФЖ. — 1991. — Т. 61, № 4.
12. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
13. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. — М.: Мир, 1973.
14. Dennis S. C., Singh S. N., Ingham D. B. The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers // J. Fluid Mech. — 1980. — V. 101, N 2.
15. Tsuji Y., Merikawa Y., Mizuno Y. Experimental measurement of the Magnus force on a rotating sphere at low Reynolds numbers // Trans. ASME. J. Fluids Engng. — 1985. — V. 107, N 4.
16. Derевич I. V., Eroshenko V. M., Zaichik L. I. Hydrodynamics and heat transfer of turbulent gas-suspension flows in tubes — 1. Hydrodynamics // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1989. — V. 32, N 12.
17. Lee S. L., Durst F. On the motion of particles in turbulent duct flow // Int. J. Multiphase Flow. — 1982. — V. 1, N 2.
18. Баланин Б. А., Злобин В. В. Экспериментальное исследование аэродинамического сопротивления простых тел в двухфазном потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1979. — № 3.

г. Москва

Поступила 25/XI 1991 г.