

20. Дудина Т. А., Егерев С. В., Лямшев Л. М., Наугольных К. А. К нелинейной теории теплового механизма генерации звука лазерным излучением // Акуст. журн.— 1979.— Т. 25, вып. 4.
21. Божко А. И., Бункин Ф. В., Коломенский Ал. А. и др. Лазерное возбуждение мощного звука // Тр. ФИАН. Исследования по гидродинамике.— 1984.— Т. 156.
22. Sigrist M. W. Laser generation of acoustic wave in liquids and gases // J. Appl. Phys.— 1986.— V. 60, N 7.
23. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // УФН.— 1976.— Т. 118, вып. 2.
24. Элайсез М., Гарсиа-Молинер Ф. Распространение волновых пакетов // Физическая акустика/Под ред. У. Мэзона: Пер. с англ./Под ред. Л. Д. Розенберга.— М.: Мир, 1973.— Т. 5.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1988.
26. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1968.— № 5.
27. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1983.

г. Владивосток

Поступила 12/III 1992 г.,
в окончательном варианте — 11/XI 1992 г.

УДК 532.51

Ю. Я. Трифонов

ВЛИЯНИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ИСПАРЕНИЕ СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

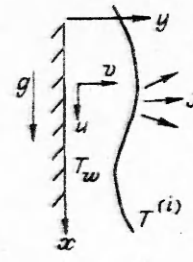
Введение. Широко известно, что испаряющаяся пленка жидкости обеспечивает очень эффективное охлаждение нагретых твердых поверхностей ввиду малости ее толщины и близости температуры свободной поверхности к температуре насыщения. Благодаря этому она находит широкое применение в различных технических устройствах, и исследование явлений и процессов, существенно влияющих на поперечный градиент температуры в такой пленке, является актуальной задачей.

Стекание изотермической пленки жидкости по вертикальной плоскости с гладкой свободной поверхностью неустойчиво при всех числах Рейнольдса [1]. Рост длинноволновых возмущений ограничивается нелинейными эффектами, и в результате формируются волновые режимы конечной амплитуды. Расчет таких режимов на основе полной системы уравнений Навье — Стокса все еще остается очень трудной задачей. В настоящее время известны два различных подхода, использующих малый параметр длинноволности, которые ведут к упрощению исходных уравнений. Первый подход предлагается в [2] и приводит к единственному эволюционному уравнению на возмущения свободной поверхности. При его выводе все величины, входящие в исходные уравнения Навье — Стокса и граничные условия, кроме толщины пленки, разлагались в ряды по малому параметру длинноволности ϵ , и в каждом из его порядков решалась линейная задача. Затем после подстановки в кинематическое условие получалось эволюционное уравнение. Данный подход ограничен малыми амплитудами возмущений и соответственно малыми числами Рейнольдса ($Re < 1$). Второй подход [3] использует осреднение уравнений движения поперек слоя. Полученные на его основе результаты [4—6] демонстрируют полное количественное согласие со всеми известными экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Устойчивость безволнового стекания по вертикальной плоскости испаряющейся и конденсирующейся пленок была исследована в [7—10]. Испарение

© Ю. Я. Трифонов, 1993

оказывает дополнительное дестабилизирующее влияние, расширяя диапазон нарастающих во времени длинноволновых возмущений. Влияние конденсации имеет противоположный эффект, и в этом случае появляется критическое число Рейнольдса, ниже которого течение конденсирующейся пленки с безволновой свободной поверхностью устойчиво. Нелинейная стадия развития неустойчивых возмущений на испаряющейся и конденсирующейся пленках изучалась в [11]. Был использован подход, аналогичный случаю изотермической пленки [2], который справедлив для описания малоамплитудных возмущений.



Р и с. 1

Цель настоящей работы — развитие интегрального подхода для описания волн на испаряющейся пленке жидкости без предположения о малости их амплитуд.

Вывод основных уравнений. Рассматривается стекание тонкого слоя вязкой жидкости по нагретой поверхности с учетом испарения со свободной поверхности. Схема течения и основные обозначения приведены на рис. 1. Граничные условия на свободной поверхности записываются следующим образом [11]:

$$\begin{aligned}
 J &\equiv \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)}) \mathbf{n} = \rho^{(V)} (\mathbf{v}^{(V)} - \mathbf{v}^{(i)}) \mathbf{n}, \\
 J \{ r + [(\mathbf{v}^{(V)} - \mathbf{v}^{(i)}) \mathbf{n}]^2 / 2 - [(\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)}) \mathbf{n}]^2 / 2 \} + \lambda \nabla T \mathbf{n} - \lambda^{(V)} \nabla T^{(V)} \mathbf{n} + \\
 &+ (\tau \mathbf{n}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(i)}) - (\tau^{(V)} \mathbf{n}) (\mathbf{v}^{(V)} - \mathbf{v}^{(i)}) = 0, \\
 J (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(V)}) \mathbf{n} - (\tau - \tau^{(V)}) \mathbf{n} \mathbf{n} + p - p^{(V)} &= 2H\sigma, \\
 J (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(V)}) \mathbf{t} - (\tau - \tau^{(V)}) \mathbf{n} \mathbf{t} = 0, \quad (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(V)}) \mathbf{t} &= 0, \\
 \mathbf{n} &\equiv (-\partial h / \partial x, 1) / N, \quad \mathbf{t} \equiv (1, \partial h / \partial x) / N, \quad 2H \equiv -\partial^2 h / \partial x^2 / N^2, \\
 N &= \sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь J — поток массы вследствие испарения с единицы поверхности за единицу времени; h — мгновенная толщина пленки, отсчитываемая от твердой поверхности; σ — коэффициент поверхностного натяжения; r — теплота испарения; $\mathbf{v}^{(i)}$ — вектор скорости частиц свободной поверхности; величины с верхним индексом соответствуют пару, а без него — жидкости; $\mathbf{v} \equiv (u, v)$ — вектор скорости; T — температура; p — давление; τ — тензор вязких напряжений; ρ — плотность; λ — коэффициент теплопроводности. Первое уравнение представляет собой определение потока массы J и его закон сохранения, второе, третье и четвертое — законы сохранения энергии и двух компонент импульса соответственно.

Здесь и далее пренебрегаем зависимостью физических величин жидкости от температуры (ограничиваясь в дальнейшем малыми перепадами температуры). Переходя к пределам $\rho^{(V)} / \rho \rightarrow 0$, $\mu^{(V)} / \mu \rightarrow 0$ и $\lambda^{(V)} / \lambda \rightarrow 0$ (μ — динамическая вязкость), в безразмерном виде уравнения движения и граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + 3 \right), \\
 \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \\
 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\varepsilon \text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \right), \\
 u^* = v^* &= 0, \quad T^* = 1, \quad y^* = 0, \\
 \frac{J^*}{\varepsilon \text{Ku}_m} &= v^* - \frac{\partial h^*}{\partial t^*} - u^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*}, \quad y^* = h^* (x^*, t^*),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& J^* + \frac{J^{*2}}{(Ku_m D)^2 \kappa} - \frac{\varepsilon^2}{N} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{1}{N} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + \\
& + \frac{4\varepsilon J^*}{\kappa \operatorname{Re} N^2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] = 0, \\
& - \frac{J^{*2}}{(Ku_m)^2 D} - \frac{2\varepsilon}{\operatorname{Re} N^2} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right] + p^* = \\
& = - \frac{3^{1/3} \varepsilon^2 \operatorname{Fi}^{1/3}}{\operatorname{Re}^{5/3} N^3} \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}}, \quad -4\varepsilon^2 \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \varepsilon^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$Ku_m \equiv \operatorname{Re} \operatorname{Pr} Ku, \quad N = (1 + \varepsilon^2 (\partial h^* / \partial x^*)^2)^{1/2},$$

где $u^* = u/u_0$; $v^* = v/(\varepsilon u_0)$; $y^* = y/h_0$; $x^* = \varepsilon x/h_0$; $t^* = \varepsilon u_0 t/h_0$; $J^* = h_0 r J / \lambda \Delta T$; $\Delta T = T_w - T_s$; $T^* = (T - T_s) / \Delta T$; $p^* = p / \rho u_0^2$; $\operatorname{Re} = u_0 h_0 / \nu$; $\operatorname{Pr} = \nu / k$; $Ku = r / C_p \Delta T$; $\kappa = 2r / u_0^2$; $\operatorname{Fi} = (\sigma / \rho)^3 / g \nu^4$; $D = \rho^{(\nu)} / \rho$; $u_0 = g h_0^2 / 3 \nu$; $\varepsilon = h_0 / L$; L — масштаб волнового течения вдоль координаты x ; T_w — температура стенки; T_s — температура насыщенных паров; k — коэффициент теплопроводности.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинноволновых возмущений ($\varepsilon \ll 1$). С учетом того что, как правило, величина κ очень большая, исходные уравнения сильно упрощаются и после интегрирования поперек слоя принимают вид

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy &= \frac{3^{1/3} \operatorname{Fi}^{1/3}}{\operatorname{Re}^{5/3}} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^2} - \frac{h}{Ku_m^2 D} \frac{\partial J^2}{\partial x} - \frac{J}{Ku_m} u \Big|_{y=h} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(3h - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right), \\
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= - \frac{J}{Ku_m}, \quad q = \int_0^h u dy, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad J = - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad T \Big|_{y=0} = 1.
\end{aligned}$$

Здесь опущены знаки обезразмеривания и величина ε считается равной единице. Отметим, что, несмотря на отбрасывание конвективных членов в уравнении теплопроводности, их учет в первом уравнении системы (1) корректен, так как член в скобках в этом уравнении мал. Отметим также, что сохранение члена с капиллярным давлением возможно, если $\operatorname{Fi} \sim \operatorname{Re}^5 / \varepsilon^6$, что справедливо для большого числа жидкостей. Таким образом, из приведенного анализа следует, что система уравнений (1) корректна для описания эволюции возмущений, если $\varepsilon \ll \min(1, \operatorname{Re} \operatorname{Pr})$ и $\operatorname{Fi} \sim \operatorname{Re}^5 / \varepsilon^6$.

В дальнейшем используем профиль скорости $u(x, y, t) = (3q(x, t) / h(x, t)) (y/h(x, t) - y^2/2h^2(x, t))$ и условие на свободной поверхности $T|_{y=h} = 0$. Безволновому стеканию соответствует решение $q = \Phi^3$, $h = \Phi = (1 - 4x/3 Ku_m^0)^{1/4}$, где Ku_m^0 определяется в начальном сечении потока. Таким образом, имеем неоднородное в пространстве основное решение. Дальнейшая задача заключается в рассмотрении линейной устойчивости этого решения и возможных нелинейных режимов, к которым может приводить эволюция неустойчивых возмущений. Сделав в (1) замену $q \rightarrow \Phi^3 + q$, $h \rightarrow \Phi + h$ и проведя соответствующие вычисления, приходим к системе нелинейных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от x . В настоящее время не существует строгих математических подходов и соответственно численных алгоритмов для рассмотрения возмущений, развивающихся как во времени, так и в пространстве. Поэтому далее ограничиваемся случаем малых перепадов температуры ($Ku_m^0 \gg 1$) и на фоне

медленно меняющегося основного течения будем рассматривать линейную устойчивость и различные возможные нелинейные периодические по координате x решения. Таким образом, вводится два масштаба изменений координаты x , один из которых моделируется изменением параметра Φ . Используемый подход (квазипараллельное приближение) достаточно широко применяется в задачах с неоднородностью по пространственной переменной и справедлив при $|\partial h/\partial x| \sim \varepsilon \gg |d\Phi/dx| = 1/(3\Phi^3 \text{Ku}_m^0)$, т. е. длина волны λ рассматриваемых периодических возмущений должна быть много меньше характерного масштаба изменений основного решения.

Сделав преобразование $x \rightarrow (\text{Fi}/9 \text{Re}^5)^{1/6} x$, $t \rightarrow (\text{Fi}/9 \text{Re}^5)^{1/6} t$, приходим к системе уравнений, являющейся основой проведенных в работе расчетов:

$$(2) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{(q + \Phi^3)^2}{h + \Phi} + \frac{1,2}{K} \left(\frac{5\Phi}{3} + \frac{(q + \Phi^3)^2}{3\Phi^3(h + \Phi)^2} - \frac{2(q + \Phi^3)}{\Phi(\Phi + h)} \right) =$$

$$= Zh - (Z + 1,5/K) \left(\frac{q + \Phi^3}{(h + \Phi)^2} - \Phi \right) + 3 \left(\Phi \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h \frac{\partial^3 h}{\partial x^2} - \frac{21}{(3K)^3} \frac{h}{\Phi^{11}} \right) +$$

$$+ \frac{2}{D(\text{Ku}_m^0)^2} \left(\frac{1}{3K\Phi^5} + \frac{1}{(\Phi + h)^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{3K\Phi^3} \right) \right), \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi + h} \right), \quad \langle q \rangle = 0.$$

Здесь толщина h и расход q предполагаются периодическими по координате x ; $Z = (81 \text{Fi}/\text{Re}^{11})^{1/6}$; $K = (9 \text{Re}^5/\text{Fi})^{1/6} \text{Ku}_m^0$; масштабы всех величин и Re определяются по начальному сечению потока; Φ — параметр, характеризующий удаление от начального сечения (крупномасштабная пространственная переменная) и меняющийся от 1 до 0 для испарения ($K > 0$) и от 1 до ∞ для конденсации; $\langle q \rangle \equiv (1/\lambda) \int_0^\lambda q(x, t) dx$ — средний по длине волны расход. Для лучшего понимания физического смысла параметров Z и K отметим их простую связь с легко измеряемыми на практике параметрами: $\text{Re}/\text{Ka} = 81^{1/11}/Z^{6/11}$ и $\text{Pr Ku} = KZ/3$ ($\text{Ka} = \text{Fi}^{1/11}$ — число Капицы).

Безволновому стеканию соответствует решение уравнений (2) $q = 0$, $h = 0$. Для исследования его устойчивости относительно периодических в пространстве возмущений $\sim \exp[i\alpha(x - \Omega t)]$ после линеаризации системы (2) из условия разрешимости нетрудно получить, что возмущения с $\alpha < \alpha_{\text{neut}}$ нарастают со временем, а с $\alpha > \alpha_{\text{neut}}$ затухают. Выражения для α_{neut} и для скорости нейтральных возмущений Ω_{neut} имеют довольно громоздкий вид

$$(3) \quad \Omega_{\text{neut}} = \frac{A_1 C_1 - B_2}{A_2 + C_1},$$

$$\alpha_{\text{neut}}^2 = \frac{\Omega_{\text{reut}}^2 - A_1 \Omega_{\text{neut}} - B_1 \pm [(\Omega_{\text{reut}}^2 - A_1 \Omega_{\text{neut}} - B_1)^2 + 4D_1 A_2 C_1]^{0,5}}{-2D_1},$$

$$A_1 = 2,4\Phi^2, \quad C_1 = -1/K\Phi^2, \quad A_2 = -0,1/K\Phi^2 + Z/\Phi^2, \quad D_1 = -3\Phi,$$

$$B_1 = -1,2\Phi^4 - 2/(D\Phi^2 (\text{Ku}_m^0)^2),$$

$$B_2 = -3Z - 1,4/K + 7/(3K^3\Phi^{11}) - 4/(3DK\Phi^6 (\text{Ku}_m^0)^2)$$

и трудно поддаются аналитическому исследованию. Используя тот факт, что для применимости плоскопараллельного приближения необходимо, чтобы $\text{Ku}_m^0 \gg 1$, формулы (3) можно упростить:

$$(4) \quad \Omega_{\text{neut}} \approx 3\Phi^2, \quad \alpha_{\text{neut}}^2 \approx \Phi^3/2 \pm [\Phi^6/4 + Z/(3K\Phi^5)]^{0,5}.$$

В случае испаряющейся пленки ($K > 0$) надо брать только один корень для α_{neut} в (3) и (4), а при конденсации ($K < 0$) появляется критическое значение параметра Z для начала волнообразования, и обе ветви α_{neut} имеют смысл.

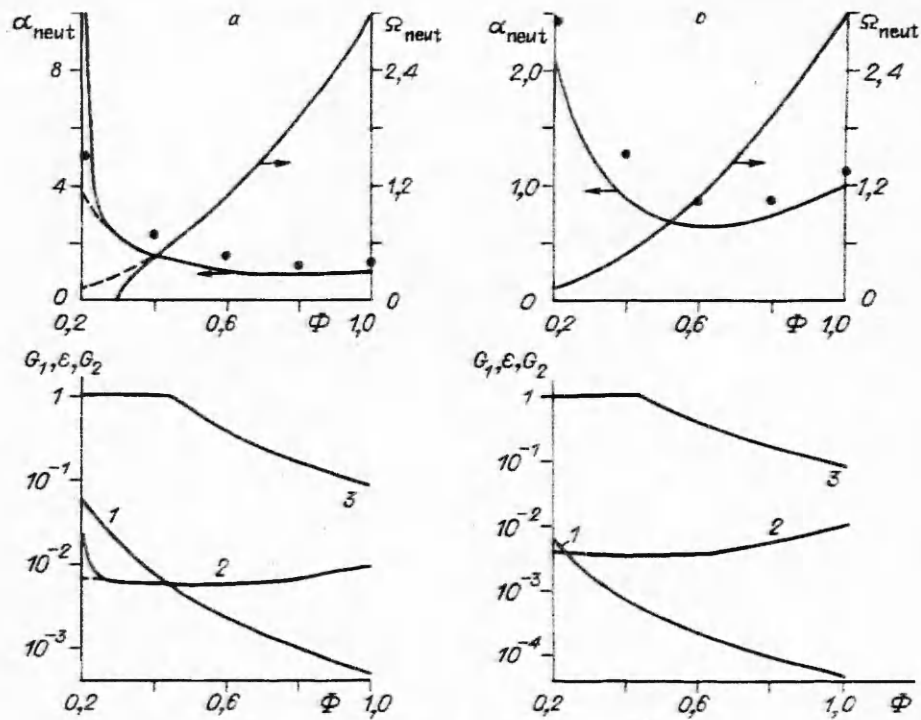


Рис. 2

Для оценки применимости всех сделанных при выводе (2) допущений в качестве продольного масштаба L можно взять длину волны нейтрального возмущения и получить выражение для соответствующих границ:

$$G_1 = 1/(3\Phi^3 |\text{Ku}_n^0|) \ll \epsilon = (9\text{Re}^5/\text{Fi})^{1/6} \Phi \alpha_{\text{neut}}/2\pi \ll G_2 = \min(1, 1/(\Phi^3 \text{Pr Re})).$$

На рис. 2, *a*, *b* для $\text{Pr Ku} = 100$ и 1000 соответственно представлены расчеты кривых нейтральной устойчивости, фазовой скорости и зависимостей G_1 , ϵ и G_2 (линии 1—3) от значений параметра Φ . Расчеты проводились как по формулам (3) (сплошные линии), так и по приближенным формулам (4) (штриховые). Значения физических характеристик ($\text{Pr} = 1,73$, $\text{Ka} = 13,75$ и $D = 6,24 \cdot 10^{-4}$) отвечают воде при 100°C , и параметр $\text{Re}/\text{Ka} = 0,5$. Как видно из представленных результатов, формулы (4) очень точно описывают соответствующие кривые и отличия сказываются только в области сравнительно малых Φ , где становится неприменимым плоскопараллельное приближение ($\epsilon < G_1$).

В дальнейшем при расчетах нелинейных волновых режимов все время проводился контроль, чтобы оставаться в пределах применимости использованных приближений.

Точками на рис. 2 нанесены результаты работы [9], где линии нейтральных волновых чисел рассчитывались на основе решений уравнений Орра — Зоммерфельда для данной задачи. На наш взгляд, согласие достаточно удовлетворительное, что в определенной мере подтверждает справедливость интегрального подхода.

Численный алгоритм расчета нелинейных режимов. Рассмотрим решения уравнений (2) вида $q = q(\xi)$, $h = h(\xi)$, $\xi = x - ct$ (c — фазовая скорость), периодические по координате ξ с периодом $\lambda = 2\pi/\alpha$ (α — волновое число). Используя представление конечным рядом Фурье

$$(5) \quad (q, h) = \sum_{n=-N}^N (q_n, h_n) \exp[i\alpha n \xi],$$

после подстановки в (2) приходим к системе нелинейных алгебраических уравнений. Фурье-гармоники нелинейных членов в (2) рассчитывались псев-

доспектральным методом. Для определения фазовой скорости использовалась инвариантность уравнений (2) относительно выбора начала координат и как следствие фаза одной из гармоник в (5) считалась заранее известной. Для нахождения решений нелинейной системы алгебраических уравнений и продвижения по параметрам Z , K , α применялся итерационный метод Ньютона — Канторовича.

Для тестирования алгоритма, а также в качестве начального данного при больших значениях параметра K мы использовали результаты [5, 6] для стекания изотермической пленки, а двигаясь с малым шагом по параметрам задачи, рассчитывали решения в широком диапазоне их изменений.

Осуществлялся также контроль за величиной последних гармоник в (5), и всегда выполнялось условие

$$|h_N| / \sup_{-N < n < N} |h_n| < 10^{-3}.$$

Результаты расчетов нелинейных режимов. В сформулированной задаче имеются три внешних параметра — Re/Ka , $Pr Ku$ и Φ . При их фиксированных значениях, как показали расчеты, существуют различные однопараметрические семейства нелинейных стационарно бегущих решений. Внутри каждого из семейств в окрестности особых точек параметром может служить амплитуда волны, а вдали от точек бифуркации — волновое число α ($\alpha = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны нелинейного решения).

Ограничимся рассмотрением только двух из большого числа возможных семейств решений. Первое семейство волн появляется в результате потери устойчивости тривиального решения $h = q = 0$, и для значений параметра Φ , не сильно отличающихся от единицы, его решения существуют в диапазоне от $\alpha = \alpha_{\text{нейт}}$ и вплоть до самых малых α , рассмотренных в данной работе. На рис. 3 линии 1—3 — зависимости амплитуды решений 1-го семейства от их волнового числа при $Pr Ku = 1000, 100$ и 50 соответственно. Здесь $Re/Ka = 0,5$ и $\Phi = 1$, амплитуда определяется как разность между максимальной и минимальной толщинами ($A = |h_{\text{max}} - h_{\text{min}}|$). Аналогичные зависимости для волн 2-го семейства представлены линиями 1'—3'. Волны 2-го семейства появляются в результате потери устойчивости волн 1-го семейства удвоенного пространственного периода и для значений $\Phi \leq 1$ также рассчитываются вплоть до самых малых α .

Другие семейства решений не рассматривали как ввиду невозможности перебрать их все, так и опираясь на результаты исследования изотермической пленки ($Pr Ku = \infty$) [5, 6], где было показано, что, кроме решений первых двух типов, волновые режимы всех других рассмотренных семейств неустойчивы во всей области по волновым числам.

Из результатов, представленных на рис. 3, отметим увеличение амплитуды волн одинакового периода с ростом перепада температуры, а также качественное сходство зависимостей $A(\alpha)$ для одного и того же семейства при различных значениях $Pr Ku$.

На рис. 4 приведены зависимости амплитуды волн от параметра Φ , что условно моделирует развитие волновой структуры течения вдоль испаряю-

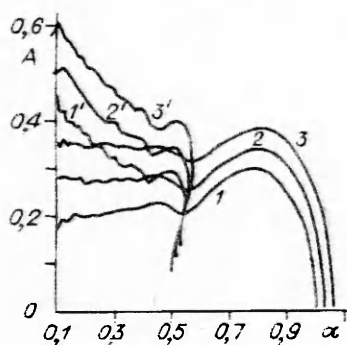


Рис. 3

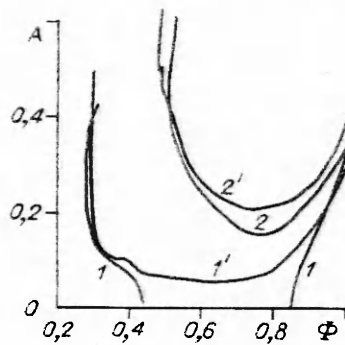


Рис. 4

щейся пленки. Здесь $Re/Ka = 0,5$ и линии 1, 2 отвечают волнам 1-го семейства с $\alpha = 0,8$ при $Pr Ku = 1000$ и 100 соответственно. Линии 1', 2' — аналогичные зависимости для волн 2-го семейства с $\alpha = 0,3$ при тех же значениях $Pr Ku$ и Re/Ka . Наличие двух несвязных ветвей линии 1 легко объясняется поведением зависимости $\alpha_{neut}(\Phi)$ на рис. 2, откуда следует, что для $0,44 < \Phi < 0,84$ нейтральное волновое число $\alpha_{neut} < 0,8$ и возмущения с $\alpha = 0,8$ лежат в области линейной устойчивости.

Формирование волн конечной амплитуды при движении вдоль испаряющейся пленки определяется двумя основными факторами: 1) уменьшением интенсивности волнового процесса с уменьшением числа Рейнольдса аналогично стеканию изотермической пленки и 2) противоположно направленной тенденцией, обусловленной наличием фазового перехода на граничной раздела. Их конкуренция между собой объясняет наличие экстремумов на зависимостях рис. 4. Начиная с определенных значений Φ , как следует из рис. 4, происходит быстрое нарастание амплитуды волн, и для $\Phi < \Phi_c(\alpha, Pr Ku)$ нелинейный волновой режим стекания не существует. Для более наглядного представления того, что происходит при приближении к значению параметра $\Phi = \Phi_c$, на рис. 5, а, б приведены характерные волновые профили толщины с параметрами на линиях 2 и 2' (рис. 4) соответственно. Здесь штриховые линии отвечают значению параметра Φ , при котором представлено решение. Профили 1 на рис. 5, а, б приведены для $\Phi = 0,8$, а 2 — в малой окрестности значений $\Phi = \Phi_c$. При дальнейшем движении вдоль линий 2 и 2' (рис. 4) происходит быстрый рост максимального значения толщины пленки, а ее минимум стремится к нулевому значению, что соответствует образованию «сухого» пятна.

Таким образом, из представленных результатов можно сделать вывод, что наиболее важное влияние, оказываемое волнами, заключается в образовании «сухих» пятен при уменьшении Φ . Подробное исследование этого эффекта имеет большое значение для технических приложений, так как он ограничивает максимально возможный тепловой поток, снимаемый с нагретой поверхности.

На рис. 6 при различных значениях $Pr Ku$ приведены расчеты величины $\Phi_c^3 Re/Ka \equiv (Re_c)_c/Ka$ (Re_c — «локальное» средневолновое число Рейнольдса), зная которую нетрудно рассчитать для конкретной жидкости минимальные расход и толщину пленки, при которых возможна волновая структура стекания.

Для $\Phi < \Phi_c$, как это показано выше, происходит образование «сухих» пятен. Влияние внутреннего параметра α , а также типа или семейства волн приводит к образованию диапазона значений Φ_c при фиксированном параметре $Pr Ku$. Из расчетов видно, что нижняя граница Φ_c определяется, как правило, длинными волнами 2-го семейства, а верхняя — короткими волнами 1-го семейства.

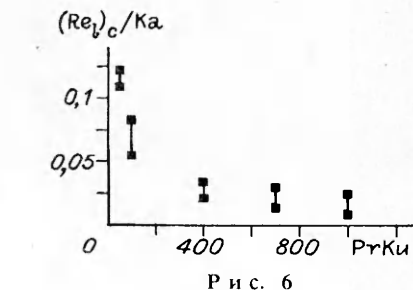
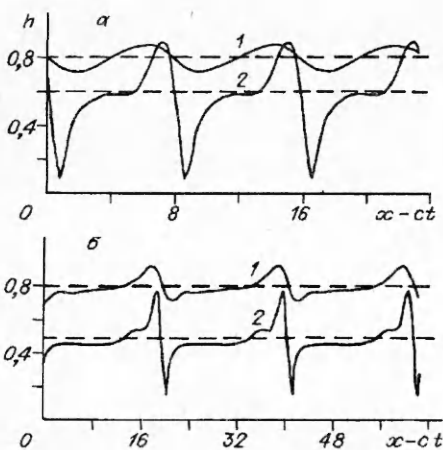


Рис. 5

Рис. 6

Для проверки представленных теоретических исследований было бы интересно сопоставить их с экспериментами по образованию «сухих» пятен на испаряющейся пленке жидкости. Ввиду малости чисел Рейнольдса данная задача довольно трудна для экспериментального изучения. Нам известна только одна экспериментальная работа [12], посвященная этой проблеме, где измерения, к сожалению, проводились только на сильно недогретых жидкостях.

Выводы. Развитие неустойчивых длинноволновых возмущений на поверхности испаряющейся пленки жидкости может приводить к формированию различных стационарно бегущих волновых режимов стекания.

Волновой режим стекания существует только до определенных критических значений толщины пленки, и далее, по всей видимости, происходит образование «сухих» пятен.

При изменении толщины пленки в процессе испарения от начальной и до ее критического значения величина амплитуды установившихся волн проходит через минимум. В окрестности критического значения толщины пленки амплитуда волн очень быстро нарастает.

На величину критической толщины пленки влияют как поперечный перепад температуры, так и длина и тип волнового режима. Управляя ими, можно «затянуть» момент разрушения пленки.

Развитый в работе подход к исследованию волн на поверхности испаряющейся пленки может быть легко обобщен с учетом неравновесности испарения со свободной поверхности и эффекта Марангони, что важно для тонких пленок в случае, когда температура свободной границы может меняться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alekseenko S. V., Nakoryakov V. Ye., Pokusaev B. G. Wave formation on a vertical falling liquid film // *AIChE J.*— 1985.— V. 31.— P. 1446.
2. Benney B. J. Long waves in liquid film // *J. Math. Phys.*— 1966.— V. 45, N 2.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1967.— № 1.
4. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1985.— № 3.
5. Trifonov Yu. Ya., Tselodub O. Yu. Nonlinear waves on the surface of a falling down liquid film. Pt 1. Waves of first family and its stability // *J. Fluid Mech.*— 1991.— V. 229.— P. 531.
6. Tselodub O. Yu., Trifonov Yu. Ya. Nonlinear waves on the surface of a falling down liquid film. Pt 2. Bifurcations of the first family waves and the others types of nonlinear waves // *J. Fluid Mech.*— 1992.— V. 244.— P. 149.
7. Bankoff S. G. Stability study of liquid flow down a heated inclined plane // *Int. J. Heat Mass Transfer.*— 1971.— V. 14.— P. 377.
8. Unsal M., Thomas W. C. Linearized stability analysis of film condensation // *J. Heat Transfer.*— 1978.— V. 100.— P. 629.
9. Spindler B. Linear stability of liquid films with interfacial phase change // *Int. J. Heat Mass Transfer.*— 1982.— V. 25, N 2.
10. Будов В. М., Кирьянов В. А., Шемагин И. А. О неустойчивости при конденсации движущегося пара // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.*— 1984.— № 5.
11. Joo S. W., Davis S. H., Bankoff S. G. Long-wave instabilities of heated falling films: two-dimensional theory of uniform layers // *J. Fluid Mech.*— 1991.— V. 230.— P. 117.
12. Гогонин И. И., Дорохов А. Р., Бочагов В. Н. К вопросу образования «сухих пятен» в стекающих тонких пленках жидкости // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.*— 1977.— Вып. 3, № 13.

г. Новосибирск

Поступила 27/X 1992 г.,
в окончательном варианте — 14/I 1993 г.