

УДК 539.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМ ЦЕЛИКОВ ГОРНЫХ ВЫРАБОТОК
С ПРИМЕНЕНИЕМ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕЙБЕНЗОНА – ИШЛИНСКОГО**

А. И. Чанышев

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская, 56, 630099, г. Новосибирск, Россия*

Решена задача определения формы целиков шахтных выработок, не теряющих устойчивость в виде образования “бочки” при любых значениях сжимающей нагрузки. Применяется известный критерий потери устойчивости Лейбензона – Ишлинского для исследования цилиндрических конструкций. Получены граничные условия задачи и ее решение: упругость в виде зависимости критической нагрузки от отношения геометрических размеров целика (радиуса целика к его высоте). Найденная асимптота решения связывается с оптимальной формой целиков.

Потеря устойчивости целика, критическая нагрузка, упругость, оптимальные формы

DOI: 10.15372/FTPRPI20200505

При проведении горных работ наиболее приоритетны вопросы обеспечения безопасности [1, 2], например выбор оптимальной формы целиков шахтных выработок, чтобы они не разрушались при отработке месторождения. От этих параметров зависит значение нагрузки, приводящей к разрушению целика.

Один из видов разрушения — потеря устойчивости изначальной конфигурации целика. В настоящей работе исследуются различные отношения поперечного размера целика к его высоте с целью установления сочетаний, при которых целик не теряет свою изначальную геометрическую форму. Для получения аналитического решения в качестве целика рассматриваются сплошные цилиндры с конечными размерами.

Вопросы устойчивости деформируемых тел впервые поднимаются в работе Эйлера [3]. В [4–9] потеря устойчивости описана как переход из одного равновесного состояния в другое, бесконечно близкое к исходному, но с измененной геометрией. В качестве предельной нагрузки бралась та, при которой этот переход возможен. Задачи потери устойчивости с применением критерия Лейбензона – Ишлинского относились к плоской деформации.

В настоящей работе устойчивость рассматривается для состояния упругости. Как и в [4, 5], основное напряженно-деформированное состояние обозначается буквами с нулем, дополнительное напряженно-деформированное состояние — с дельтой. Полное напряженно-деформированное состояние представлено суммой основного и дополнительного состояний: $T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + \Delta T_{\sigma}$, $T_{\varepsilon} = T_{\varepsilon}^0 + \Delta T_{\varepsilon}$, где T_{σ} , T_{ε} — тензоры напряжений и деформаций соответственно.

Постановка задачи для бесконечно близкого (по сравнению с основным) равновесного состояния в случае осесимметричной деформации следующая: тело в виде кругового цилиндра радиусом R , боковая поверхность которого свободна от напряжений, сжимается осевой нагрузкой $\sigma_z = -p_*$, $p_* > 0$; r, z — оси цилиндрической системы координат. Вектор напряжений на боковой поверхности цилиндра обращается в нулевой вектор, поэтому в изогнутом состоянии цилиндра на его поверхности получены уравнения

$$\begin{cases} (\sigma_r^0 + \Delta\sigma_r) \cos(n, r) + (\tau_{rz}^0 + \Delta\tau_{rz}) \cos(n, z) = 0, \\ (\tau_{rz}^0 + \Delta\tau_{rz}) \cos(n, r) + (\sigma_z^0 + \Delta\sigma_z) \cos(n, z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\cos(n, r)$, $\cos(n, z)$ — направляющие косинусы вектора нормали \vec{n} к изогнутой поверхности. Для их определения рассмотрена поверхность цилиндра до потери устойчивости и в момент потери устойчивости (рис. 1).

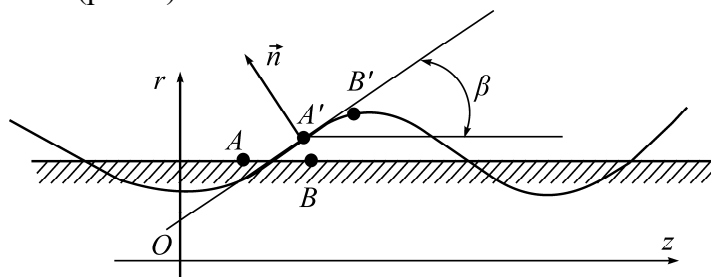


Рис. 1. Граничные условия задачи: \vec{n} — нормаль к изогнутой поверхности, угол β определяет наклон касательной в точке A'

Рассмотрим две точки A и B , лежащие на линии $r = R$ до момента потери устойчивости, dz — расстояние между ними. Пусть $\Delta\omega(z, r)$ и $\Delta u(z, r)$ — смещения точек цилиндра в момент потери устойчивости, вызванное усилиями $\Delta\sigma_{ij}$. Точками A' , B' на рис. 1 обозначим новые положения точек A и B . Координаты точки A' имеют следующие выражения:

$$z_{A'} = z_A + \Delta\omega(z_A, r = R), \quad r_{A'} = R + \Delta u(z_A, r = R). \quad (2)$$

Координаты точки B' :

$$z_{B'} = z_A + dz + \Delta\omega(z_A + dz, r = R), \quad r_{B'} = R + \Delta u(z_A + dz, r = R). \quad (3)$$

Из (2), (3) находим координаты вектора $\overline{A'B'}$:

$$\begin{aligned} r_{B'} - r_{A'} &= d\Delta u|_{z_A, r=R} = \frac{\partial\Delta u}{\partial z} \Big|_A dz, \\ z_{B'} - z_{A'} &= dz + \frac{\partial\Delta\omega}{\partial z} dz = \left(1 + \frac{\partial\Delta\omega}{\partial z}\right) \Big|_A dz. \end{aligned}$$

Отсюда определяется тангенс угла β как отношение полученных координат (рис. 1):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\partial\Delta u}{\partial z} / \left(1 + \frac{\partial\Delta\omega}{\partial z}\right) = \frac{\partial\Delta u}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial\Delta\omega}{\partial z} + \left(\frac{\partial\Delta\omega}{\partial z}\right)^2 + \dots\right).$$

Далее применяются гипотезы из [2, 3]: предполагается, что квадратами величин со знаком Δ и их произведениями можно пренебречь. Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta \approx \frac{\partial\Delta u}{\partial z}, \quad \cos(n, z) = -\sin\beta = -\frac{\partial\Delta u}{\partial z}, \quad \cos(n, r) = \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} \approx 1. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1), при

$$\sigma_r^0 = \tau_{rz}^0 = 0, \quad \sigma_z^0 = -p_*$$

получаем граничные условия задачи на искривленной поверхности:

$$\begin{cases} \Delta \sigma_r = 0, & r = R, \\ \Delta \tau_{rz} = -p_* \frac{\partial \Delta u}{\partial z}, & r = R. \end{cases} \quad (5)$$

Далее находим $\Delta \omega(r, z)$, $\Delta u(r, z)$, $\Delta \sigma_r$, $\Delta \tau_{rz}$, $\Delta \sigma_z$, $\Delta \sigma_\varphi$ как функций координат r и z , удовлетворяющих всем условиям задачи. Знак Δ для упрощения записи опускаем.

Применяются уравнения равновесия для приращений напряжений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

закон Гука:

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_r, \quad \sigma_\varphi = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_\varphi, \quad \sigma_z = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z, \quad \tau_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}, \quad (7)$$

соотношения Коши:

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z, \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \quad (8)$$

В (7)

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad (9)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Подстановка (7)–(9) в (6) приводит к уравнениям равновесия в приращениях смещений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + (1-2\nu) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для решения системы (10) воспользуемся результатами [10], где (10) с помощью выражения для θ из (8) переписывается в виде

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r^2} = 0, \\ \nabla^2 \omega + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

∇^2 — оператор Лапласа.

С введением компоненты вектора поворота (вокруг оси θ)

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (12)$$

система (10) или (11) упрощается:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \omega_\theta) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{здесь } K = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}.$$

После дифференцирования первого уравнения (13) по r , второго — по z и последующего вычитания получаем уравнение для определения функции ω_θ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (r \omega_\theta)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \omega_\theta}{\partial z^2} = 0. \quad (14)$$

Уравнение Лапласа (14) разрешается методом разделения переменных, согласно которому

$$\omega_\theta = Q(r)Z(z), \quad (15)$$

где Q, Z — функции переменных r и z соответственно.

Подстановка (15) в (14) предполагает выполнение равенства

$$\frac{Z''}{Z} = - \frac{Q'' + \frac{1}{r} Q' - \frac{Q}{r^2}}{Q}, \quad (16)$$

слева расположена функция z , справа — r . Приравнявая обе части (16) к числу p^2 (p — произвольное число), находим решение (15) в виде

$$\omega_\theta = Z_1(\alpha) [Ach(pz) + Bsh(pz)], \quad (17)$$

$Z_1(\alpha) = MJ_1(\alpha) + FN_1(\alpha)$ — цилиндрическая функция первого порядка; $J_1(\alpha)$ — функция Бесселя первого порядка первого рода; $N_1(\alpha)$ — функция Неймана первого порядка; M, F, A, B — произвольные постоянные, параметр α связан с координатой r равенством

$$\alpha = pr.$$

Для определения функции θ используется второе уравнение (13), которое после интегрирования по координате r приводится к равенству

$$\theta = K (Ach(pz) + Bsh(pz)) Z_0(\alpha) + f(z), \quad (18)$$

где $Z_0(\alpha) = MJ_0(\alpha) + FN_0(\alpha)$ — цилиндрическая функция нулевого порядка.

Для нахождения u используются определения функций θ, ω_θ . Из (8), (12) следует, что

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z}, \\ 2 \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial r \partial z}. \end{cases}$$

После сложения этих уравнений с учетом (17), (18) находится уравнение для u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = p (Ash(pz) + Bch(pz)) Z_1(\alpha) (2 - K),$$

в котором $2 - K = 1 / (1 - \nu)$.

Решение для функции u получено как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения [9]:

$$u = [Cchpz + Dshpz]U_1(\alpha) - \frac{1}{2(1-\nu)p} \alpha Z_0 [Ashpz + Bchpz], \quad (19)$$

функция $U_1(\alpha) = GJ_1(\alpha) + LN_1(\alpha)$, G, L, C, D — произвольные константы.

Для определения ω применяется выражение для θ из (8), согласно которому $\partial\omega/\partial z = \theta - \partial u/\partial r - u/r$. При интегрировании по переменной z с учетом (19), (18) находим

$$\omega = \frac{Ach(pz) + Bsh(pz)}{p} \left[2Z_0(\alpha) - \frac{\alpha Z_1(\alpha)}{2(1-\nu)} \right] - (Csh(pz) + Dch(pz))U_0 + \varphi(r),$$

где $\varphi(r)$ — произвольная функция координаты r (в дальнейшем в расчетах не участвует).

Таким образом получены функции u, ω , удовлетворяющие уравнениям равновесия (10). Отыщем возможный характер их изменения по координатам r, z , исходя из физических соображений задачи о потере устойчивости целика. Требуется, чтобы функции не имели особенностей при $r = 0$:

$$u|_{r=0} \neq \infty, \quad \omega|_{r=0} \neq \infty. \quad (20)$$

Чтобы (20) выполнялось, необходимо исключить функции Неймана нулевого и первого порядков из выражений для u и ω (коэффициенты L и F в (17), (19) равны нулю).

Функция u должна быть нечетной функцией координаты r (или аргумента α), а функция ω — четной. Поскольку $J_0(\alpha)$ — четная функция, а $J_1(\alpha)$ — нечетная, то отсюда вытекает следующая структура для функций u и ω :

$$u = (Cch(pz) + Dsh(pz))GJ_1(\alpha) - \frac{\alpha}{2(1-\nu)p} MJ_0(\alpha)(Ash(pz) + Bch(pz)), \quad (21)$$

$$\omega = -(Csh(pz) + Dch(pz))GJ_0(\alpha) + \frac{1}{p} M \left(2J_0(\alpha) - \frac{\alpha J_1(\alpha)}{2(1-\nu)} \right) (Ach(pz) + Bsh(pz)). \quad (22)$$

Рассмотрим поведение функций u, ω вдоль координаты z . Считаем, что ω — нечетная функция координаты z (точки с координатой $z = 0$ соответствуют середине целика). Тогда в (22), (21) надо положить $A = 0, D = 0$ и функции u, ω примут вид

$$u = \left[SJ_1(\alpha) - \frac{T\alpha J_0(\alpha)}{2(1-\nu)p} \right] ch(pz),$$

$$\omega = \left[-SJ_0(\alpha) + \frac{T}{p} \left(2J_0(\alpha) - \frac{\alpha J_1(\alpha)}{2(1-\nu)} \right) \right] sh(pz), \quad (23)$$

где введено $S = CG, T = MB$.

После этого, удовлетворим граничным условиям (5). Найдем

$$\sigma_r = \lambda \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Согласно (23),

$$\frac{\partial u}{\partial r} = p \left[S \left(-\frac{J_1(\alpha)}{\alpha} + J_0(\alpha) \right) - \frac{T(J_0(\alpha) - \alpha J_1(\alpha))}{2(1-\nu)p} \right] ch(pz),$$

$$\frac{u}{r} = p \left[S \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} - \frac{TJ_0(\alpha)}{2(1-\nu)p} \right] ch(pz),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = p \left[-SJ_0(\alpha) + \frac{T}{p} \left(2J_0(\alpha) - \frac{\alpha J_1(\alpha)}{2(1-\nu)} \right) \right] ch(pz).$$

Тогда $\theta = T \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_0(\alpha) ch(pz)$ и первое условие (5) преобразуется после сокращения на $2\mu ch(pz)$ в уравнение

$$S \left(J_0(\alpha) - \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \right) + \frac{T}{2(1-\nu)p} [-(1-2\nu)J_0(\alpha) + \alpha J_1(\alpha)] = 0, \quad r = R. \quad (24)$$

Удовлетворяя второму граничному условию (5), на основании (7), (8), (23) получаем

$$\frac{E}{1+\nu} \left[SJ_1(\alpha) - \frac{T}{p} \left(J_1(\alpha) + \frac{\alpha J_0(\alpha)}{2(1-\nu)} \right) \right] = -p_* \left[SJ_1(\alpha) - \frac{T}{p} \frac{\alpha J_0(\alpha)}{2(1-\nu)} \right], \quad r = R. \quad (25)$$

В итоге имеем систему двух однородных линейных уравнений (24), (25) для нахождения двух неизвестных констант S , и T/p . Ее определитель приравняем нулю:

$$\begin{vmatrix} J_0(\alpha) - \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} & -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} J_0(\alpha) + \frac{\alpha J_1(\alpha)}{2(1-\nu)} \\ \left(\frac{E}{1+\nu} + p_* \right) J_1(\alpha) & -\frac{E}{1+\nu} \left(J_1(\alpha) + \frac{\alpha J_0(\alpha)}{2(1-\nu)} \right) - p_* \frac{\alpha J_0(\alpha)}{2(1-\nu)} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда устанавливается выражение для критической нагрузки p_* :

$$\frac{p_*}{2\mu} = \frac{\left(\frac{2(1-\nu)}{\alpha} - \alpha \right) J_1^2(\alpha) - \alpha J_0^2(\alpha)}{\alpha (J_0^2(\alpha) + J_1^2(\alpha)) - 2(1-\nu) J_0(\alpha) J_1(\alpha)}. \quad (26)$$

Здесь $\alpha = pR$, где R — радиус целика.

Требуется доопределить параметр p , входящий в α . Положим

$$p = i\pi / H, \quad (27)$$

где H — высота целика. Тогда $sh(pz) = i \sin(\pi z / H)$, $ch(pz) = \cos(\pi z / H)$ и выражения для u и ω становятся ограниченными функциями при возрастании $|z|$. Из (23) видно, что функция ω будет нечетной функцией координаты z , изменяющейся в пределах $-H/2 \leq z \leq H/2$, а функция u — четной функцией в тех же самых пределах изменения z , и $u = 0$ при $z = \pm H/2$, т. е. присутствует жесткое защемление боковых смещений на верхней и нижней границах целика.

Если $p = i\pi / H$, тогда $\alpha = i\pi R / H$ и функции Бесселя $J_0(\alpha)$ и $J_1(\alpha)$ имеют представления [11]

$$J_0\left(i \frac{\pi R}{H}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi R}{2H} \right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2}, \quad J_1\left(i \frac{\pi R}{H}\right) = i \frac{\pi R}{2H} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi R}{2H} \right)^{2k} \frac{1}{k!(k+1)!}. \quad (28)$$

Из (26)–(28) следует, что значение для p_* получается вещественным. Константы S и T/p вычисляются не единственным образом, так как определитель системы (24), (25) обращается в ноль. Значения этих констант можно сделать сколько угодно малыми, чтобы выполнялись гипотезы работ [4, 5] с применением соотношений (23).

На рис. 2 изображена зависимость p_* для угля от отношения $\pi R / H$ при $\nu = 0.35$. Видно, что имеются вертикальная и горизонтальная асимптоты. Слева от вертикальной асимптоты значения критической нагрузки отрицательны (этой области соответствует растяжение цилиндриче-

ских образцов с образованием “шейки”), а справа от нее значения сжимающей нагрузки положительны (происходит сжатие цилиндрических образцов с образованием “бочки”). Координата $\pi R / H = 0.9$ ($2R / H \square 0.5$) соответствует уравнению асимптоты, где предельная нагрузка слева и справа обращается в бесконечность.

На рис. 3 представлена зависимость абсциссы вертикальной асимптоты от значения коэффициента Пуассона ν . Показано, что с повышением коэффициента ν значение абсциссы увеличивается. Эта асимптота означает, что правее нее сжимающая нагрузка $\sigma_z = -p_*$ стремится к $-\infty$, т. е. при значении $\pi R / H = 0.8$ или близком к нему состояние формы целика в виде “бочки” не реализуется, как следует из представленного решения задачи потери устойчивости на основе критерия Лейбензона–Ишлинского. Левее этой асимптоты имеются растягивающие критические нагрузки: при приближении к асимптоте $\pi R / H = 0.8$ не образуется “шейка” в целике при растяжении. При значении асимптоты $\pi R / H = 0.8$ в целике (или образце горной породы в виде цилиндра) не может сформироваться “бочка” или “шейка”. Это идеальное отношение параметров целика или цилиндра, при котором в нем создается однородное напряженно-деформированное состояние.

В [12–18] исследуется влияние формы образца (отношение высоты образца к диаметру) на предел прочности при сжатии. Для карбонатита с отношением высоты к диаметру, равным 2, в [17] получено, что среднее значение предела прочности на сжатие составляет 57 МПа, а при отношении, равном 1, — 60 МПа [17]. Для уррита среднезернистого массивного с включениями пегматита среднее значение предела прочности в первом случае достигает 185 МПа, во втором — 156 МПа [17]. Установлено влияние формы образцов на предел прочности на сжатие. Полученное решение задачи позволяет выбрать отношение H / R при экспериментальном определении предела прочности образцов на сжатие.

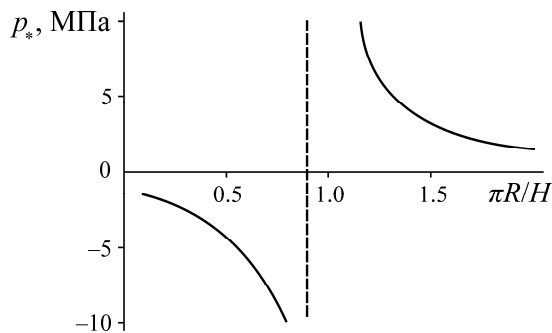


Рис. 2. Зависимость предельной нагрузки для угля от безразмерного параметра, характеризующего форму образца. Пунктиром обозначена вертикальная асимптота

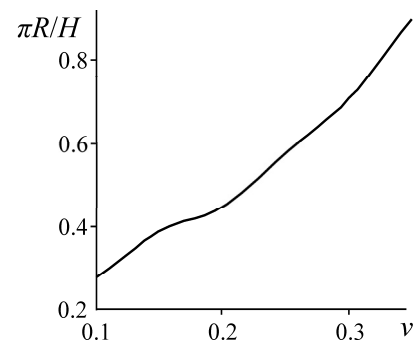


Рис. 3. Зависимость абсциссы вертикальной асимптоты от значения коэффициента Пуассона ν

ВЫВОДЫ

Решена задача определения критической нагрузки, действующей на целик цилиндрической формы, при которой может происходить ее изменение. Получено обобщение критерия Лейбензона–Ишлинского для осесимметричной деформации. Найдено решение соответствующей задачи; получена критическая зависимость нагрузки от геометрических параметров целика.

Показано, что имеющаяся вертикальная асимптота в решении задачи о потере устойчивости целика с применением критерия Лейбензона–Ишлинского дает оптимальное сочетание размеров целика, при которых в них (или образцах горных пород цилиндрической формы) реализуется однородное напряженно-деформированное состояние без концентраторов напряжений, обеспечивающее максимальную прочность при сжатии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алыменко Д. Н., Соловьев В. А., Аптуков В. Н., Котляр Е. К. О видах крепи сопряжений шахтных стволов и приствольных выработок в соляных породах // ФТПРПИ. — 2018. — № 1. — С. 46–54.
2. Шанкар В., Кумар Д., Субрахманьям Д. С. Влияние подземных выработок на напряженное состояние массива горных пород // ФТПРПИ. — 2019. — № 2. — С. 43–48.
3. Euler L. 'Sur la forces des colonnes' Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres, Berlin, 13 (1757). — P. 252–282.
4. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. тр. — М., 1951. — Т. 1. — С. 50–85.
5. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. — 1954. — Т. 6. — № 2. — С. 140–146.
6. Ершов Л. В. Об устойчивости упруго-пластического равновесия в задачах горного давления: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — М.: Моск. ин-т радиоэлектроники и горной электромеханики, 1964. — 15 с.
7. Алимжанов М. Т. О постановке задачи устойчивости стенок глубоких скважин // Докл. РАН. — 1992. — Т. 325. — № 3. — С. 445–449.
8. Алимжанов М. Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. — Алма-Ата: Наука, 1982. — 270 с.
9. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. — К.: Вища шк., 1986. — 512 с.
10. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости. — М.: Высш. шк., 1977. — 216 с.
11. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. — 832 с.
12. Барон Л. И., Логунцов Б. М., Позин Е. З. Определение свойств горных пород. — М.: Госгортехиздат, 1962. — 332 с.
13. Койфман М. И. О влиянии размеров на прочность горных пород. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — С. 46–53.
14. Ильницкая Е. И., Тедер Р. И., Ватолин Е. С., Кунтыш М. Ф. Свойства горных пород и методы их определения. — М.: Недра, 1969. — 392 с.
15. Tarasov V. G. New insight into the nature of size dependence and the lower limit of rock strength. Proceeding of the 8th Int. Symposium on Rockbursts and Seismicity in Mines, Obninsk-Perm, 2013. — P. 31–40.
16. Zhigalkin V. M., Usoltseva, O. M., Semenov, V. N., Tsoi P. A., Asanov V. A., Baryakh A. A., Pan'kov I. L., and Toksarov V. N. Deformation of quasi-plastic salt rocks under different conditions of loading. Report I: deformation of salt rocks under uniaxial compression, J. Min. Sci., 2005, 41. — P. 507–515.
17. Кузнецов Н. Н., Пак А. К. О влиянии отношения размеров образцов скальных горных пород на результаты определения их прочности при одноосном сжатии // Вестн. МГТУ. — 2014. — Т. 17. — № 2. — С. 246–253.
18. Zhigalkin V. M., Semyonov V. N., Usoltseva O. M., Tsoi P. A., Chanyshev A. I., and Abdulin I. M. Theoretical and experimental modeling of material hardening and softening by compression tests, Harmonising Rock Engineering and the Environment, Proc. of the 12th ISRM Int. Congr. on Rock Mech., 2012. — P. 563–568.

Поступила в редакцию 20/VII 2020

После доработки 08/IX 2020

Принята к публикации 11/IX 2020