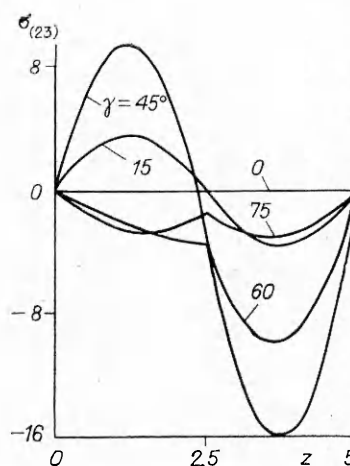


Р и с. 1



Р и с. 2

В заключение проанализируем характер изменения эпюр поперечных касательных напряжений $\sigma_{(23)}$ в зависимости от угла армирования γ . Численные результаты представлены на рис. 2. Видно, что эпюры напряжений $\sigma_{(23)}$ существенно зависят от угла армирования, причем качественные изменения претерпевает сам характер распределения этих напряжений по толщине оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жесткими заполнителями при конечных прогибах // ПМТФ.— 1964.— № 5.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций.— М.: Машиностроение, 1980.
3. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек // ПМ.— 1976.— Т. 12, № 11.
4. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 5.
5. Куликов Г. М. К теории многослойных пологих оболочек конечного прогиба // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 3.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. К теории упругих слоистых анизотропных оболочек // ДАН СССР.— 1984.— Т. 275, № 5.
7. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек.— Л.: Изд-во ЛГУ. 1964.— Т. 2.
8. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Численное решение задач статики геометрически нелинейных анизотропных многослойных оболочек вращения // Механика композит. материалов.— 1981.— № 3.
9. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Расчет радиальных шин на основе обобщенной теории Тимошенко // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 4.
10. Куликов Г. М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // ПМ.— 1986.— Т. 22, № 12.
11. Носатенко П. Я. Исследование геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния анизотропных оболочек вращения методом конечных элементов.— М., 1984.— Деп. в ВИНТИ 21.03.84, № 1526—84.

Поступила 26/VI 1987 г.

УДК 539.3

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ РУЛОНИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

С. В. Лавриков, А. Ф. Ревуженко

(Новосибирск)

1. В [1] рассмотрена прямая задача определения напряженного состояния цилиндрической трубы, полученной рулонированием тонкой гибкой оболочки. Упругопластическая модель деформирования таких

конструкций представляет собой следующую замкнутую систему уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0}{a_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{2\sigma_{12}^0}{a_2} = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial w_i^0}{\partial \lambda_1} - \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0,$$

$$\frac{\partial w_2^0}{a_2 \partial \lambda_2} + \frac{w_1^0}{a_2} = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_{22}^0 - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{11}^0;$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial w_2^0}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial w_1^0}{a_2 \partial \lambda_2} - \frac{w_2^0}{a_2} = \frac{\sigma_{12}^0}{\mu} + \Gamma(\sigma_{12}^0, \lambda_1, \lambda_2).$$

Здесь (λ_1, λ_2) — ортогональная криволинейная система координат; линии $\lambda_1 = \text{const}$ направлены вдоль контакта слоев оболочки; $a_2 = \lambda_1 + \xi \lambda_2 + R_0 \cos \delta$ — параметр Ламэ; $\xi = R_0 \sin \delta$; R_0 — внутренний радиус трубы; δ — угол наклона спирали λ_2 к окружности $r = R_0$; w_i^0, σ_{ij}^0 ($i, j = 1, 2$) — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений в криволинейных координатах, (1.2) — уравнения, определяющие упругие изменения размеров элементарного объема в направлениях λ_1, λ_2 , (1.3) характеризует общую сдвиговую деформацию элемента среды: первое слагаемое в правой части — упругая деформация слоев оболочки, Γ — проскальзывание слоев друг по другу. Напряженно-деформированное состояние существенно зависит от вида функции Γ , т. е. от условий на контактах между слоями оболочки. Это обстоятельство можно использовать для оптимизации конструкции в целом.

Пусть оболочка предназначена для работы при высоких внутренних давлениях, тогда в качестве критерия оптимальности примем

$$(1.4) \quad p \rightarrow \max$$

(p — величина внутреннего давления). Заметим, что этот критерий должен выполняться при заданных внешнем давлении, параметрах материала μ, ν , толщине слоя оболочки $h = 2l\xi$ и выполнении определенных неравенств, гарантирующих целостность материала. Таким образом, если из замкнутой системы исключить уравнение (1.3) (т. е. Γ рассматривать в качестве управляющей функции), то условие оптимальности (1.4) можно использовать для получения уравнения, замыкающего систему (1.1), (1.2). После ее решения из формулы (1.3), где смещения и напряжения уже известны, определяем функцию Γ , которая обеспечивает выполнение критерия (1.4). Такова общая схема решения задачи.

2. Рассмотрим ситуацию, когда пластические деформации оболочки не допускаются:

$$(2.1) \quad \sqrt{(\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)^2 + 4\sigma_{12}^0{}^2} \leq 2k = 2\alpha\tau_s,$$

где τ_s — предел упругости материала; $0 < \alpha < 1$ — коэффициент запаса; $k = \alpha\tau_s$. Критерий оптимальности (1.4) приводит к тому, что во всей области в (2.1) должно достигаться равенство. Тогда задача (1.1), (1.2), (2.1) (со знаком равенства) становится статически определимой. При обычных краевых условиях

$$(2.2) \quad \sigma_r|_{r=R_0} = -p, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R_0} = 0;$$

$$(2.3) \quad \sigma_{11}^0 = -p + k \ln \left(\frac{a_2^2 + \xi^2}{R_0^2} \right) + \frac{2k\xi^2}{a_2^2 + \xi^2},$$

$$\sigma_{22}^0 = -p + k \ln \left(\frac{a_2^2 + \xi^2}{R_0^2} \right) + \frac{2ka_2^2}{a_2^2 + \xi^2}, \quad \sigma_{12}^0 = -\frac{2k\xi a_2}{a_2^2 + \xi^2},$$

или в полярных координатах (r, θ)

$$(2.4) \quad \sigma_r = -p + 2k \ln \left(\frac{r}{R_0} \right), \quad \sigma_\theta = -p + 2k \left(1 + \ln \left(\frac{r}{R_0} \right) \right), \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Распределения (2.4) хорошо известно как решение задачи о пластическом деформировании цельной толстостенной трубы [2]. Замечательной особенностью рассмотренной конструкции является то, что точно такое же напряженное состояние реализуется именно при упругом деформировании (в (2.1) $\alpha < 1$).

Перемещения будут, конечно, отличаться как от упругих, так и от пластических [2]. Они определяются упругими деформациями конструкции в целом и проскальзываниями между слоями. Подставляя (2.3) в систему (1.2), получим

$$(2.5) \quad w_1^0 = C_3 a_2 + \frac{1-2\nu}{2\mu} k a_2 \ln(a_2^2 + \xi^2) + 2 \frac{1-\nu}{\mu} k \xi \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2}{\xi} \right) + f_2(\lambda_2),$$

$$w_2^0 = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{k}{\xi} a_2^2 - 2 \frac{1-\nu}{\mu} k a_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{a_2}{\xi} \right) + \frac{1-2\nu}{2\mu} k \xi \ln(a_2^2 + \xi^2) -$$

$$- \int f_2(\lambda_2) d\lambda_2 + f_1(\lambda_1)$$

$$\left(C_3 = -\frac{1-2\nu}{2\mu} (p + 2k \ln R_0) - \frac{1-\nu}{\mu} k, \quad f_i(\lambda_i) \quad (i = 1, 2) \text{ — произвольные}$$

функции). Если перемещения внешней границы трубы отсутствуют:

$$(2.6) \quad w_1^0|_{\lambda_1=x_1} = 0, \quad w_2^0|_{\lambda_2=x_2} = 0,$$

то функции $f_i(\lambda_i)$ сводятся к постоянным

$$(2.7) \quad C_2 = f_2(\lambda_2) = -C_3 A - \frac{1-2\nu}{2\mu} k A \ln(A^2 + \xi^2) - 2 \frac{1-\nu}{\mu} k \xi \operatorname{arctg} \left(\frac{A}{\xi} \right),$$

$$C_1 = f_1(\lambda_1) = \frac{C_2 A}{\xi} - \frac{1-\nu}{\mu} \frac{k}{\xi} A^2 + 2 \frac{1-\nu}{\mu} k A \operatorname{arctg} \left(\frac{A}{\xi} \right) -$$

$$- \frac{1-2\nu}{2\mu} k \xi \ln(A^2 + \xi^2).$$

Здесь $A = \sqrt{R^2 - \xi^2}$; R — внешний радиус трубы; λ_1, λ_2 — обозначения для внешней границы области.

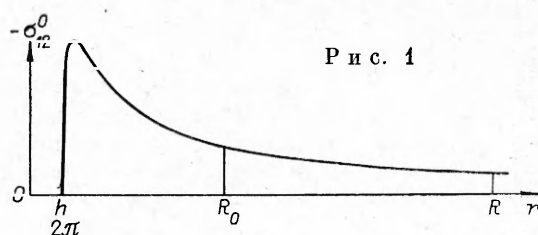
Таким образом, выражения (2.3), (2.5), (2.7) дают решение исходной задачи оптимизации, а функция Γ , согласно (1.3), имеет вид

$$(2.8) \quad \Gamma = C_4 a_2 + \frac{C_5}{a_2} \quad \left(C_4 = \frac{1-\nu}{\mu} \frac{k}{\xi}, \quad C_5 = C_3 \xi - C_1 + 2C_4 \xi^2 \right).$$

Итак, в оптимальной конструкции зависимость σ_{12}^0 от a_2 определяется последним равенством (2.3), а Γ — равенством (2.8). Если считать, что в наличии имеется только пластическая смазка, т. е. Γ может зависеть только от σ_{12}^0 , то последнее уравнение в (2.3) и (2.8) можно рассматривать как параметрическую зависимость, где a_2 выступает в роли параметра. Тогда из (2.3), (2.8) вытекает, что при соответствующем отношении толщины слоя оболочки h и внутреннего радиуса R_0 ($h/R_0 < 0,5 - 1$) поведение на контакте близко к «идеально пластическому»: $\sigma_{12}^0 = \text{const}$ (рис. 1). Поэтому, если условие на контакте выбрать так, что $\sigma_{12}^0 = \text{const}$, то полученная конструкция при указанном отношении параметров будет отличаться от оптимальной незначительно.

Рассмотрим такой пример. Пусть задано внутреннее давление p_0 ($p_0 = 0,99\tau_s$), внешнее давление $q_0 = 0$ и допускаются только упругие

деформации материала. Тогда минимальный внешний радиус цельной трубы $R_1 = R_0 / \sqrt{1 - p_0/\tau_s}$ ($R_1 = 10R_0$). Для рулонированной же оболочки оказывается достаточно внешнего радиуса $R_2 = R_0 \exp(p_0/(2\tau_s))$ ($R_2 \approx 1,64R_0$). Видно (рис. 2), что во втором случае



Р и с. 1

требуется конструкция значительно меньшей толщины. Как и ожидалось, это происходит потому, что за счет проскальзывания слоев в рулонированной оболочке нагрузка распределяется по толщине равномерно в отличие от цельной конструкции, где наиболее нагруженным оказывается материал только вблизи внутренней кромки (рис. 3, $\sigma_r', \sigma_\theta'$ и $\sigma_r'', \sigma_\theta''$ — напряжения в цельной трубе и в рулонированной конструкции). Из последних формул следует также, что при неограниченном росте толщины оболочки ее несущая способность возрастает неограниченно, в то время как в цельной трубе увеличение толщины на несущей способности практически не сказывается.

3. В изучаемой конструкции реализуется внешнее трение слоев. Типична ситуация, когда внешнее трение сухое. В уравнениях континуальной модели внешнее сухое трение выступает как внутреннее. Поэтому с учетом опыта решения предыдущей задачи рассмотрим постановки, где уравнение (1.3) заменяется на

$$(3.1) \quad (\sigma_2 - \sigma_1)/2 = -f(\sigma_2 + \sigma_1)/2.$$

Здесь $\sigma_2 > \sigma_1$ — главные значения тензора напряжений; $f = \text{const}$ — коэффициент внутреннего трения. Тогда уравнения (1.1), (3.1) образуют замкнутую систему для напряжений. Ее решение с учетом краевых условий (2.2) имеет вид

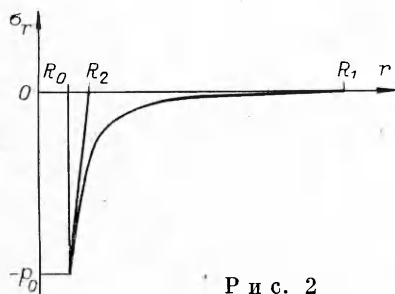
$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= -p \left(\frac{a_2^2 + \xi^2}{R_0^2} \right)^{-f/(1+f)} \left(1 - \frac{2f}{1+f} \frac{\xi^2}{a_2^2 + \xi^2} \right), \\ \sigma_{22}^0 &= -p \left(\frac{a_2^2 + \xi^2}{R_0^2} \right)^{-f/(1+f)} \left(1 - \frac{2f}{1+f} \frac{a_2^2}{a_2^2 + \xi^2} \right), \\ \sigma_{12}^0 &= -p \left(\frac{a_2^2 + \xi^2}{R_0^2} \right)^{-f/(1+f)} \frac{2f}{1+f} \frac{\xi a_2}{a_2^2 + \xi^2} \end{aligned}$$

или в полярных координатах

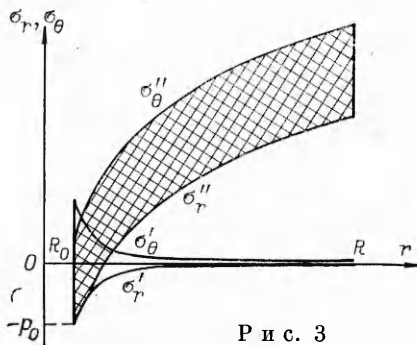
$$(3.3) \quad \sigma_r = -p (r/R_0)^{-2f/(1+f)}, \quad \sigma_\theta = -p \frac{1-f}{1+f} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{-2f/(1+f)}, \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Напряжения (3.2) удовлетворяют условию $\sigma_{12}^0 = \text{tg } \varphi \cdot \sigma_{11}^0$, где

$$(3.4) \quad \text{tg } \varphi = f \sin 2\kappa / (1 + f \cos 2\kappa) \text{ или } f = \sin \varphi / [\sin (2\kappa - \varphi)]$$



Р и с. 2



Р и с. 3

(κ — угол между окружностью $r = \text{const}$ и линией контакта слоев оболочки: $\text{tg } \kappa = \xi/a_2 = \xi/\sqrt{r^2 - \xi^2}$). Таким образом, равенство (3.1), как и предполагалось в исходной постановке, описывает поведение конструкции при условии внешнего сухого трения, но не постоянного, а со слабой неоднородностью: $\text{tg } \varphi \sim 1/r$. В реальной оболочке внешнее трение на контакте слоев удобно задавать постоянным. Ясно, что построенное решение (3.2), (3.4) от решения при $\varphi = \text{const}$ отличается незначительно, что, в свою очередь, позволяет не решать довольно громоздкую задачу при постоянном трении на контакте.

Обычно условие (3.1) используется для описания поведения материалов с внутренним трением (сыпучие материалы, горные породы и др.). Учет сцепления в (3.1) задачу существенно не усложняет. Для указанных материалов коэффициент $f < 1$. В математических моделях условие $f < 1$ обеспечивает гиперболичность поставленной задачи [3], и поэтому случай $f > 1$ не рассматривается из-за своей физической нереальности и эллиптичности математической постановки. В оболочке же, как следует из (3.4), появляются гораздо более широкие возможности. В частности, поскольку здесь свободный параметр $0 \leq \varphi < \pi/2$, можно конструктивно реализовать напряженное состояние (3.2) с коэффициентом f в пределах

$$(3.5) \quad 0 \leq f < 1/|\cos 2\kappa|, \text{ если } \pi/4 \leq \kappa \leq \pi/2; \quad 0 \leq f < \infty, \quad -\infty < f \leq -1/|\cos 2\kappa|, \text{ если } 0 \leq \kappa \leq \pi/4.$$

В дальнейшем ограничимся только неравенствами (3.5).

Перейдем к отысканию кинематики, соответствующей напряжениям (3.2). Подставляя (3.2) в систему (1.2), получим

$$(3.6) \quad w_1^0 = -pR_0^{2f/(1+f)} \frac{1}{2\mu(1+f)} ((1-2\nu+f)J_1 - 2fJ_2) + g_2(\lambda_2)_s \\ w_2^0 = -pR_0^{2f/(1+f)} \frac{1}{2\mu(1+f)} \left(\frac{12f}{\xi} \int J_2 da_2 - \frac{1-2\nu+f}{\xi} \int J_1 da_2 + \right. \\ \left. + \frac{1-2\nu-f}{2\xi} (1+f)(a_2^2 + \xi^2)^{1/(1+f)} - \xi(1+f)(a_2^2 + \xi^2)^{-f/(1+f)} \right) - \\ - \int g_2(\lambda_2) d\lambda_2 + g_1(\lambda_1),$$

где $J_1 = \int (a_2^2 + \xi^2)^{-f/(1+f)} da_2$; $J_2 = \xi^2 \int (a_2^2 + \xi^2)^{-(1+2f)/(1+f)} da_2$; произвольные интегрирования $g_i(\lambda_i)$ ($i = 1, 2$) определяются из краевых условий типа (2.6). Итак, (3.2), (3.4), (3.6) представляют собой решение прямой задачи (1.1), (1.2), (3.1), а из (1.3) находится отвечающая этому решению функция Γ .

Рассмотрим задачу оптимизации и зафиксируем внешнее давление $q \neq 0$. Тогда, согласно (3.3),

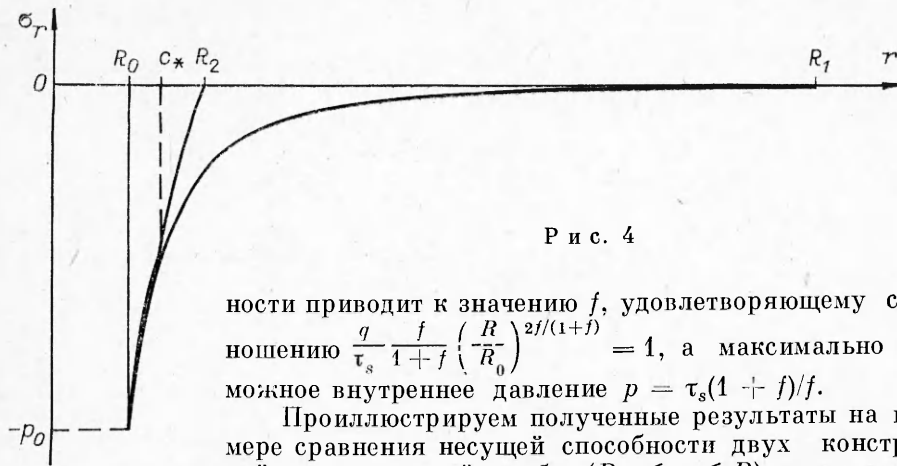
$$(3.7) \quad p = q(R/R_0)^{2f/(1+f)}.$$

Наряду с (3.7) из требования целостности конструкции вытекает ограничение на внутреннее давление в виде

$$(3.8) \quad p < \tau_s(1+f)/f.$$

Таким образом, критерий оптимальности в данной ситуации означает следующее: необходимо найти такое значение $f = \text{const}$, которое удовлетворяло бы неравенству (3.8) и приводило бы к максимуму p в равенстве (3.7).

Если конструкция рассчитана на работу при $q < \tau_s(R_0/R)^2$, то критерий оптимальности приводит к ситуации, когда $f \rightarrow \infty$, и максимально возможное внутреннее давление в этом случае $p \rightarrow \tau_s$. Таким образом, при достаточно малых значениях q несущая способность рулонированной оболочки мало отличается от несущей способности цельной толстостенной трубы. Для класса нагружений при $q > \tau_s(R_0/R)^2$ условие оптималь-



Р и с. 4

ности приводит к значению f , удовлетворяющему соотношению $\frac{q}{\tau_s} \frac{f}{1+f} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2f/(1+f)} = 1$, а максимально возможное внутреннее давление $p = \tau_s(1+f)/f$.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере сравнения несущей способности двух конструкций: толстостенной трубы ($R_0 \leq r \leq R$) и рулонированной оболочки ($R_0 \leq r \leq c$) с внешним упругим кольцом ($c \leq r \leq R$). Пусть давление на внешней границе отсутствует ($\sigma_r|_{r=R} = 0$). Тогда, как известно [2], в первом случае при сохранении целостности материала максимально возможное внутреннее давление

$$(3.9) \quad p_1 = \tau_s \left(1 - R_0^2/R^2 \right),$$

причем $p \rightarrow \tau_s$, если $R \rightarrow \infty$, т. е. при неограниченном увеличении толщины трубы ее несущая способность остается ограниченной. При анализе несущей способности второй конструкции появляется параметр c , который наряду с коэффициентом f тоже можно использовать в качестве оптимизирующего параметра. В итоге оптимальными значениями c_* и f_* будут

решения уравнений $\frac{c_*^2}{R^2} = \frac{\ln(R/c_*)}{\ln(R/R_0)}$ и $f_* = c_*^2 / (R^2 - 2c_*^2)$. При таких f_* , c_* максимально возможное давление достигает значения

$$(3.10) \quad p_2 = \tau_s \left(R^2/c_*^2 - 1 \right).$$

Нетрудно показать, что $p_2 \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$, т. е. неограниченный рост толщины рулонированной трубы с внешним упругим кольцом увеличивает ее несущую способность также неограниченно.

Из (3.9), (3.10) следует, что если зафиксировать некоторое внутреннее давление p_0 ($p_0 = 0,99 \tau_s$), то при постоянном R_0 минимальный внешний радиус цельной трубы $R_1 = R_0 / \sqrt{1 - p_0/\tau_s}$ ($R_1 = 10 R_0$), в то время как необходимый внешний радиус рулонированной оболочки с упругим кольцом существенно меньше: $R_2 = R_0 \exp((1/2)(1 + p_0/\tau_s) \ln(1 + p_0/\tau_s))$ ($R_2 \approx 1,98 R_0$) (рис. 4).

Таким образом, полученные результаты показывают, что напряженным состоянием конструкции можно управлять с помощью выбора оптимального взаимодействия слоев. При этом достигается более равномерная, чем в цельной трубе, загрузка материала, что позволяет увеличить несущую способность конструкции в 2–4 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф. Пластические модели в задачах упругого деформирования рулонированных оболочек // ПМТФ.— 1988.— № 3.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
3. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды.— М.: Физматгиз, 1960.

Поступила 4/IV 1987 г.