УДК 532.522.2 + 537.84

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУЙНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫХ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Ю. Г. Губарев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучается задача линейной устойчивости установившихся осесимметричных струйных сдвиговых течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле. Прямым методом Ляпунова получено необходимое и достаточное условие устойчивости этих течений по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям специального вида. Показано, что в случае, когда данное условие устойчивости не выполняется, рассматриваемые стационарные течения неустойчивы относительно произвольных малых осесимметричных длинноволновых возмущений. Построены априорные экспоненциальные оценки роста малых возмущений. Приведены примеры стационарных течений и налагаемых на них малых возмущений, которые эволюционируют во времени согласно построенным оценкам.

Ключевые слова: струйные сдвиговые течения, длинноволновое приближение, устойчивость, прямой метод Ляпунова.

1. Постановка точной задачи. Изучается бесконечная по длине цилиндрическая струя невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости, находящаяся в безграничном пространстве. Предполагается, что в вещество струи "вморожено" азимутальное магнитное поле, а по ее свободной поверхности течет продольный постоянный электрический ток, который создает в неограниченном пространстве, окружающем струю, квазистационарное азимутальное магнитное поле. Кроме того, полагается, что исследуемые струйные магнитогидродинамические течения идеальной жидкости являются осесимметричными, причем азимутальная составляющая поля скорости тождественно равна нулю. Считается также, что действие сил поверхностного натяжения на свободной границе проводящей струи можно не учитывать.

В силу этих предположений система уравнений одножидкостной идеальной магнитной гидродинамики [1] принимает вид

$$\rho\Big(\frac{\partial v_1}{\partial t^*}+v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial r^*}+v_3\,\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\Big)+\frac{H_2^2}{4\pi r^*}=-\frac{\partial P_*}{\partial r^*},\qquad \rho\Big(\frac{\partial v_3}{\partial t^*}+v_1\,\frac{\partial v_3}{\partial r^*}+v_3\,\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\Big)=-\frac{\partial P_*}{\partial z^*},$$
$$\frac{\partial H_2}{\partial t^*}+v_1\,\frac{\partial H_2}{\partial r^*}+v_3\,\frac{\partial H_2}{\partial z^*}-\frac{v_1H_2}{r^*}=0,\qquad \frac{1}{r^*}\,\frac{\partial(v_1r^*)}{\partial r^*}+\frac{\partial v_3}{\partial z^*}=0, \tag{1.1}$$

где $\rho\equiv\mathrm{const}$ — поле плотности; v_1, v_3 — радиальная и осевая компоненты поля скорости; H_2 — азимутальная составляющая магнитного поля внутри струи; P — поле давления; $P_*\equiv P+H_2^2/(8\pi)$ — модифицированное поле давления; t^* — время; r^*, z^* — цилиндрические координаты. Полагается, что ось z^* цилиндрической системы координат совпадает с осью проводящей струи.

Азимутальная компонента H_2^* магнитного поля снаружи струи в пренебрежении током смещения определяется формулой

$$H_2^* = 2J/r^* \tag{1.2}$$

($J \equiv \mathrm{const}$ — величина поверхностного продольного постоянного электрического тока).

На оси проводящей струи и ее свободной границе ставятся следующие краевые условия:

$$\begin{gathered} v_1 = 0, \quad |H_2/r^*| < +\infty \qquad (r^* = 0), \\ P_* = \frac{H_2^{*2}}{8\pi}, \quad v_1 = \frac{\partial r_1}{\partial t^*} + v_3\,\frac{\partial r_1}{\partial z^*} \qquad (r^* = r_1(t^*, z^*)). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Начальные данные для первых трех соотношений системы (1.1) и последнего краевого условия (1.3) задаются в виде

$$\begin{gathered} v_1(0, r^*, z^*) = v_{10}(r^*, z^*), \qquad v_3(0, r^*, z^*) = v_{30}(r^*, z^*), \\ H_2(0, r^*, z^*) = H_{20}(r^*, z^*), \qquad r_1(0, z^*) = r_{10}(z^*), \end{gathered} \tag{1.4}$$

при этом требуется, чтобы функции v_{10}, v_{30}, H_{20}, r_{10} не противоречили четвертому уравнению системы (1.1) и первым трем соотношениям в (1.3).

Далее в смешанной задаче (1.1)–(1.4) осуществляется переход к длинноволновому приближению, предваряемый процедурой обезразмеривания. В качестве обезразмеривающих параметров выбираются следующие: L — характерный пространственный масштаб изменения гидродинамических и магнитных полей вдоль оси z^*, v_0 — характерная скорость жидкости, r_0 — характерный радиус струи. С использованием данных параметров вводятся безразмерные величины t, η, z, q, w, p_*, h, $æ$ так, что имеют место соотношения

$$t^* = tL/v_0, \quad r^{*2} = \eta L^2\delta^2, \quad z^* = zL, \quad 2v_1 r^* = qv_0 L\delta^2,$$

$$v_3 = wv_0, \quad P_* = p_*\rho v_0^2, \quad H_2 = hr^*\sqrt{4\pi\rho v_0^2}\,/(L\delta), \quad H_2^* r^* = æ\sqrt{4\pi\rho v_0^2}\,L\delta,$$

где $\delta = r_0/L \ll 1$ — безразмерный характерный радиус проводящей струи.

В результате обезразмеривания с применением приведенных выше соотношений система уравнений (1.1) запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} \delta^2(q_t + qq_\eta - q^2/(2\eta) + wq_z)/2 + \eta h^2 = -2\eta p_{*\eta}, \\ w_t + qw_\eta + ww_z = -p_{*z}, \qquad h_t + qh_\eta + wh_z = 0, \qquad q_\eta + w_z = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

С учетом соотношения (1.2) краевые условия (1.3) преобразуются к виду

$$\begin{gathered} q = 0, \quad |h| < +\infty \qquad (\eta = 0), \\ p_* = æ^2/(2\eta_1), \quad q = \eta_{1t} + w\eta_{1z} \qquad (\eta = \eta_1(t, z)), \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $æ \equiv J/(r_0\sqrt{\pi\rho v_0^2}\,) = \mathrm{const}$.

Начальные данные (1.4) запишутся в виде

$$\begin{gathered} q(0, \eta, z) = q_0(\eta, z), \qquad w(0, \eta, z) = w_0(\eta, z), \\ h(0, \eta, z) = h_0(\eta, z), \qquad \eta_1(0, z) = \eta_{10}(z). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Если в первом уравнении системы (1.5) опустить слагаемые, пропорциональные δ^2, а из соотношений (1.7) исключить выражение для функции $q(0, \eta, z)$, то начально-краевая задача (1.5)–(1.7) сведется к виду, отвечающему длинноволновому приближению. Это представление задачи (1.5)–(1.7) нельзя признать окончательным, так как она может быть еще упрощена за счет замены эйлеровых независимых переменных t, z, η смешанными эйлерово-лагранжевыми независимыми переменными t', z', ν [2]. По аналогии с работой [3] такая замена производится по формулам

$$t = t', \qquad z = z', \qquad \eta = R(t', z', \nu), \qquad \nu \in [0, 1].$$

Предполагается, что функция R удовлетворяет уравнению

$$q = R_{t'} + wR_{z'} \tag{1.8}$$

и краевым условиям

$$R(t', z', 0) = 0, \qquad R(t', z', 1) = \eta_1(t', z'). \tag{1.9}$$

Суть данной замены независимых переменных состоит в том, что при помощи лагранжевой переменной ν оказывается возможным пронумеровать траектории движения жидких частиц в струе. Кроме того, из определения функции R (см. (1.8), (1.9)) следует, что краевые условия (1.6) выполняются для функции q автоматически. Наконец (и это главное), согласно осуществляемой замене независимых переменных неизвестная свободная поверхность проводящей струи $\eta = \eta_1$ перейдет в известную фиксированную границу $\nu = 1$.

Итак, в новых смешанных эйлерово-лагранжевых независимых переменных (если пренебречь слагаемыми с δ^2) система соотношений (1.5) запишется в виде

$$\begin{gathered} R_\nu h^2 = -2p_{*\nu}, \qquad R_\nu(w_t + ww_z) = -R_\nu p_{*z} + R_z p_{*\nu}, \\ h_t + wh_z = 0, \qquad q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0, \end{gathered} \tag{1.10}$$

где для удобства записи последующих формул штрихи у переменных t', z' опущены. Данные уравнения дополняются начальными условиями

$$w(0, z, \nu) = w_0(z, \nu), \qquad h(0, z, \nu) = h_0(z, \nu), \qquad R(0, z, \nu) = R_0(z, \nu). \tag{1.11}$$

Здесь исходя из требования взаимной однозначности произведенной замены независимых переменных функция $R_0(z, \nu)$ предполагается монотонно возрастающей по аргументу ν.

Для придания системе (1.10) более наглядной формы выполняется интегрирование по переменной ν первого соотношения в пределах от ν до 1, а затем с использованием краевых условий (1.6) из него исключается безразмерное модифицированное поле давления p_* и подставляется во второе уравнение той же системы соотношений, что позволяет получить уравнение

$$w_t + ww_z = \frac{\text{æ}^2 R_{1z}}{2R_1^2} - \frac{(h_1^2 R_1)_z}{2} + \frac{(h^2)_z R}{2} + \frac{1}{2}\Big(\int\limits_\nu^1 R(h^2)_{\nu_1}\, d\nu_1\Big)_z, \tag{1.12}$$

где h_1, R_1 — соответственно значения функций h, R на свободной поверхности струи $\nu = 1$, причем в силу второго краевого условия системы (1.9) $R_1(t, z) \equiv \eta_1(t, z)$.

В последнем уравнении системы (1.10) функция q заменяется соответствующим ей выражением (1.8), в результате чего данное уравнение принимает вид

$$(R_\nu)_t + (wR_\nu)_z = 0. \tag{1.13}$$

Ниже полагается, что азимутальная составляющая магнитного поля внутри проводящей струи прямо пропорциональна радиальной координате: $h \equiv h_1 = \mathrm{const}$ [3]. Это допущение приводит, с одной стороны, к обращению в тождество третьего соотношения системы (1.10), а с другой — к заметному упрощению уравнения (1.12), которое теперь может быть записано в виде

$$w_t + ww_z = [(\text{æ}/R_1)^2 - h_1^2]R_{1z}/2. \tag{1.14}$$

Начальными условиями для соотношений (1.13), (1.14) будут условия (1.11) для функций R, w:

$$R(0, z, \nu) = R_0(z, \nu), \qquad w(0, z, \nu) = w_0(z, \nu). \tag{1.15}$$

Следует отметить, что уравнения, подобные соотношениям (1.13), (1.14), можно вывести и тогда, когда R считается монотонно убывающей по аргументу ν функцией. При этом отличие от изложенного выше заключается лишь в том, что роль свободной границы исследуемой струи будет играть прямая $\nu = 0$, а роль оси симметрии — прямая $\nu = 1$.

Начально-краевая задача (1.13)–(1.15) имеет интеграл энергии вида

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_0^1 w^2 R_\nu \, d\nu + \text{æ}^2 \ln R_1 + \frac{h_1^2}{2} R_1^2 \Big) \, dz = \text{const} \tag{1.16}$$

в предположении, что решения данной задачи либо периодичны вдоль оси z, либо локализованы на ней (в последнем случае на бесконечности будет реализовываться однородное по координате z течение жидкости).

Нетрудно показать, что у смешанной задачи (1.13)–(1.15) имеется еще один интеграл движения. А именно, продифференцировав (1.14) по независимой переменной ν, получим

$$w_{\nu t} + (w w_z)_\nu = 0. \tag{1.17}$$

Далее, из уравнений (1.13), (1.17) следует важное соотношение

$$C_t + w C_z = 0 \tag{1.18}$$

($C \equiv R_\nu / w_\nu$), использование которого совместно с (1.17) позволяет показать, что функционал

$$I \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 w_\nu F(C) \, d\nu \, dz \tag{1.19}$$

($F(C)$ — произвольная функция) является искомым добавочным интегралом движения [3, 4].

Точные стационарные решения начально-краевой задачи (1.13)–(1.15) могут быть представлены в виде

$$w = w^0(\nu), \qquad R = R^0(\nu), \qquad R_1 = R_1^0 \equiv 1. \tag{1.20}$$

Здесь w^0, R^0 — произвольная и монотонно возрастающая функции независимой переменной ν; установившийся радиус проводящей струи принимается равным ее характерному радиусу r_0. Легко убедиться, что функции w^0, R^0, R_1^0 (см. (1.20)) тождественно удовлетворяют уравнениям (1.13), (1.14).

Цель дальнейшего исследования состоит в том, чтобы выяснить, при выполнении каких условий стационарные течения (1.20) окажутся устойчивыми по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t, z, \nu)$, $R'(t, z, \nu)$ и $R_1'(t, z)$.

2. Устойчивость произвольных установившихся осесимметричных струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле. Проводится линеаризация смешанной задачи (1.13)–(1.15), а также соотношений (1.17), (1.18) на точных стационарных решениях (1.20). В результате линеаризации получим начально-краевую задачу вида

$$w_t' + w^0 w_z' = \frac{1}{2} (\text{æ}^2 - h_1^2) R_{1z}', \qquad R_{\nu t}' + w^0 R_{\nu z}' + \frac{dR^0}{d\nu} w_z' = 0,$$

$$\begin{gathered} w'_{\nu t} + \frac{dw^0}{d\nu}\, w'_z + w^0 w'_{z\nu} = 0, \qquad C'_t + w^0 C'_z = 0, \\ C' \equiv \Big(\frac{dw^0}{d\nu}\Big)^{-1} [R'_\nu - C^0 w'_\nu], \qquad C^0 \equiv \frac{dR^0}{d\nu} \Big(\frac{dw^0}{d\nu}\Big)^{-1}, \\ w'(0,z,\nu) = w'_0(z,\nu), \qquad R'(0,z,\nu) = R'_0(z,\nu), \end{gathered} \tag{2.1}$$

на решениях которой с течением времени сохраняется функционал

$$E \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \Big[\frac{1}{2}\,\frac{dR^0}{d\nu}\, w'^2 + w^0 w' R'_\nu + \frac{1}{2}\,\frac{dw^0}{d\nu}\,\frac{d^2F}{dC^2}\,(C^0) C'^2\Big]\, d\nu\, dz + {} \\ + \frac{h_1^2 - æ^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2\, dz = \mathrm{const}\,. \tag{2.2}$$

Можно проверить, что первая вариация δJ_1 интеграла $J_1 \equiv E_1 + I = \mathrm{const}$ (см. (1.16), (1.19)) обращается в нуль на установившихся течениях (1.20), если функции w^0, R^0, F превращают в тождество уравнение

$$\frac{dF}{dC}\,(C^0) = -\frac{w^{02}}{2},$$

а его вторая вариация $\delta^2 J_1$, записанная в соответствующих обозначениях, совпадает по форме с функционалом E.

Точные стационарные решения (1.20) смешанной задачи (1.13)–(1.15) устойчивы по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (2.1) тогда и только тогда, когда интеграл E в (2.2) является знакоопределенным.

Для того чтобы установить, обладает ли функционал E свойством знакоопределенности, его удобно записать в виде

$$E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\, d\nu\, dz, \qquad \boldsymbol{u} \equiv (w', R'_\nu, C', R'_1)^{\mathrm{T}}, \tag{2.3}$$

где $A = \|a_{ik}\|$ — квадратная матрица размером 4×4 с отличными от нуля элементами:

$$a_{11} = \frac{1}{2}\,\frac{dR^0}{d\nu}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{w^0}{2}, \quad a_{24} = a_{42} = \frac{h_1^2 - æ^2}{8}, \quad a_{33} = \frac{1}{2}\,\frac{dw^0}{d\nu}\,\frac{d^2F}{dC^2}\,(C^0).$$

Согласно критерию Сильвестра [5] подынтегральное выражение функционала E в (2.3) положительно (отрицательно) определено в том и только том случае, если главные миноры матрицы A положительны (имеют множитель $(-1)^m$, где m — порядок того или иного главного минора).

Нетрудно установить, что главные миноры матрицы A не обладают требуемым свойством знакоопределенности. Так, для положительной определенности подынтегрального выражения функционала E должны быть, в частности, истинны неравенства

$$\frac{dR^0}{d\nu} > 0, \qquad -w^{02} > 0.$$

Видно, что второе неравенство невыполнимо в принципе, поскольку отрицательное число, естественно, меньше нуля. В то же время для отрицательной определенности данного подынтегрального выражения необходимо выполнение неравенств

$$\frac{dR^0}{d\nu} < 0, \qquad -w^{02} > 0.$$

Первое неравенство не выполняется в силу характера монотонности функции R^0, а второе не выполняется, так как величина w^{02} положительная.

Таким образом, ни положительной, ни отрицательной определенности у функционала E (см. (2.3)) нет. Это, в свою очередь, означает, что достаточные условия устойчивости точных стационарных решений (1.20) начально-краевой задачи (1.13)–(1.15) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$, $R_1'(t,z)$ (см. (2.1)), понимаемые как условия знакоопределенности энергетического, вообще говоря, интеграла движения E, отсутствуют. По-видимому, аналогичная ситуация будет наблюдаться и при рассмотрении более общих постановок задач об устойчивости установившихся струйных сдвиговых магнитогидродинамических течений со свободной границей.

3. Устойчивость частных стационарных осесимметричных струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле. Ниже прямым методом Ляпунова [6, 7] будет получено необходимое и достаточное условие устойчивости подкласса установившихся течений (1.20)

$$\frac{d}{d\nu}\,(w^0C^0) \leqslant 0 \tag{3.1}$$

по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (2.1), которые для каждой жидкой частицы оставляют неизменным значение функции $C^0(\nu)$, а также удовлетворяют ряду ограничений на оси симметрии исследуемой струи и ее свободной границе.

Для того чтобы показать неустойчивость какого-либо точного стационарного решения (1.20), (3.1) смешанной задачи (1.13)–(1.15) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$, $R_1'(t,z)$ (см. (2.1)), необходимо выделить среди данных возмущений хотя бы одно экспоненциально быстро нарастающее во времени. С этой целью изучается частный класс осесимметричных струйных сдвиговых течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле, обладающий тем свойством, что для принадлежащих ему течений малые возмущения $C'(t,z,\nu)$ (см. (1.18), (2.1)) равны нулю. Иными словами, полагается, что для любой жидкой частицы значение функции C^0 (см. (1.20), (2.1), (3.1)) при возмущениях не меняется, т. е. данные возмущения представляют собой отклонения траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (1.20), (3.1).

С физической точки зрения предъявленное выше требование к малым возмущениям обосновывается тем, что циркуляция скорости по любому жидкому контуру в осевой плоскости, заданная в начальный момент времени, будет сохраняться и в процессе развития возмущений, так как согласно начально-краевой задаче (1.13)–(1.15) в жидких частицах не изменяется значение функции C (см. (1.18)). Эти возмущения могут быть введены с помощью поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t,z,\nu)$ [8], определяемого уравнением

$$\xi_t = w' - w^0\xi_z. \tag{3.2}$$

Используя соотношения (3.2), смешанную задачу (2.1) можно записать в виде

$$\begin{gathered} w_t' + w^0w_z' = \frac{1}{2}\,(æ^2 - h_1^2)R_{1z}', \qquad R_\nu' = -\frac{dR^0}{d\nu}\,\xi_z, \\ w_\nu' = -\frac{dw^0}{d\nu}\,\xi_z, \qquad R_\nu' = C^0w_\nu', \\ \xi(0,z,\nu) = \xi_0(z,\nu), \qquad w'(0,z,\nu) = w_0'(z,\nu). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Непосредственными вычислениями функционал E в (2.2) может быть преобразован к виду

$$E = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int\limits_{0}^{1} \frac{d}{d\nu} (R^0 - w^0 C^0) w'^2 \, d\nu + \frac{h_1^2 - \varkappa^2}{2} R_1'^2 \Big] \, dz \tag{3.4}$$

и будет служить интегралом движения для начально-краевой задачи (3.2), (3.3), если имеют место равенства

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (w^0 C^0 w'^2)\big|_{\nu=1} \, dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (w^0 C^0 w'^2)\big|_{\nu=0} \, dz, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (w^0 C^0 w')\big|_{\nu=1} R_{1z}' \, dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (w^0 C^0 w')\big|_{\nu=0} R_{1z}' \, dz. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Важно заметить, что из выполнения одного условия (3.5) следует выполнение другого. Кроме того, поскольку функция $w'(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3)) как функция независимой переменной ν обладает некоторым произволом на оси симметрии $\nu = 0$ проводящей струи и ее свободной поверхности $\nu = 1$, данные равенства можно интерпретировать как краевые условия смешанной задачи (3.2), (3.3).

Анализ выражения для функционала E в (3.4) показывает, что если справедливо неравенство

$$h_1^2 \geqslant \varkappa^2, \tag{3.6}$$

то с учетом свойств монотонности функции R^0 и независимости интеграла E от времени из него следует устойчивость точных стационарных решений (1.20), (3.1) начально-краевой задачи (1.13)–(1.15) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)).

Пусть неравенство (3.6) нарушено, т. е. выполняется соотношение

$$h_1^2 < \varkappa^2. \tag{3.7}$$

Тогда можно показать неустойчивость установившихся течений (1.20), (3.1) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (3.2), (3.3), (3.5).

Действительно, дважды дифференцируя по независимой переменной t вспомогательный функционал

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} \xi^2 \, d\nu \, dz \tag{3.8}$$

и применяя связи (3.2)–(3.5), получим так называемое вириальное равенство [8–10]

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = 4(T - \Pi), \tag{3.9}$$

где

$$T \equiv \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} w'^2 \, d\nu \, dz, \qquad \Pi \equiv \frac{h_1^2 - \varkappa^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2 \, dz.$$

Умножая равенство (3.9) на некоторую постоянную λ и учитывая соотношение

$$E \equiv T + T_1 + \Pi = \text{const}, \tag{3.10}$$

где

$$T_1 \equiv -\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \frac{d}{d\nu}\,(w^0 C^0) w'^2 \, d\nu \, dz \geqslant 0,$$

получим основное для последующего исследования уравнение

$$\frac{dE_\lambda}{dt} = 2\lambda E_\lambda - 4\lambda T_\lambda - 2\lambda T_1, \tag{3.11}$$

где

$$E_\lambda \equiv \Pi_\lambda + T_\lambda, \qquad 2\Pi_\lambda \equiv 2(\Pi + T_1) + \lambda^2 M,$$

$$2T_\lambda \equiv 2T - \lambda\,\frac{dM}{dt} + \lambda^2 M = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}\,(w' - \lambda\xi)^2 \, d\nu \, dz \geqslant 0.$$

В силу неотрицательности величин T_1 (см. (3.10)) и T_λ из соотношения (3.11) при $\lambda > 0$ следует дифференциальное неравенство

$$\frac{dE_\lambda}{dt} \leqslant 2\lambda E_\lambda,$$

интегрируя которое несложно получить важную оценку

$$E_\lambda(t) \leqslant E_\lambda(0) \exp{(2\lambda t)}. \tag{3.12}$$

Соотношение (3.12) истинно как для любых решений смешанной задачи (3.2), (3.3), (3.5), так и для произвольных положительных значений λ. Кроме того, при нахождении данного неравенства не налагалось никаких ограничений на знак функционала Π в (3.9).

Из соотношения (3.12) следует, что интеграл E_λ, вообще говоря, меняется со временем монотонным образом. Это обстоятельство позволяет рассматривать данный функционал как функционал Ляпунова [6, 7, 9, 10].

Далее с помощью неравенства (3.12) будут построены двусторонние экспоненциальные оценки роста малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t, z, \nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)), причем среди последних будут выделены и описаны наиболее быстро нарастающие малые возмущения.

Используя соотношение (3.7), путем подбора надлежащих начальных поля лагранжевых смещений $\xi_0(z, \nu)$ и возмущений поля скорости $w'_0(z, \nu)$ (см. (3.3)) нетрудно обеспечить справедливость неравенств $\Pi(0) < 0$, $T(0) + T_1(0) < |\Pi(0)|$. В результате интеграл $E_\lambda(0)$, как следует из (3.11), будет полиномом второй степени по параметру λ с положительным коэффициентом $M(0)$ (см. (3.8)) при λ^2 и отрицательным свободным членом $E(0)$ (см. (3.4)):

$$E_\lambda(0) = E(0) - \frac{\lambda}{2}\,\frac{dM}{dt}(0) + \lambda^2 M(0). \tag{3.13}$$

Если значения λ берутся из интервала

$$0 < \lambda < \Lambda \equiv A_1 + \sqrt{A_2}, \tag{3.14}$$

где

$$A_1 \equiv [4M(0)]^{-1} \frac{dM}{dt}(0), \qquad A_2 \equiv A_1^2 - \frac{E(0)}{M(0)},$$

то из соотношения (3.13) следует оценка $E_\lambda(0) < 0$. Данная оценка и неравенство (3.12) свидетельствуют об экспоненциальном во времени росте малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), (3.5).

При условии, что $\lambda \equiv \Lambda - \delta_1$ (с любым параметром δ_1 из интервала $]\,0, \Lambda\,[\,$), соотношение (3.12) можно представить в виде

$$E_{\Lambda-\delta_1}(t) \leqslant E_{\Lambda-\delta_1}(0) \exp\left[2(\Lambda - \delta_1)t\right] \qquad (E_{\Lambda-\delta_1}(0) < 0). \tag{3.15}$$

Поскольку в силу представления (3.11) выполняется неравенство $E_\lambda(t) > \Pi(t)$, соотношение (3.15) можно записать в виде

$$-\Pi(t) > |E_{\Lambda-\delta_1}(0)| \exp\left[2(\Lambda - \delta_1)t\right]$$

или окончательно

$$(æ^2 - h_1^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2\, dz > 4|E_{\Lambda-\delta_1}(0)| \exp\left[2(\Lambda - \delta_1)t\right]. \tag{3.16}$$

Из неравенства (3.16) следует, что величина $\Lambda - \delta_1$ (см. (3.14), (3.15)) является нижней границей значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений $\xi(t, z, \nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)).

Оценка (3.16) может быть существенно улучшена, если начальные поле лагранжевых смещений $\xi_0(z, \nu)$ и возмущения поля скорости $w_0'(z, \nu)$ (см. (3.3)) дополнительно подчинить требованию

$$w_0'(z, \nu) = \lambda \xi_0(z, \nu). \tag{3.17}$$

Действительно, из соотношений (3.11), (3.13) следует, что $T_\lambda(0) = 0$, $E_\lambda(0) = \Pi_\lambda(0)$. В свою очередь, эти равенства позволяют убедиться, что на интервале

$$0 < \lambda < \Lambda_1 \equiv \sqrt{-2\Pi(0)/M(0)} \tag{3.18}$$

верна оценка $\Pi_\lambda(0) < 0$. Отсюда следует, что, считая $\lambda \equiv \Lambda_1 - \delta_2$ (с произвольным параметром δ_2 из интервала $]\,0, \Lambda_1[\,$), можно преобразовать неравенство (3.12) к виду

$$E_{\Lambda_1-\delta_2}(t) \leqslant \Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0) \exp\left[2(\Lambda_1 - \delta_2)t\right] \qquad (\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0) < 0). \tag{3.19}$$

Если выполнить вычисления, аналогичные проведенным при обосновании оценки (3.16), то неравенство (3.19) можно записать в виде

$$-\Pi(t) > |\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)| \exp\left[2(\Lambda_1 - \delta_2)t\right]$$

либо окончательно

$$(æ^2 - h_1^2) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_1'^2\, dz > 4|\Pi_{\Lambda_1-\delta_2}(0)| \exp\left[2(\Lambda_1 - \delta_2)t\right]. \tag{3.20}$$

Согласно соотношению (3.20) величина $\Lambda_1 - \delta_2$ (см. (3.18), (3.19)) является оценкой снизу значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), (3.5), (3.17).

Из сопоставления неравенств (3.16) и (3.20) следует, что малые осесимметричные длинноволновые возмущения $\xi(t, z, \nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)), начальные данные которых удовлетворяют ограничению (3.17), нарастают быстрее остальных возмущений исследуемого подкласса, а наиболее быстро растущие среди них те, инкременты которых, как будет показано ниже, вычисляются по формуле

$$\Lambda_1^+ \equiv \sup_{\xi_0(z,\nu)} \Lambda_1. \tag{3.21}$$

Действительно, пусть $\lambda > \Lambda_1^+$. В этом случае для всех возможных начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(z,\nu)$ (см. (3.3)) будет справедливо соотношение $\Pi_\lambda(0) > 0$. Значит, интеграл $E_\lambda(0)$ (см. (3.11), (3.13)) также будет положительно определен для всех допустимых начальных полей лагранжевых смещений $\xi_0(z,\nu)$ и возмущений поля скорости $w_0'(z,\nu)$ (см. (3.3)).

При $\lambda \equiv \Lambda_1^+ + \delta_3$ ($\delta_3 > 0$ — параметр) из неравенства (3.12) вытекает оценка

$$E_{\Lambda_1^+ + \delta_3}(t) \leqslant E_{\Lambda_1^+ + \delta_3}(0) \exp\,[2(\Lambda_1^+ + \delta_3)t]. \qquad (3.22)$$

В силу (3.22) величина $\Lambda_1^+ + \delta_3$ является верхней границей значений инкрементов малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), (3.5).

Сравнение неравенств (3.20) и (3.22) позволяет сделать вывод, что величина Λ_1^+ (см. (3.18), (3.21)) оценивает скорость нарастания ω малых возмущений (3.2), (3.3), (3.5) как снизу, так и сверху:

$$\Lambda_1^+ - \delta_2 \leqslant \omega \leqslant \Lambda_1^+ + \delta_3. \qquad (3.23)$$

Соотношение (3.23) показывает, что быстрее растут малые осесимметричные длинноволновые возмущения $\xi(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)), инкремент которых близок по величине к Λ_1^+.

Таким образом, если условие (3.7) справедливо, то, определив с учетом соотношений (3.18), (3.21) величину Λ_1^+, оценивающую скорость нарастания ω (см. (3.23)) наиболее быстро растущих малых возмущений (3.2), (3.3), (3.5), (3.17), можно ответить на вопрос, за какие характерные времена малые осесимметричные длинноволновые возмущения (3.2), (3.3), (3.5) будут вызывать разрушение стационарных осесимметричных струйных сдвиговых течений (1.20), (3.1) невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле.

Далее строится пример установившихся течений (1.20), (3.1) и налагаемых на них начальных малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), (3.5), которые будут, вообще говоря, эволюционировать со временем в соответствии с полученными оценками (3.16), (3.22). Исследуются стационарные осесимметричные струйные сдвиговые магнитогидродинамические течения

$$w^0(\nu) = C_1 \exp\,(-C_2\nu), \qquad R^0(\nu) = \nu, \qquad R_1^0 = 1 \qquad (3.24)$$

(C_1, C_2 — положительные постоянные) идеальной жидкости в области, представляющей собой бесконечную полосу

$$\big[(z,\nu)\colon\ -\infty < z < +\infty,\ 0 \leqslant \nu \leqslant 1\big]. \qquad (3.25)$$

Эти течения, в чем несложно убедиться, являются типичными представителями частного класса (3.1) установившихся течений (1.20).

Если неравенство (3.7) выполнено, то стационарные течения (3.24), (3.25) будут неустойчивы, например, по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $\xi(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3), (3.5)), для которых начальное поле лагранжевых смещений $\xi_0(z,\nu)$ задается в виде

$$\xi_0(z,\nu) = (2\nu - 1) \exp\,(C_2\nu) \sin\,(2\pi z/l), \qquad (3.26)$$

где l — произвольная положительная постоянная. С физической точки зрения данные возмущения есть периодические (с длиной волны l) флуктуации свободной границы изучаемой струи и осевой скорости текущей внутри нее жидкости.

Действительно, используя определение функции $R_1(t,z)$ (см. (1.9), (1.12)) и уравнения (3.3), нетрудно вывести соотношения

$$R_{0\nu}'(z,\nu) = -(2\pi/l)(2\nu - 1) \exp\,(C_2\nu) \cos\,(2\pi z/l),$$

$$R_1'(0,z) \equiv \int\limits_0^1 R_{0\nu}'(z,\nu)\,d\nu = -\frac{2\pi}{lC_2}\Big[\Big(1-\frac{2}{C_2}\Big)\exp{(C_2)}+\frac{2}{C_2}+1\Big]\cos\frac{2\pi z}{l},$$

$$w_{0\nu}'(z,\nu) = (2\pi C_1C_2/l)(2\nu-1)\cos{(2\pi z/l)},$$

$$w_0'(z,\nu) = \int\limits_0^\nu w_{0\nu_1}'(z,\nu_1)\,d\nu_1 = \frac{2\pi C_1C_2}{l}\,(\nu^2-\nu)\cos\frac{2\pi z}{l}.$$

Следует отметить, что, поскольку здесь

$$w_0'(z,0)=0, \qquad w_0'(z,1)=0, \tag{3.27}$$

краевые условия (3.5) удовлетворяются тождественно, и поэтому при $t=0$ они согласованы с начальными условиями (3.3), (3.27).

Учитывая периодичность поля $\xi_0(z,\nu)$ (см. (3.26)) по независимой переменной z и выражения (3.9), (3.10) для функционалов T, T_1, Π, можно вычислить значения последних в начальный момент времени:

$$T(0) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^1 \frac{dR^0}{d\nu}\,w_0'^2(z,\nu)\,d\nu\,dz = \frac{\pi^2C_1^2C_2^2}{30l},$$

$$T_1(0) \equiv -\frac{1}{2}\int\limits_0^l\int\limits_0^1 \frac{d}{d\nu}\,(w^0C^0)w_0'^2(z,\nu)\,d\nu\,dz = 0,$$

$$\Pi(0) \equiv \frac{h_1^2-æ^2}{4}\int\limits_0^l R_1'^2(0,z)\,dz = \frac{\pi^2(h_1^2-æ^2)}{2lC_2^2}\Big[\Big(1-\frac{2}{C_2}\Big)\exp{(C_2)}+\frac{2}{C_2}+1\Big]^2.$$

Отсюда следует, что неравенство $\Pi(0)<0$ истинно, а неравенство $T(0)+T_1(0)<|\Pi(0)|$ будет справедливо, если постоянные C_1, C_2 выбраны должным образом, например: $0<C_1<(3-e)\sqrt{15(æ^2-h_1^2)}$, $C_2=1$.

В итоге для установившихся течений (3.24), (3.25) в явном виде могут быть записаны оценки снизу (3.16) и сверху (3.22) (вторая — с параметром Λ_1 вместо Λ_1^+), характеризующие процесс нарастания малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), (3.5), (3.26), что свидетельствует о неустойчивости этих течений. Важно заметить, что скорость роста ω в (3.23) малых возмущений (3.2), (3.3), (3.5), (3.26) оценивается и снизу, и сверху величиной Λ_1 (3.18), а не Λ_1^+ (3.21).

Наконец, наиболее быстро нарастающими малыми осесимметричными длинноволновыми возмущениями стационарных течений (3.24), (3.25) будут те, начальное поле лагранжевых смещений которых в силу уравнений (3.3) и равенства (3.17) имеет вид $\xi_0(z,\nu)=f(w^0-\lambda z)$. При этом функция f должна быть или периодической, или локализованной по координате z. Тогда о характере роста данных возмущений можно будет судить на основании оценок снизу (3.20) и сверху (3.22), а скорость их нарастания ω (см. (3.23)) может быть найдена с помощью величины Λ_1^+ (см. (3.18), (3.21)).

4. Неустойчивость произвольных установившихся осесимметричных струйных сдвиговых течений идеальной жидкости со свободной поверхностью в азимутальном магнитном поле. Ниже с использованием прямого метода Ляпунова будет показано, что неравенство (3.7) является достаточным условием неустойчивости точных стационарных решений (1.20) начально-краевой задачи (1.13)–(1.15) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$, $R'_1(t,z)$ (см. (2.1)), причем экспоненциально растущее во времени возмущение будет отыскиваться среди представителей подкласса (3.2), (3.3) последних. Это означает, что установившиеся течения (1.20) считаются далее свободными от ограничения (3.1), а малые возмущения (3.2), (3.3) — от требований (3.5).

Согласно сделанным предположениям интеграл E в (2.2), сохраняющийся, естественно, не только на решениях смешанной задачи (2.1), но и на решениях начально-краевой задачи (3.2), (3.3), будет иметь вид (3.10) с тем лишь исключением, что через T_1 теперь обозначен функционал

$$T_1 \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^1 w^0 w' R'_\nu \, d\nu \, dz \tag{4.1}$$

(существенно, что интеграл T_1 в виде (4.1) уже не является знакоопределенным). Вириальное равенство (3.9) и основное уравнение (3.11) в данном случае также останутся в силе.

Принимая во внимание отмеченные выше обстоятельства и полагая, что условие (3.7) справедливо, из соотношения (3.11) можно получить дифференциальное неравенство

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geqslant 0 \tag{4.2}$$

(λ — некоторая положительная постоянная). Интегрирование этого неравенства позволяет, в свою очередь, получить следующую оценку снизу:

$$M(t) \geqslant (C_3 \cos\lambda t + C_4 \sin\lambda t) \exp(\lambda t) \tag{4.3}$$

(C_3, C_4 — известные постоянные).

Так как функционал M (см. (3.8)) по определению неотрицателен, а в правой части неравенства (4.3) содержатся ограниченные по абсолютной величине тригонометрические функции, то соотношение (4.3) без потери общности может быть преобразовано к виду

$$M(t) \geqslant C_5 \exp(\lambda t) \tag{4.4}$$

(C_5 — известная положительная постоянная).

Соотношение (4.4) показывает, что малые осесимметричные длинноволновые возмущения $\xi(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3)) точных стационарных решений (1.20) смешанной задачи (1.13)–(1.15) нарастают со временем экспоненциально. Следует отметить, что на параметр λ в неравенстве (4.4) не налагается никаких дополнительных ограничений. В этом смысле обнаруженную неустойчивость можно истолковать как своего рода "прорыв" мелкомасштабных возмущений, которые были ранее исключены из рассмотрения переходом к длинноволновому приближению, в область исследуемых крупномасштабных движений жидкости.

Далее строится пример установившихся течений (1.20) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (3.2), (3.3), которые при выполнении соотношения (3.7) развиваются во времени в соответствии с найденной оценкой снизу (4.4).

Изучаются стационарные осесимметричные струйные сдвиговые магнитогидродинамические течения идеальной жидкости
$$w^0(\nu) = a - \nu, \qquad R^0(\nu) = \nu, \qquad R_1^0 = 1 \tag{4.5}$$
($a > 1$ — постоянная величина) в бесконечной полосе (3.25). Очевидно, что данные течения принадлежат классу установившихся течений (1.20).

Если неравенство (3.7) истинно, то стационарные течения (4.5), (3.25) будут неустойчивы по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям $\xi(t,z,\nu)$ (см. (3.2), (3.3)) вида
$$\xi(t,z,\nu) = \alpha \exp(\sigma\beta t)\big[(\sigma^2 - (1/2-\nu)^2)(\cos\gamma\beta t\cos\beta z - \sin\gamma\beta t\sin\beta z) + \\ + 2\sigma(1/2-\nu)(\cos\gamma\beta t\sin\beta z + \sin\gamma\beta t\cos\beta z)\big]/[\sigma^2 + (1/2-\nu)^2]^2. \tag{4.6}$$
Здесь α — произвольная, а β — положительная постоянные, тогда как $\sigma \equiv \sqrt{(æ^2 - h_1^2)/2 - 1/4}$, $\gamma \equiv 1/2 - a$.

Непосредственной проверкой несложно убедиться, что функция $\xi(t, z, \nu)$ в (4.6) является решением начально-краевой задачи (3.2), (3.3), а также удовлетворяет соотношениям (3.9), (3.10) (с интегралом T_1 в виде (4.1)) и (4.4). Кроме того, она может быть использована в качестве примера Адамара [11], поскольку допускается некоторый произвол в выборе величины β в показателе экспоненты в правой части выражения (4.6).

Учитывая определенную универсальность дифференциального неравенства (4.2), можно надеяться на эффективность его применения при рассмотрении широкого круга задач теории гидродинамической устойчивости.

Автор выражает благодарность А. М. Блохину и Б. А. Луговцову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Половин Р. В., Демуцкий В. П.** Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
3. **Губарев Ю. Г., Никулин В. В.** Линейная длинноволновая неустойчивость одного класса стационарных струйных течений идеальной жидкости в поле собственного электрического тока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2001. № 2. С. 64–75.
4. **Губарев Ю. Г.** К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова — Пуассона // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1995. Вып. 110. С. 78–90.
5. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
6. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
7. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
8. **Чандрасекхар С.** Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
9. **Губарев Ю. Г.** К неустойчивости вращательно-симметричных МГД-течений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. № 6. С. 19–25.
10. **Губарев Ю. Г.** К неустойчивости винтовых магнитогидродинамических течений // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 1. С. 150–156.
11. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 1/VII 2003 г.