

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДВАЖДЫ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ВСЛЕДСТВИЕ ПРЯМОГО ТЕРМОУПРУГОГО ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

А. А. Мовчан, С. А. Думанский

Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия

E-mails: movchan47@mail.ru, stanislavdym@mail.ru

С учетом влияния напряжений на фазовый переход и фазового перехода на температурный режим в рамках различных постановок решены задачи устойчивости стержня из сплава с памятью формы при прямом мартенситном фазовом превращении, происходящем под действием постоянной сжимающей нагрузки. Проведено сравнение результатов полученных решений.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, устойчивость, дважды связанная постановка.

DOI: 10.15372/PMTF20180419

Введение. Явление потери устойчивости, вызванной прямым термоупругим фазовым превращением в пластинах-полосках из никелида титана, обнаружено в работе [1]. Установлено, что нагрузка, приводящая к потере устойчивости в процессе прямого превращения, может быть в 3–4 раза меньше эйлеровой критической силы, при которой происходит изотермический процесс потери устойчивости стержня из упругого материала в мартенситной фазе, для которой характерны наименьшие значения модулей упругости. В работе [2] сформулированы различные концепции и постановки, в рамках которых могут быть адекватно описаны указанные выше экспериментальные данные. Показано, что малые значения критических нагрузок при прямом превращении в основном обусловлены дополнительным фазовым переходом, происходящим при выпучивании стержня вследствие изменения напряжений. Это явление может быть описано только в связанной постановке, учитывающей влияние напряжений на фазовый переход. Если это влияние не учитывается (несвязанная постановка), то дополнительный фазовый переход отсутствует (концепция фиксированного фазового состава (ФФС)) и решение может быть получено лишь в предположении, что материал является упругим. Помимо однократно связанной возможна дважды связанная постановка краевых задач для сплавов с памятью формы (СПФ), в которой учитывается также влияние фазового перехода на температурный режим материала (нагрев вследствие выделения латентного тепла при прямом фазовом превращении и диссипативные явления).

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы (номер государственной регистрации ААА-А17-117032010136-3) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17-01-00216).

© Мовчан А. А., Думанский С. А., 2018

В случае если при решении задачи устойчивости учитывается только малое возмущение геометрической формы (для стержня — прогиб), а нагрузка не испытывает возмущений, используется концепция фиксированной нагрузки (ФН). Малый прогиб приводит к возмущению напряженного состояния в сечении, в котором имеются зона догрузки и зона разгрузки. В зоне догрузки происходит обусловленный увеличением напряжений дополнительный фазовый переход. Границы зоны догрузки заранее не известны и определяются при решении задачи устойчивости.

В случае учета наряду с возмущениями геометрической формы малых возмущений внешней нагрузки при изменении малых возмущений нагрузки происходят конечные изменения области дополнительного фазового перехода, что приводит к конечному изменению критической силы. Однако можно показать, что всегда существует малое возмущение нагрузки, при котором во всем сечении стержня происходит дополнительный фазовый переход. Дальнейшее увеличение возмущения нагрузки не приводит к изменению критической силы, которая в рассматриваемом случае принимает наименьшее значение среди всех возможных при возмущениях нагрузки и геометрической формы, являющихся малыми величинами одного порядка. Это наименьшее значение считается решением задачи в рамках концепции повсеместного дополнительного фазового перехода (ПДФП).

Что касается решения конкретных задач устойчивости, то большинство таких решений получены для случая нагружения монотонно возрастающими нагрузками в режиме сверхупругости [3, 4], мартенситной неупругости [5, 6] или обратного фазового превращения в “заневоленном” состоянии [7, 8]. В [2, 9–13] решены задачи о вызванной прямым фазовым превращением под действием постоянной нагрузки потере устойчивости стержня [2, 9] прямоугольной [10], круглой [11] и кольцевой [12] пластин и оболочек вращения [13] из СПФ.

Следует отметить, что все указанные выше задачи о потере устойчивости, вызванной фазовым переходом, для элементов из СПФ решались либо в несвязанной, либо в однократно связанной постановке. В данной работе в дважды связанной постановке получены аналитические решения задачи о потере устойчивости шарнирно закрепленного стержня из СПФ вследствие прямого мартенситного превращения под действием постоянного сжимающего усилия. Проведено сравнение результатов, найденных с использованием концепций ФН, ПДФП и ФФС.

1. Система определяющих соотношений. Задача устойчивости рассматривается на основе модифицированной системы определяющих соотношений для СПФ [14, 15], которая в одномерном случае при прямом фазовом превращении имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^{phst}, & d\varepsilon^{phst} &= d\varepsilon^{ph} + d\varepsilon^{st}, \\ \varepsilon^e &= \frac{\sigma}{E(q)}, & \frac{1}{E(q)} &= \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon^{ph} &= \omega dq, & \omega &= \text{sign}(\sigma)\rho_D(1 - qf(q))F_1(|\sigma|) + f(q)\varepsilon^{phst}, & dq > 0, \\ & & d\varepsilon^{st} &= \rho_D q_{st} F_2'(|\sigma|) d\sigma; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)), \quad t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}; \quad (1.3)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma\omega + Z(\sigma)}{\Delta S}, \quad Z(\sigma) = \frac{(E_A - E_M)\sigma^2}{2E_A E_M}; \quad (1.4)$$

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T\alpha\dot{\sigma} - (\Delta U + \omega\sigma + Z(\sigma))\dot{q} - \rho_D q_{st} F_2'(|\sigma|)\sigma\dot{\sigma}. \quad (1.5)$$

Здесь ε , ε^e , ε^{phst} — осевые компоненты полной, упругой и фазово-структурной деформации (объемная деформация при фазовом превращении и температурная деформация в силу их

малости не учитываются); σ — осевая компонента тензора напряжений; q — объемная доля мартенситной фазы; $E(q)$, E_M , E_A — модуль Юнга материала в исходном состоянии и его значения для аустенитной и мартенситной фаз; ρ_D — параметр материала, зависящий от интенсивности кристаллографической деформации при фазовом переходе; $F_1(|\sigma|)$, $F_2(|\sigma|)$, $f(q)$ — материальные функции [2]; M_s^0 , M_f^0 — температуры начала и окончания прямого превращения в ненагруженном состоянии; M_s^σ — температура начала прямого превращения при наличии напряжений; ΔS — скачок объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного состояния в аустенитное; k_q , C_σ , α , ΔU — теплопроводность, теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, коэффициент температурного расширения и объемная плотность латентного тепла при фазовом переходе. В первом варианте модели [2] предполагалось, что при выполнении дифференциального условия активного нагружения $d|\sigma| > 0$ часть представительного объема материала, находящаяся в мартенситном состоянии, испытывает структурный переход, поэтому в (1.2) $q_{st} = q$. Однако экспериментальные данные свидетельствуют о том, что при повторном нагружении в режиме мартенситной неупругости после прямого превращения под действием постоянного напряжения σ структурное превращение начинается не при значении напряжения σ , а при существенно больших значениях напряжений [14, 15]. Таким образом, при переходе к смежной форме равновесия структурного превращения в стержнях из СПФ не происходит, что не учитывается в решении [2]. Процесс, заключающийся в равномерном по объему материала охлаждении и соответствующем превращении аустенитной фазы в мартенситную, сопровождающемся равномерным по объему материала накоплением сжимающих деформаций, происходит при постоянном значении напряжений и также не приводит к структурному превращению. Таким образом, в рассматриваемых процессах структурные превращения отсутствуют:

$$q_{st} = 0, \quad d\varepsilon^{st} = 0. \quad (1.6)$$

Предполагается нормальное распределение микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние). Поэтому в качестве $F_1(|\sigma|)$ выбирается функция Лапласа:

$$F_1(\sigma) = \Phi_1\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right), \quad \Phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Здесь σ_0 — постоянная материала, имеющая смысл квадратичного отклонения распределения микронапряжений в представительном объеме СПФ. Далее принимается $f(q) = (C + q)^{-1}$, где значение константы $C = 2$ соответствует никелиду титана.

Невозмущенный процесс представляет собой медленное охлаждение материала, при котором происходит прямое превращение из полностью аустенитного состояния в мартенситное вследствие равномерного уменьшения по сечению стержня температуры под действием постоянного во времени и равномерно распределенного по сечению сжимающего напряжения. При этом справедливы условия, при которых выполняется положение об активном процессе пропорционального нагружения [2]. Поэтому для невозмущенного процесса выполняются равенства

$$\varepsilon^{phst} = \rho_D \operatorname{sign}(\sigma) F_1(|\sigma|)q, \quad \omega = \rho_D \operatorname{sign}(\sigma) F_1(|\sigma|), \quad \Delta T = 0. \quad (1.7)$$

2. Линеаризованное описание возмущенного процесса. Выражения для возмущений можно получить из системы определяющих уравнений, если в соотношениях этой системы заменить знак дифференциала на знак вариации. При этом в силу (1.6) выполняется равенство $\delta\varepsilon^{phst} = \rho_D \operatorname{sign}(\sigma) F_1(|\sigma|) \delta q$. Согласно (1.1) вариация упругой деформации

равна

$$\delta\varepsilon^e = A \delta\sigma + Z_1 \sigma \delta q, \quad A = \frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \quad Z_1 = \frac{E_A - E_M}{E_A E_M}. \quad (2.1)$$

Для определения возмущения параметра фазового состава проварьируем соотношение (1.3). С учетом (1.4), (1.7) получаем

$$\delta q = \psi_3(q, |\sigma|) \delta|\sigma| - \lambda_2(q) \delta T, \quad \lambda_2(q) = \frac{\lambda_1(q)}{M_s^0 - M_f^0}, \quad \lambda_1(q) = \pi \sqrt{q(1-q)}, \quad (2.2)$$

$$\psi_3(q, |\sigma|) = \lambda_2(q) \frac{\rho_D [F_1(|\sigma|) + |\sigma| F_1'(|\sigma|)(1 - qf(q))] + Z_1 |\sigma|}{\Delta S}.$$

Полагая, что переход из невозмущенной прямолинейной формы равновесия в смежную, изогнутую в виде волны синусоиды, происходит существенно быстрее, чем деформирование в невозмущенном процессе, теплообменом с окружающей средой в процессе выпучивания можно пренебречь. Возмущение температуры обусловлено только выделением латентного тепла при дополнительном фазовом переходе и диссипацией и может быть определено из уравнения энергетического баланса (1.5), если учесть последнее равенство (1.7) и пренебречь малым слагаемым $T\alpha\dot{\sigma}$:

$$\delta T = \psi_4(|\sigma|) \delta q, \quad \psi_4(|\sigma|) = (\Delta U + \rho_D |\sigma| F_1(|\sigma|) + Z(|\sigma|))/C_\sigma. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в первую формулу (2.2), получаем

$$\delta q = \frac{\psi_3(q, |\sigma|) \delta|\sigma|}{1 + \lambda_2(q) \psi_4(|\sigma|)}. \quad (2.4)$$

В случае решения задачи устойчивости в однократно связанной постановке в формуле (2.4) и ниже следует считать $\psi_4(|\sigma|) = 0$.

Так как при $\sigma \neq 0$ $Z(|\sigma|) > 0$ ($E_A > E_M$), $F_1(|\sigma|) > 0$, $F_1'(|\sigma|) \geq 0$ (в соответствии со свойствами функций распределения), $0 \leq f(q) \leq 1/q$ [2], $\Delta U > 0$ (при прямом превращении латентное тепло выделяется), $C_\sigma > 0$, $\lambda(q) > 0$ при $0 < q < 1$, то в процессе прямого превращения, происходящего при ненулевом напряжении, выполняются неравенства $\psi_3(q, |\sigma|) > 0$, $\psi_4(|\sigma|) > 0$ и согласно (2.4) знаки $\delta(|\sigma|)$ и δq совпадают. Следовательно, условие реализации дополнительного прямого превращения $\delta q > 0$ совпадает с условием догрузки $\delta(|\sigma|) > 0$.

3. Определение вариации напряжений. Предполагается, что для вариации продольных деформаций выполняется гипотеза плоских сечений. В [16] методом конечных элементов получено численное решение однократно связанной задачи устойчивости стержня из СПФ при прямом мартенситном превращении без использования каких-либо кинематических гипотез. Показано, что в рассматриваемом случае гипотеза плоских сечений выполняется с достаточной степенью точности для не очень коротких стержней. В результате применения этой гипотезы получаем

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon^e + \delta\varepsilon^{phst} = \delta(\sigma/E(q)) + \delta\varepsilon^{phst} = \delta\varepsilon^0 + z \delta\beta, \quad (3.1)$$

где $\delta\varepsilon^0$ — вариация продольной деформации нейтральной линии; $\beta \approx -\partial^2 w / \partial x^2$ — величина, равная в линейном приближении кривизне нейтральной линии; w — прогиб; z — поперечная координата по высоте сечения стержня, отсчитываемая от нейтральной линии. Вводя обозначения

$$B = \frac{\psi_5(q, |\sigma|)}{1 + \lambda_2(q) \psi_4(|\sigma|)}, \quad \psi_5(q, |\sigma|) = [Z_1 |\sigma| + \rho_D F_1(|\sigma|)] \psi_3(q, |\sigma|),$$

вместо (3.1) получаем $\delta\varepsilon^0 + z\delta\beta = -(A+B)\delta|\sigma|$, откуда следует

$$\delta\sigma = \begin{cases} \frac{z-z_0}{A+B}\delta\beta, & z \leq z_0, \\ \frac{z-z_0}{A}\delta\beta, & z \geq z_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь считается, что $\delta\beta > 0$; $z_0 = -\delta\varepsilon^0/\delta\beta$ — значение координаты z , при котором меняется знак величины $\delta\sigma$, т. е. происходит переход из зоны догрузки и дополнительного фазового перехода ($z < z_0$) в зону разгрузки и упругого поведения материала стержня ($z > z_0$).

4. Результаты решения. В рамках концепции ФН возмущение внешней сжимающей силы P не учитывается: $\delta P = 0$. Подставляя в это условие распределение (3.2) для случая прямоугольного поперечного сечения $b \times 2h$ ($2h$ — высота), получаем

$$\zeta_0 = \frac{1}{1+2\xi+2\sqrt{\xi(1+\xi)}}, \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{h}, \quad \xi = \frac{A}{B}, \quad \frac{B}{A+B} = \frac{4\zeta_0}{(1+\zeta_0)^2}. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что $0 < \zeta_0 < 1$, т. е. при использовании концепции ФН большая часть сечения находится в области дополнительного фазового перехода. С увеличением ξ величина ζ_0 уменьшается, оставаясь положительной. Поскольку для величины ξ справедлива формула $\xi = A[1 + \lambda_2(q)\psi_4(|\sigma|)]/\psi_5(q, |\sigma|)$, в дважды связанной постановке величина ζ_0 будет всегда меньше, чем в однократно связанной. С помощью (3.2) для вариации изгиба-

ющего момента $\delta M = b \int_{-h}^h \delta\sigma z dz$ получаем

$$\frac{1}{b} \frac{\delta M}{\delta\beta} = \frac{2h^3}{3A} \left(1 - \frac{B}{4(A+B)} (-\zeta_0^3 + 3\zeta_0 + 2) \right). \quad (4.2)$$

С учетом формулы (4.1), полученной с использованием концепции ФН, из (4.2) находим

$$\delta M = -Q \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2}, \quad Q = \frac{2}{3} \frac{bh^3}{A} (1 - \zeta_0)^2.$$

Линеаризованное уравнение равновесия в вариациях имеет вид

$$\delta w'' + k^2 \delta w = 0, \quad k = \sqrt{P/Q}, \quad (4.3)$$

где P — сжимающая нагрузка. Первое собственное значение (4.3) для условий шарнирного опирания равно $k = \pi/l$, где l — длина стержня. Следовательно, критическое значение параметра l определяется по формуле

$$l(q, |\sigma|) = \pi \sqrt{\frac{Q}{P}} = \frac{\pi h(1 - \zeta_0)}{\sqrt{3A|\sigma|}}. \quad (4.4)$$

С увеличением q от нуля величина l (4.4) сначала убывает, а затем, достигнув минимального значения, возрастает. Минимальное значение $l^*(|\sigma|) = \min_q l(q, |\sigma|)$ является критическим значением длины, соответствующим данной величине $|\sigma|$ или P . Величина A (2.1) не изменяется при переходе от однократно связанной к дважды связанной постановке. Поскольку значение ζ_0 при этом уменьшается, критическая длина, определяемая в дважды связанной постановке (4.4), больше, чем в однократно связанной.

Далее используются следующие безразмерные параметры и функции: $s = |\sigma|/\sigma_0$, $s_M = \sigma_0/E_M$, $\gamma = E_M/E_A$, $\varphi(q) = q + \gamma(1 - q)$. Из (4.4) получаем

$$L_1 = \frac{l}{l_M^e} = \frac{2(\sqrt{\xi(1+\xi)} - \xi)}{\sqrt{\varphi(q)}}, \quad L_2 = \frac{l}{h} = \frac{\pi L_1}{\sqrt{3s_M s}}. \quad (4.5)$$

В первой формуле (4.5) критическая длина l отнесена к критической длине стержня при упругой потере устойчивости $l_M^e = \pi h/\sqrt{3s_M s}$ при значении модуля Юнга, соответствующем мартенситному состоянию, во второй — к полувывсоте сечения.

Чтобы найти решение в рамках концепции ФСС, в (4.2) следует положить $\zeta_0 = -1$. В результате получаем

$$l = \pi h/\sqrt{3s_M s \varphi(q)}, \quad L_1 = 1/\sqrt{\varphi(q)}.$$

При использовании концепции ПДФП в формуле (4.2) следует положить $\zeta_0 = 1$. В результате имеем

$$l = \pi h/\sqrt{3(A+B)|\sigma|}, \quad L_1 = \sqrt{\xi/[(1+\xi)\varphi(q)]}.$$

5. Сравнение результатов решений, полученных в рамках различных концепций. Приведенные ниже результаты расчетов получены при следующих значениях постоянных материала, характерных для никелида титана: $\rho_D = 0,08$, $E_M = 28\,000$ МПа, $E_A = 84\,000$ МПа, $M_s^0 = 40$ °С, $M_f^0 = 20$ °С, $C = 2$, $C_\sigma = 3,22$ МПа/К. Рис. 1–3 построены для $\sigma_0 = 170$ МПа. Рассматриваются два варианта значений ΔU и ΔS , соответствующие одному и тому же значению температуры термодинамического равновесия фаз $T_0 = \Delta U/\Delta S = 300$ К: 1) $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа (большое значение латентного тепла при фазовом переходе в никелиде титана); 2) $\Delta S = 0,322$ МПа/К, $\Delta U = 96,6$ МПа (малое значение латентного тепла при фазовом переходе в никелиде титана). На рис. 2, 4 $L_1 = \min_q L_1(q)$.

На рис. 1 приведена зависимость L_2 от q при $s = 0,5$. Видно, что с увеличением q значение L_2 резко уменьшается при малых значениях q и возрастает в окрестности значения

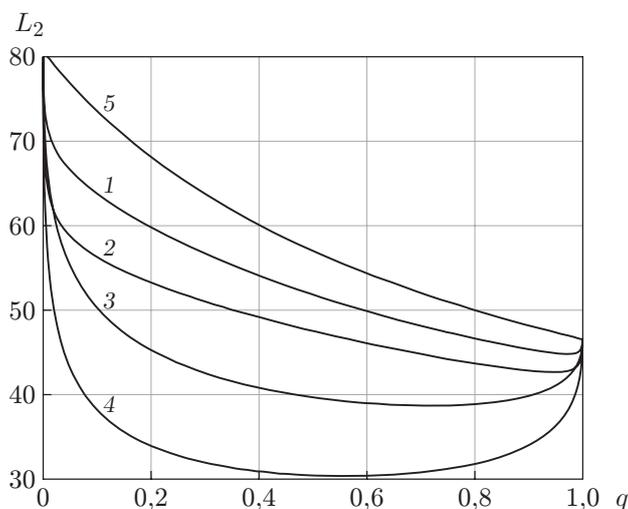


Рис. 1. Зависимость критической длины, отнесенной к полувывсоте сечения, от объемной доли мартенсита при $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа: 1, 2 — дважды связанная постановка задачи, 3, 4 — однократно связанная постановка задачи; 1, 3 — концепция ФН, 2, 4 — концепция ПДФП, 5 — концепция ФФС

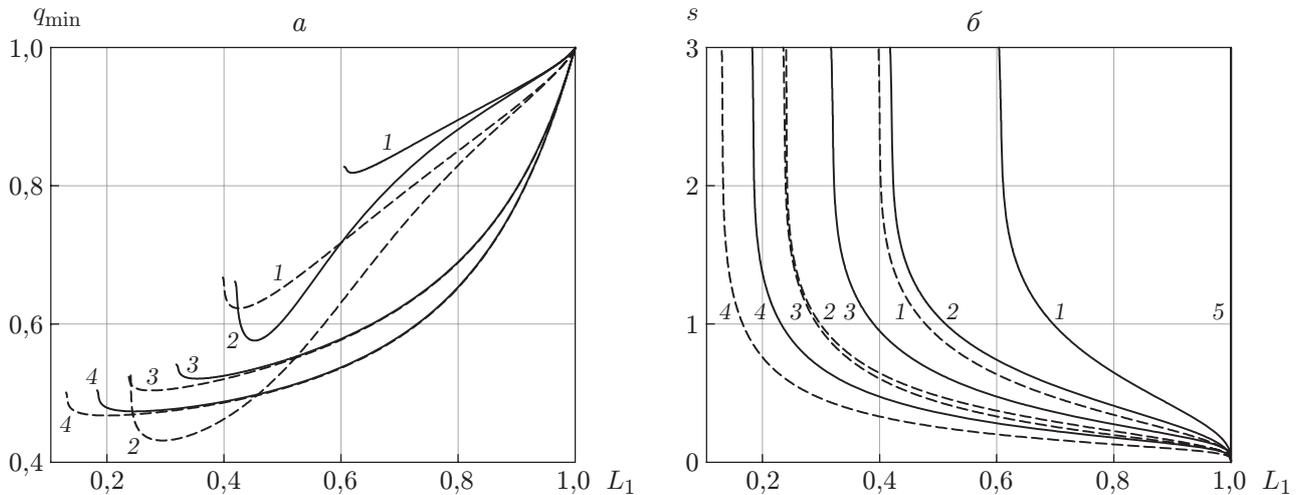


Рис. 2. Зависимости объемной доли мартенсита, при которой происходит потеря устойчивости (*а*), и безразмерных критических напряжений (*б*) от безразмерной длины стержня:

сплошные линии — $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа, штриховые — $\Delta S = 0,322$ МПа/К, $\Delta U = 96,6$ МПа; остальные обозначения те же, что на рис. 1

$q = 1$ (кривые 1–4). Для решений, полученных в дважды связанной постановке, минимум на этих кривых расположен вблизи значения $q = 1$ (кривые 1, 2), для решений, полученных в однократно связанной постановке, — ближе к значению $q = 0,5$, чем к значению $q = 1,0$ (кривые 3, 4).

На рис. 2, *а* представлена зависимость объемной доли мартенсита q_{\min} , соответствующей потере устойчивости, от величины L_1 . Видно, что уменьшение в два раза значений ΔU и ΔS приводит к существенному уменьшению значения q_{\min} в случае решения задач в дважды связанной постановке (кривые 1, 2) и менее значительному его уменьшению в случае решения в однократно связанной постановке (кривые 3, 4).

Зависимости, приведенные на рис. 2, *б*, позволяют непосредственно сравнить критические длины, получаемые при использовании различных концепций и постановок, с критической длиной, найденной из упругого решения. Из рис. 2, *б* следует, что наименьшее сопротивление потере устойчивости соответствует решению задачи в однократно связанной постановке в рамках концепции ПДФП (кривые 4), большее сопротивление получено при решении в однократно связанной постановке в рамках концепции ФН (кривые 3). Наибольшее сопротивление имеет место при решении задачи в дважды связанной постановке в рамках концепции ФН (кривые 1). Все эти критические значения существенно меньше значений, получаемых при решении задачи с использованием концепции ФФС (вертикальная линия 5), причем с увеличением s (уменьшением L_1), т. е. с уменьшением гибкости стержня, это различие возрастает. С уменьшением значений параметров ΔU , ΔS критические значения, полученные при использовании всех исследованных в данной работе постановок и концепций, уменьшаются. При $s = 3$ минимальное значение L_1 (штриховая кривая 4) составляет приблизительно 13 % значения, получаемого при решении задачи в рамках концепции ФФС, максимальное значение L_1 (сплошная кривая 1) — приблизительно 60 %.

На рис. 3 показана зависимость координаты границы зоны дополнительного фазового перехода от напряжений, полученная в предположении, что потеря устойчивости происходит при фиксированной нагрузке. В случае однократно связанной постановки (кривые 2) зона дополнительного фазового перехода больше, чем при решении в дважды связанной

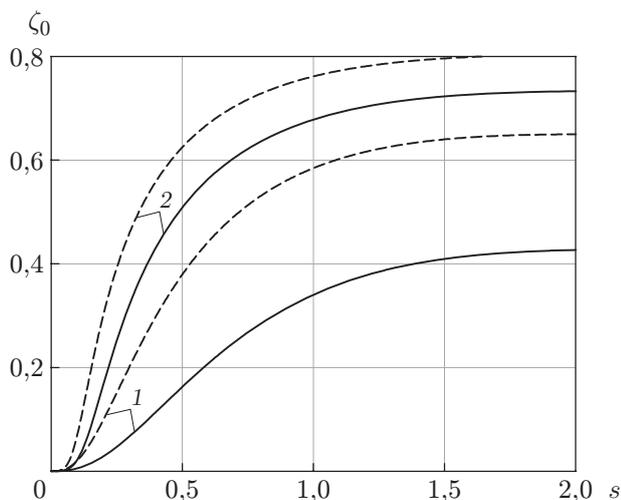


Рис. 3

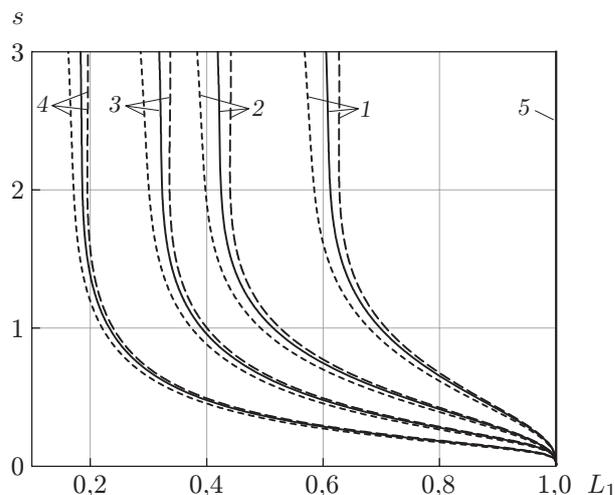


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость координаты границы зоны дополнительного фазового перехода от напряжений, полученная в рамках концепции ФН:

1 — дважды связанная постановка задачи, 2 — однократно связанная постановка задачи; сплошные линии — $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа, штриховые — $\Delta S = 0,322$ МПа/К, $\Delta U = 96,6$ МПа

Рис. 4. Зависимость критической длины стержня из сплава с памятью формы от действующих в нем напряжений при $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа:

пунктирные линии — $\sigma_0 = 340$ МПа, сплошные — $\sigma_0 = 170$ МПа, штриховые — $\sigma_0 = 85$ МПа; 1, 2 — дважды связанная постановка задачи, 3, 4 — однократно связанная постановка задачи; 1, 3 — концепция ФН, 2, 4 — концепция ПДФП, 5 — концепция ФФС

постановке (кривые 1). При уменьшении термодинамических параметров зона дополнительного фазового перехода увеличивается.

На рис. 4 приведена зависимость критической длины стержня от действующих в нем напряжений при различных значениях параметра материала σ_0 . Решения получены при значениях термодинамических параметров $\Delta S = 0,644$ МПа/К, $\Delta U = 193,2$ МПа. Из рис. 4 следует, что с увеличением параметра σ_0 критическая длина стержня уменьшается.

Заключение. В работе получено решение дважды связанной задачи о потере устойчивости стержня из сплава с памятью формы. Установлено, что критические нагрузки, полученные при решении задачи устойчивости в дважды связанной постановке, больше, чем при решении задачи в однократно связанной постановке, и меньше, чем при решении задачи с использованием концепции ФФС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовчан А. А., Казарина С. А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2002. № 6. С. 82–89.
2. Мовчан А. А., Мовчан И. А., Сильченко Л. Г. Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 6. С. 137–147.

3. **Rahman M. A., Qui J., Tani J.** Buckling and postbuckling characteristics of the superelastic SMA columns — numerical simulation // *J. Intelligent Material Systems Structures*. 2005. V. 16. P. 691–702.
4. **Tang Z., Li D.** Quasi-static axial buckling behavior of TiNi thin-walled cylindrical shells // *Thin-Walled Structures*. 2012. V. 51. P. 130–138.
5. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г., Казарина С. А. и др.** Устойчивость стержней из никелида титана, нагружаемых в режиме мартенситной неупругости // *Пробл. машиностроения и надежности машин*. 2012. № 3. С. 72–80.
6. **Urushiyama Y., Lewinnek D., Qiu J., Tani J.** Buckling of shape memory alloy columns: buckling of curved column and twinning deformation effect // *JMSE Intern. J. Ser. A. Solid Mech. Material Engng*. 2003. V. 46, N 1. P. 60–67.
7. **Kunavar J., Kozel F., Puksic A., Videnic T.** Geometry optimization in buckling of shape memory alloy columns due to constrained recovery // *J. Intelligent Material Systems Structures*. 2012. V. 23. P. 65–76.
8. **Малыгин Г. А.** Эйлера неустойчивость двунаправленного эффекта памяти формы в ленте из никелида титана // *Физика твердого тела*. 2003. Т. 45, № 12. С. 2233–2237.
9. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситное превращение под действием сжимающих напряжений // *ПМТФ*. 2003. Т. 44, № 3. С. 169–178.
10. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // *Прикл. математика и механика*. 2004. Т. 68, вып. 1. С. 60–72.
11. **Мовчан А. А., Сильченко Л. Г.** Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // *Прикл. математика и механика*. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 871–883.
12. **Мовчан А. А., Мовчан И. А., Сильченко Л. Г.** Устойчивость кольцевой пластины из сплава с памятью формы // *ПМТФ*. 2011. Т. 52, № 2. С. 144–155.
13. **Шкутин Л. И.** Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // *ПМТФ*. 2007. Т. 48, № 2. С. 163–171.
14. **Мишустин И. В., Мовчан А. А.** Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2014. № 1. С. 37–53.
15. **Мишустин И. В., Мовчан А. А.** Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2015. № 2. С. 78–95.
16. **Жаворонок С. И., Нуштаев Д. В.** Решение задач о потере устойчивости и закритическом деформировании стержня с эффектом памяти в процессе фазового перехода // *Сб. тр. Всерос. науч. конф. “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”*, Москва, 21–23 нояб. 2017 г. М.: Ин-т прикл. механики РАН, 2017. С. 86–90.

Поступила в редакцию 6/Х 2017 г.