Прикладная механика и техническая физика. 1996. т. 37. № 6

О СПОНТАННОЙ ЗАКРУТКЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

УДК 532.516 + 538.4

Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Проблема спонтанной закрутки рассматривалась в работах [1–7] и заключается в следующем: может ли возникать вращательное движение при отсутствии внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда движение без вращения заведомо реализуемо?

Более точная формулировка этой проблемы дана в [7]. Предложенная формулировка обеспечивает строгий контроль кинематического потока осевой составляющей момента импульса, исключающий втекание вращающейся жидкости в область течения.

Возникновение вращательного движения рассматривается как бифуркация исходного осесимметричного течения в результате потери устойчивости к течению с закруткой (необязательно вращательно-симметричному).

В настоящее время приведены примеры возникновения спонтанной закрутки [1–3], в том числе и в МГД-течениях [5, 6]. Однако, как показано в [4, 7], имеющиеся примеры не удовлетворяют сформулированным в [7] более строгим требованиям. Таким образом, вопрос о возможности спонтанной закрутки остается открытым.

Доказательство невозможности спонтанной закрутки, если это утверждение верно, связано с преодолением существенных трудностей и вряд ли может быть получено в достаточно общей форме. Для доказательства существования этого явления достаточно найти хотя бы один пример. Для сужения области поисков такого примера представляет интерес рассмотреть переход осесимметричного течения к вращательно-симметричному или плоский аналог такого перехода — возникновение спонтанного поперечного (перпендикулярного), не зависящего от поперечной координаты потока в случае плоскопараллельного исходного потока [7].

В [7] показано, что бифуркация осесимметричное течение — вращательно-симметричное течение (и соответствующий плоский аналог такого перехода) не имеет места для сжимаемой жидкости с переменным коэффициентом вязкости. В случае плоского аналога это утверждение справедливо и для проводящей жидкости, движущейся в присутствии магнитного поля, независимо от характера связности области течения.

Для осесимметричных течений в присутствии магнитного поля такого общего результата получить не удается. В этом случае, как отмечено в [7], возможны течения с закруткой, поддерживаемые электромагнитными силами, и сама постановка вопроса о спонтанной закрутке требует уточнения.

Ниже рассматривается осесимметричное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости. Будет показано, что осесимметричная спонтанная закрутка невозможна, если сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным.

Уравнения, описывающие такие течения, имеют следующий вид в общепринятых обозначениях:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\times \mathrm{rot}\,\mathbf{H}) + \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0; \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\Big[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{H})\Big]; \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{f} = (f_r(r,z,t), 0, f_z(r,z,t))$ — силы, поддерживающие исходное осесимметричное течение $\mathbf{v} = (u(r,z,t), 0, w(r,z,t))$.

Используя скалярный Φ и векторный $\mathbf{A}$ электромагнитные потенциалы, уравнения (2), (3) можно представить в форме

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v}\times\mathbf{H} = -\nu_m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - c\nabla\Phi, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}; \tag{5}$$

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho_e. \tag{6}$$

Для азимутальной компоненты векторного потенциала A_φ, учитывая осевую симметрию, из (5) получим

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) + w\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \nu_m\Big[\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2}\Big]. \tag{7}$$

Для полоидальных компонент магнитного поля H_r и H_z имеем

$$H_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi). \tag{8}$$

Вместо A_φ удобно ввести «магнитную функцию тока» Ψ, полагая $\Psi = rA_\varphi/(4\pi\rho)^{1/2}$, и в соответствии с (8)

$$h_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad h_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{(4\pi\rho)^{1/2}}. \tag{9}$$

Из (7) для Ψ получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + u\frac{\partial\Psi}{\partial r} + w\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \nu_m\Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big). \tag{10}$$

Уравнения для азимутальных компонент скорости $v_\varphi = v$ и магнитного поля $h_\varphi = h$ имеют вид

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\Gamma}{\partial r} + w\frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \nu\Big(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial z^2}\Big) - \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\Big); \tag{11}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + u\frac{\partial\gamma}{\partial r} + w\frac{\partial\gamma}{\partial z} - \frac{2u}{r}\gamma = \nu_m\Big(\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial r} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\Big) - \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Gamma}{\partial r} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Gamma}{\partial z}\Big) + \frac{2\Gamma}{r^2}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \tag{12}$$

где $\Gamma = rv$; $\gamma = rh$.

Таким образом, система (10)–(12) с учетом соотношений (9) описывает поведение магнитного поля и азимутальной компоненты скорости. Полоидальные компоненты скорости $u(r,z,t)$ и $w(r,z,t)$ удовлетворяют условию несжимаемости $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, не имеют особенностей в области течения (радиальная компонента скорости на оси симметрии обращается в нуль, если ось симметрии принадлежит области течения), а в остальном произвольны.

В дальнейшем предполагается, что границы (стенки) осесимметричной области непроницаемые, сверхпроводящие, так что на границе (на границах, если меридиональное сечение не является односвязным) выполняются условия непротекания $\mathbf{vn} = 0$ и условие $\mathbf{hn} = 0$. Кроме того, необходимо выполнить требование обращения в нуль касательной к стенкам составляющей электрического поля. Из (8) следует

$$cE_r = -\nu_m \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - vH_z + wH_\varphi; \tag{13}$$

$$cE_\varphi = -\nu_m\Big(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\Big) - wH_r + uH_z; \tag{14}$$

$$cE_z = \frac{\nu_m}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - uH_\varphi + wH_r. \tag{15}$$

Равенство нулю касательной составляющей E обеспечивается условиями

$$E_r n_z - E_z n_r = 0, \quad E_\varphi = 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{n} = (n_r, 0, n_z)$ — внешняя единичная нормаль к границе области течения.

Из (13)–(16), учитывая условия $\mathbf{vn} = 0$ и $\mathbf{Hn} = 0$, получим

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial n} + \frac{H_\varphi}{r} n_r = \frac{\partial}{\partial n}(rH_\varphi) = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\Big) = 0. \tag{18}$$

Из условия $\mathbf{hn} = 0$ и уравнений (10), (18) вытекает, что на границах области Ψ принимает постоянные значения, в общем случае разные на разных границах для многосвязной области. Если область односвязная, то на границе без ограничения общности можно положить $\Psi = 0$.

Таким образом, решения системы уравнений (10)–(12) должны удовлетворять следующим граничным условиям на границе l (границах) области течения:

$$\Psi = \text{const}, \quad \partial\gamma/\partial n = 0. \tag{19}$$

Для Γ должны выполняться условия: на части (частях) границы l' условие прилипания $\Gamma = 0$, на другой части l'' (частях) условие отсутствия касательных напряжений [7]:

$$\Gamma = 0 \quad \text{на} \quad l', \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial n} - \frac{2\Gamma}{r} n_r = 0 \quad \text{на} \quad l''. \tag{20}$$

Если ось симметрии (ось z) принадлежит области течения, то на ней $\Psi = \Gamma = \gamma = 0$, причем $\Psi \simeq \Gamma \simeq \gamma \simeq r^2$.

Рассмотрим случай односвязной области течения. Пусть при $t = 0$ заданы Ψ, Γ и γ. Умножая (10) на $r\Psi$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{r}{2}\Psi^2 + \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{r}{2}u\Psi^2\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{r}{2}u\Psi^2\Big) =$$
$$= \nu_m\Big[\frac{\partial}{\partial r}r\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}r\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}\Psi^2 - r\Big[\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2\Big]\Big]. \tag{21}$$

Интегрируя (21) по сечению D меридиональной плоскостью, с учетом (19) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D \frac{r}{2}\Psi^2 drdz = -\oint\limits_l \frac{r}{2}\Psi^2(\mathbf{vn})dl + \nu_m \oint\limits_l \Psi^2 n_r dl +$$

$$+\nu_m \oint\limits_l r\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dl - \nu_m\int\limits_D r\Big[\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2\Big]drdz. \qquad (22)$$

Из (22), учитывая граничное условие $\Psi = 0$ на l, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D \frac{r}{2}\Psi^2 drdz = -\nu_m\int\limits_D r\Big[\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)^2\Big]drdz, \qquad (23)$$

и, значит, $\Psi \to 0$ при $t \to \infty$, если $\nu_m \neq 0$, т. е. жидкость имеет конечную проводимость. В силу этого при достаточно больших t второй член в первой части уравнения для Γ (11) становится пренебрежимо малым, и в соответствии с [7] $\Gamma \to 0$, если на как угодно малой, но конечной части границы l' выполняются условия прилипания (20). Следовательно, осесимметричная спонтанная закрутка в области течения, сечение которой меридиональной плоскостью односвязно, невозможна.

Поведение азимутальной компоненты магнитного поля при достаточно больших t определяется уравнением (12), в котором отброшены в правой части члены с Ψ и Γ. Это уравнение можно записать в форме

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}uh + \frac{\partial}{\partial z}wh = \nu_m\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h}{r}\Big) + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\Big]. \qquad (24)$$

Интегрируя (24) по сечению D, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_D hdrdz = -\oint\limits_l (\mathbf{vn})hdl + \nu_m\oint\limits_l \Big(\frac{\partial h}{\partial n} + \frac{h}{r}n_r\Big)dl. \qquad (25)$$

Пусть ось симметрии содержится в области течения и, следовательно, является частью границы области D. В силу граничных условий правая часть всюду на границе равна нулю, за исключением участка, совпадающего с осью симметрии, где отличен от нуля второй член в (25). Если значения h всюду внутри области D положительны (отрицательны), то правая часть (25) неположительна (неотрицательна), так как $\partial h/\partial n \leqslant 0$ и $n_r < 0$ на оси, и h убывает. Если h меняет в области D знак, то существует линия, положение которой в общем случае зависит от времени, $h = 0$ внутри области D. В этом случае интегрирование производится по подобласти D', где значения h положительны (отрицательны). В силу того, что на дополнительной границе h обращается в нуль, получаем аналогичное (25) равенство для подобласти D', из которого вытекает вывод об уменьшении магнитного поля в этой подобласти, а значит, и во всей области.

Если область течения не включает ось симметрии, т. е. является тороидальной, то из (25) в силу граничных условий следует известный закон сохранения потока азимутального магнитного поля по сечению D. Нетрудно видеть, повторяя предыдущие рассуждения, что в этом случае $h \to 0$ при $t \to \infty$, если в начальный момент времени поток равнялся нулю. Если начальный поток отличен от нуля, то h не исчезает, и эволюция азимутальной составляющей магнитного поля определяется полоидальными компонентами скорости u и w.

Таким образом, осесимметричная спонтанная закрутка невозможна, когда сечение области течения меридиональной плоскостью является односвязным.

Рассмотрим случай неодносвязного сечения D, когда внутри основной области течения находятся одно или несколько тороидальных сверхпроводящих тел, расположенных так, что осевая симметрия сохраняется. На внутренних границах l_i постоянные Ψ_i могут принимать разные значения. Если все Ψ_i равны нулю, то вывод о невозможности осесимметричной спонтанной закрутки сохраняет силу и для неодносвязного сечения, так как полоидальное магнитное поле исчезает так же, как и для односвязного сечения.

Если же Ψ_i отличны от нуля (хотя бы на одной внутренней границе), то полоидальное магнитное поле не исчезает. Если при этом $h \not\equiv 0$ ($\gamma \neq \text{const}$), то электромагнитные силы в соответствии с уравнением (11) обязательно порождают некоторое течение с закруткой ($\Gamma \not\equiv 0$). Как говорилось ранее, случай $h \not\equiv 0$ имеет место, если основная область течения не включает ось симметрии (является тороидальной) и если азимутальный поток отличен от нуля. В рассматриваемой проблеме такие течения не представляют интереса и должны быть исключены.

Пусть имеется осесимметричное течение с $\Gamma = 0$ и $h = 0$ или $h = \gamma_0/r$. Второй случай возможен, если жидкость в полости покоится. При $t = 0$ задаем возмущение $\Gamma \neq 0$, $h = 0$. Если в дальнейшем $\Gamma \to 0$ при $t \to \infty$, то спонтанная закрутка невозможна. В такой постановке вопрос о спонтанной закрутке для неодносвязного течения остается открытым.

Для неограниченной области течения односвязность не влечет вывода об исчезновении полоидальных компонент магнитного поля, если не требовать их обращения в нуль на бесконечности. В качестве примера МГД-течения такого типа возьмем вихрь Бюргерса и соответствующий плоский аналог в проводящей несжимаемой вязкой жидкости.

Рассмотрим сначала плоский аналог. Уравнения (1)–(3) имеют решения вида

$$u = ax, \quad v = -ay, \quad w = w(t,x,y), \quad h_x = bx, \quad h_y = -by,$$
$$h_z = h(t,x,y), \quad P = P_0 - (1/2)\rho a^2(x^2+y^2) - (1/2)\rho h^2,$$

где a и b — положительные константы, а поперечные составляющие скорости и магнитного поля w и h удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + ax\,\frac{\partial w}{\partial x} - ay\,\frac{\partial w}{\partial y} = bx\,\frac{\partial h}{\partial x} - by\,\frac{\partial h}{\partial y} + \nu\Delta w; \tag{26}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + ax\,\frac{\partial h}{\partial x} - ay\,\frac{\partial h}{\partial y} = bx\,\frac{\partial w}{\partial x} - by\,\frac{\partial w}{\partial y} + \nu_m\Delta h. \tag{27}$$

Пусть $\nu = \nu_m = 0$, $w = w(t,y)$, $h = h(t,y)$. Тогда общее решение системы (26), (27) имеет вид

$$w = f(y\mathrm{e}^{(a-b)t}) + \Psi(y\mathrm{e}^{(a+b)t}); \tag{28}$$

$$h = f(y\mathrm{e}^{(a-b)t}) - \Psi(y\mathrm{e}^{(a+b)t}) \tag{29}$$

(f и Ψ — произвольные функции).

Рассмотрим моменты полей w и h. Непосредственно из решения (28), (29) или из уравнений (26), (27) находим, что величины

$$A_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^n w\,dy, \quad B_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^n h\,dy$$

удовлетворяют уравнениям

$$dA/dt = (n+1)(bB - aA), \quad dB/dt = (n+1)(bA - aB). \tag{30}$$

Учитывая, что $A_n = A_{0n}$, $B_n = 0$ при $t = 0$, из (30) получим

$$A_n = A_{0n} e^{-(n+1)at} \operatorname{ch}(n+1)bt, \quad B_n = A_{0n} e^{-(n+1)at} \operatorname{sh}(n+1)bt. \tag{31}$$

Аналогично находим, что энергия

$$\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} h^2\Big) dy = \varepsilon_0 e^{-at} \operatorname{ch} bt.$$

Отсюда следует, что все A_n, B_n и ε растут со временем, если $b > a$ для $n \geqslant 0$, в том числе и поперечный импульс A_0. Соотношения (31) остаются справедливыми для A_0 и B_0 и для вязкой жидкости с конечной проводимостью, и, следовательно, поперечный импульс увеличивается со временем и для вязкой жидкости с конечной проводимостью. Однако в данной постановке при $b > a$ поперечный импульс растет за счет потока поперечного импульса $\Pi_{xz} = -h_z h_x = -bxh$, связанного с максвелловским тензором напряжений магнитного поля, текущего из бесконечности вдоль оси x к плоскости $x = 0$. Поэтому рассмотренное течение не является примером спонтанного возникновения поперечного потока.

Отметим также, что, хотя величины A_0 и B_0 растут со временем, сами w и h стремятся к нулю при $t \to \infty$. Это показывается следующим образом. Функции w и h представляются в виде суммы нечетной и четной частей, так что

$$w = w_1 + w_2, \quad h = h_1 + h_2, \quad w_1(-y) = -w_1(y), \quad w_2(-y) = w_2(y),$$
$$h_1(-y) = -h_1(y), \quad h_2(-y) = h_2(y).$$

Полагая $w_1 = y\Omega$ и $h_1 = y\omega$, для Ω и ω имеем

$$\Omega_t - a\frac{\partial}{\partial y}(y\Omega) = -b\frac{\partial}{\partial y}(y\omega) + \frac{\nu}{y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y\Omega)\cdot \tag{32}$$

$$\omega_t - a\frac{\partial}{\partial y}(y\omega) = -b\frac{\partial}{\partial y}(y\Omega) + \frac{\nu_m}{y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y\omega). \tag{33}$$

Умножая (32) на $y\Omega$, а (33) на $y\omega$ и интегрируя по y, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2} y(\Omega^2 + \omega^2) dy = -\nu \int\limits_0^{\infty} y\Big(\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big)^2 dy - \nu_m \int\limits_0^{\infty} y\Big(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\Big)^2 dy - \frac{\nu}{2}\Omega^2(0) - \frac{\nu_m}{2}\omega^2(0). \tag{34}$$

Для четных составляющих положим $p = \partial w_2/\partial y$, $q = \partial h_2/\partial y$. Уравнения для p и q имеют вид

$$p_t - a\frac{\partial}{\partial y}(yp) = -b\frac{\partial}{\partial y}(yq) + \nu p_{yy}, \tag{35}$$

$$q_t - a\frac{\partial}{\partial y}(yq) = -b\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \nu_m q_{yy}. \tag{36}$$

Умножая (35) на yp, а (36) на yq и учитывая, что $p = q = 0$ при $y = 0$ в силу четности w_2

и h_2, находим

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \frac{1}{2} y(p^2+q^2)dy = -\nu \int_0^\infty y\Big(\frac{\partial p}{\partial y}\Big)^2 dy - \nu_m \int_0^\infty y\Big(\frac{\partial q}{\partial y}\Big)^2 dy. \tag{37}$$

Из (34) и (37) следует, что $w \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть теперь при $t = 0$ заданы $w = w_0(x,y)$ и $h = h_0(x,y)$, обращающиеся на бесконечности в нуль. Тогда из уравнений (26) и (27), умножая первое на w, а второе на h, получим

$$\frac{d}{dt}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(w^2+h^2)dxdy = -\nu \iint_{-\infty}^{\infty}\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]dxdy -$$

$$- \nu_m \iint_{-\infty}^{\infty}\Big[\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial h}{\partial y}\Big)^2\Big]dxdy. \tag{38}$$

Поперечный импульс $\iint_{-\infty}^{\infty} wdxdy$ и поток магнитного поля $\iint_{-\infty}^{\infty} hdxdy$ сохраняются. Таким образом, из (38) следует, что спонтанный поперечный поток в этом случае не возникает.

Рассмотрим магнитогидродинамический аналог вихря Бюргерса. Система уравнений (1)–(3) имеет решения вида

$$u = -ar, \quad w = 2az, \quad h_r = -br, \quad h_z = 2bz; \tag{39}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -a^2 r - hh_r + \frac{1}{r}(v^2 - h^2), \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -4a^2 z - hh_z, \tag{40}$$

где a и b — положительные константы, а уравнения (40) интегрируются только при условии, что азимутальные составляющие скорости $v_\varphi = v(r,t)$ и магнитного поля $h_\varphi = h(r,t)$ не зависят от z. В соответствии с этим v и h удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial t} - ar\frac{\partial v}{\partial r} - av = -br\frac{\partial h}{\partial r} - bh + \nu\Big(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\Big); \tag{41}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - ar\frac{\partial h}{\partial r} + ah = -br\frac{\partial v}{\partial r} + bv + \nu_m\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r^2}\Big). \tag{42}$$

Рассмотрим случай невязкой идеально проводящей жидкости ($\nu = 0$, $\nu_m = 0$). Пусть в момент $t = 0$ вносится возмущение $v = v_0(r)$, $h = 0$ такое, что величина

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |v_0(x)|dx, \quad x = \ln(r/r_0) \quad (r_0 = \mathrm{const})$$

имеет конечное значение.

Решение системы (41), (42) с этим начальным условием можно представить в виде

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\mathrm{e}^{ik(x+at)}\Big(\cos\lambda(k)t + \frac{a}{\lambda(k)}\sin\lambda(k)t\Big)dk; \tag{43}$$

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(1-ik)}{\lambda(k)} A(k)\mathrm{e}^{ik(x+at)}\sin\lambda(k)tdk. \tag{44}$$

Здесь

$$\lambda(k) = (b^2 - a^2 + b^2k^2)^{1/2}; \quad A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) e^{-ikx} dx. \tag{45}$$

Для моментов полей v и h

$$A_n(t) = \int_0^\infty r^n v dr, \quad B_n(t) = \int_0^\infty r^n h dr,$$

умножая (41), (42) на r^n и интегрируя, при $\nu = \nu_m = 0$ получим

$$dA_n/dt + naA_n = nbB_n, \quad dB_n/dt + (n+2)aB_n = (n+2)bA_n. \tag{46}$$

Из (46), учитывая, что $A_n(0) = A_{n0}$, $B_n(0) = 0$ при $t = 0$, находим

$$A_n = A_{n0} e^{-(n+1)at}\Big(\mathrm{ch}\mu_n t + \frac{a}{\mu_n}\mathrm{sh}\mu_n t\Big); \tag{47}$$

$$B_n = \frac{(n+2)b}{\mu_n} A_{n0} e^{-(n+1)at}\mathrm{sh}\mu_n t, \tag{48}$$

где

$$\mu_n = (a^2 + n(n+2)b^2)^{1/2}. \tag{49}$$

Из решения (43), (44) следует, что при $a > b$ (слабое полоидальное магнитное поле) азимутальная составляющая скорости v неограниченно увеличивается, однако все моменты $A_n \to 0$, если $n \geqslant 0$. В случае $n = -1$ $(a > b)$ имеем

$$A_{-1} = A_{-10}\Big(\mathrm{ch}(a^2 - b^2)^{1/2}t + \frac{a}{(a^2 - b^2)^{1/2}}\mathrm{sh}(a^2 - b^2)^{1/2}t\Big).$$

Неограниченный рост момента A_{-1} свидетельствует, что увеличение $v(r,t)$ происходит вблизи оси. При этом момент импульса (на единицу длины) $A_2 \to 0$, а энергия (на единицу длины) ограничена:

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} r(h^2 + v^2) dr \leqslant \frac{a}{a-b} \int_0^\infty \frac{1}{2} r v_0^2 dr.$$

При вязкости, не равной нулю, этот рост исчезает, и $v \to 0$, что можно доказать строго при $b = 0$. Для $b \neq 0$ строгого доказательства получить не удалось.

При $b = a$ общее решение системы (41), (42) имеет вид $(\nu = \nu_m = 0)$

$$v = F(r) + f(\xi) + \xi f'(\xi), \quad h = F(r) + f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{50}$$

Здесь $\xi = r\exp(2at)$; F и f — произвольные функции. В этом случае при $t \to \infty$ моменты $A_n \to B_n \to (n+2)A_{0n}/[2(n+1)]$ для $n \geqslant 0$, а $A_{-1} = A_{-10}at$, и энергия ограничена, что можно показать непосредственно из (50).

При $b > a$ (сильное полоидальное магнитное поле) все A_n для $n \geqslant 1$ растут со временем (в том числе момент импульса A_2). Для $n = 0$ азимутальный расход A_0 и поток азимутального магнитного поля B_0 остаются ограниченными. Зависимость от времени моментов A_{-1} и B_{-1}, для которых $\mu_{-1} = i(b^2 - a^2)^{1/2}$, имеет вид

$$A_{-1} = A_{-10}\Big(\cos(b^2 - a^2)^{1/2}t + \frac{a}{(b^2 - a^2)^{1/2}}\sin(b^2 - a^2)^{1/2}t\Big),$$

$$B_{-1} = \frac{bA_{-10}}{(b^2 - a^2)^{1/2}}\sin(b^2 - a^2)^{1/2}t,$$

что свидетельствует о колебательном характере возникающего течения, по крайней мере, вблизи оси симметрии.

Соотношения (46) и, следовательно, (47) и (48) остаются справедливыми при $n = 2$ и для вязкой жидкости с конечной проводимостью. Таким образом, в этом случае закрутка имеет место при $b > a$. Однако, как и для плоского аналога, рост момента импульса связан с потоком момента импульса за счет максвелловского тензора напряжений магнитного поля на бесконечности, и закрутка не является спонтанной.

Рассмотренный пример, будучи несколько искусственным, показывает, что постановка задач о спонтанной закрутке в магнитогидродинамических течениях должна обеспечивать контроль (отсутствие) не только кинематического потока механического момента импульса, но и потока момента импульса, связанного с тензором напряжений электромагнитного поля, втекающего в область течения из бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01215-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989.
3. **Гольдштик М. А., Штерн В. Н.** Турбулентное вихревое динамо // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 4. С. 613–624.
4. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
5. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Устойчивость трехмерных автоколебаний плоскопараллельных потоков электропроводящей жидкости в продольном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1991. № 4. С. 15–20.
6. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнит. гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.
7. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.

Поступила в редакцию 25/XII 1995 г.