

Выражения для f и g следуют из (П. 1):

$$f = -\bar{f} = \frac{2i}{3} \left\{ -2\eta J_0 \Psi_r + \frac{1}{3} \Psi [(2\eta^2 + 1) J_1 - 2\eta J_0] \right\},$$

$$g = \bar{g} = \frac{\rho_1}{3k_0} (\eta J_0 + J_1) + \frac{\rho_2}{k_0} J_1 - \frac{3}{\eta} J_0 \Psi_r + \left(J_1 - \frac{3}{\eta} J_0 \right) \Psi.$$

В то же время величина h в (П. 1) не дает правильного предела при $\omega_0 \rightarrow 0$. Это связано с тем, что в промежуточных вычислениях существенно используется $\omega_0 \neq 0$. Отдельные вычисления, в которых с самого начала полагается $\omega_0 = 0$, дают

$$h = \bar{h} = \rho_5 (\eta J_0 + J_1) + \rho_6 J_1 -$$

$$- (1/4) (3\eta J_0 - J_1) \Psi_r - (\eta/4) (J_0 - \eta J_1) \Psi,$$

$$\rho_5 = \frac{1}{12} \left[2\Psi + \Psi_r + \frac{BF(b) I_1(k_0)}{k_0 I_1'(k_0 b)} \right], \quad \rho_6 = -\frac{1}{2} \left[F(1) - \frac{BF(b) I_1'(k_0)}{2I_1'(k_0 b)} \right].$$

Поступила 12 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппе О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоздат, 1980.
2. Yih C.-S. Instability of surface and internal waves.— Adv. Appl. Mech., 1976, vol. 16, p. 369.
3. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В. и др. Экспериментальное и теоретическое исследование устойчивости движения жидкости внутри эллиптического цилиндра.— Изв. АН СССР. ФАО, 1975, т. 11, № 10.
4. Гледзер Е. Б., Обухов А. М., Пономарев В. М. Об устойчивости движения жидкости в сосудах эллиптического сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
5. Tsai C.-Y., Widnall S. E. The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, N 4.
6. Moore D. V., Saffman P. G. Structure of a line vortex in an imposed strain.— In: Proc. Symp. Aircraft Wake Turbulence, Seattle. Washington, 1971.
7. Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex.— Phil. Mag., 1880, vol. 10, p. 155.
8. Владимиров В. А. К устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью в эллиптическом цилиндре.— ПМТФ, 1983, № 4.

УДК 532.529.2

О КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В ПОЧТИ ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ПОДОГРЕВЕ СНИЗУ

Ю. К. Братухин, Л. Н. Маурин
(Пермь, Иваново)

1. Как известно [1], жидкость может находиться в механическом равновесии при неоднородном подогреве только в том случае, если градиент температуры в ней вертикален и имеет постоянное значение. Такая ситуация может осуществляться, например, в шаровой полости, ограниченной твердым массивом, с заданным на бесконечности вертикальным (вниз) градиентом температуры.

Рассмотрим влияние на конвективную устойчивость слабого отклонения формы полости от шаровой. Пусть уравнение поверхности полости имеет вид $r = 1 + sP_2^{(1)} \cos \varphi (P_e^{(m)}(\vartheta))$ — присоединенные полиномы Лежандра; r, ϑ, φ — полярные координаты; радиус R_0 недеформированного шара принят за единицу; $s \ll 1$. Выбор такой специальной формы полости связан с тем, что $P_2^{(1)} \cos \varphi$ — одна из самых крупномасштабных сферических гармоник, наличие которой в спектре функции, задающей форму реальной полости, приводит к искривлению изотерм в жидкости и, следовательно, к появлению конвективного движения уже при сколь угодно малых градиентах температуры.

Уравнения стационарной конвекции запишем в безразмерном виде, выбрав в качестве единиц скорости, давления и температуры $g\beta AR_0^3/\nu$, $\rho g\beta AR_0^3$ и AR_0 соответственно (ρ , β , ν — плотность, коэффициенты теплового расширения и кинематической вязкости, $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$ — ускорение силы тяжести, $\mathbf{A} = A\mathbf{k}$ — постоянный градиент температуры на бесконечности). Тогда уравнения и граничные условия для безразмерных скорости \mathbf{v} , давления p и температур T_1 и T_2 в массиве и в жидкости для установившегося движения примут вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \text{Gr}(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta\mathbf{v} - T_2\mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \text{Gr Pr } \nabla T_2 &= \Delta T_2, \quad \Delta T_1 = 0, \\ r \rightarrow \infty, \quad \nabla T_1 &= k, \\ r = 1 + sP_2^{(1)} \cos \varphi, \quad \mathbf{v} &= 0, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa \frac{\partial T_c}{\partial n} = \frac{\partial T_1}{\partial n}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Gr} = g\beta AR_0^4 \nu^{-2}$ и $\text{Pr} = \nu/\chi$ — числа Грасгофа и Прандтля; $\kappa = \kappa_2/\kappa_1$ — отношение теплопроводностей жидкости и массива; n — единичный вектор нормали к поверхности $r = 1 + sP_2^{(1)} \cos \varphi$.

Решение задачи ищем в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} &= \varepsilon\mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^2\mathbf{v}^{(2)} + \varepsilon^3\mathbf{v}^{(3)} + \dots, \\ T_2 &= T_2^{(0)} + \varepsilon T_2^{(1)} + \varepsilon^2 T_2^{(2)} + \varepsilon^3 T_2^{(3)} + \dots, \\ T_1 &= T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \varepsilon^2 T_1^{(2)} + \varepsilon^3 T_1^{(3)} + \dots, \\ s &= \varepsilon s_1 + \varepsilon^3 s_3 + \dots \end{aligned}$$

Последнее уравнение в (1.2) определяет параметр ε . Последовательные члены разложений будем находить методом Бубнова — Галеркина [1].

2. Нулевое приближение известно [1]. Первое приближение ищем с помощью векторных шаровых функций [2, 3]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T_2^{(1)} &= \left\{ \frac{\text{Ra}}{28} r^5 - \frac{\text{Ra}}{10} r^3 + \left[\frac{18 + 17\kappa}{(2 + \kappa) 140} \text{Ra} + \frac{27s_1(\kappa - 1)}{5(2 + \kappa)^2} \right] r \right\} P_1^{(1)} \cos \varphi, \\ T_1^{(1)} &= \left\{ \frac{2\kappa \text{Ra}}{35(2 + \kappa)} - \frac{9s_1(\kappa - 1)^2}{5(2 + \kappa)} \right\} \frac{P_1^{(1)} \cos \varphi}{r^2} + \frac{6s_1(1 - \kappa)}{5(2 + \kappa)} \frac{P_3^{(1)} \cos \varphi}{r^4}, \\ \mathbf{v}^{(1)} &= (r^3 - r) \mathbf{r} \times \nabla (P_1^{(1)} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Здесь $\text{Ra} = \frac{3}{2 + \kappa} \frac{g\beta AR_0^4}{\nu\chi}$ — число Рэлея, определенное по градиенту температуры в полости $3A/(2 + \kappa)$. Как известно [1], основное критическое движение в шаровой полости имеет похожую на $\mathbf{v}^{(1)}$ структуру. Система функций (2.1) удовлетворяет точно граничным условиям, уравнениям непрерывности и теплопроводности. Для определения параметра s_1 умножим уравнение Навье — Стокса на $\mathbf{v}^{(1)}$ и проинтегрируем по объему полости. Выразим результат через критическое число Рэлея Ra_* , определяемое из линейной теории для шаровой полости [1]:

$$(2.2) \quad \frac{27s_1(\kappa - 1)}{100(2 + \kappa)^2} = 1 - \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_*}, \quad \text{Ra}_* = \frac{17325(2 + \kappa)}{37 + 68\kappa}.$$

3. Вид функций второго приближения $\mathbf{v}^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ и $T_1^{(2)}$ определяется граничными условиями и неоднородными членами в (1.4):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} (\mathbf{v}^{(1)}\nabla)\mathbf{v}^{(1)} &= -\frac{(r^3 - r)^2}{6r} \left[(2P_2 + 4P_0 + P_2^{(2)} \cos 2\varphi) \mathbf{r}_1 + \right. \\ &\quad \left. + r\nabla P_2 + \frac{1}{2} r\nabla (P_2^{(2)} \cos 2\varphi) \right], \quad \mathbf{v}^{(1)}\nabla T_2^{(1)} \sim P_1. \end{aligned}$$

В соответствии с (3.1) ищем решение второго приближения в виде

$$(3.2) \quad \mathbf{v}^{(2)} = fP_2 \mathbf{r}_1 + gr \nabla P_2 + FP_2^{(2)} \cos 2\varphi \mathbf{r}_1 + \\ + Gr \nabla (P_2^{(2)} \cos 2\varphi) + h \mathbf{r} \times \nabla (P_3^{(2)} \sin 2\varphi).$$

Функции f, g, F, G и h выберем так, чтобы они удовлетворяли условию $\mathbf{v} = 0$ на поверхности $r = 1 + s_1 P_2^{(1)} \cos \varphi \varepsilon$, уравнению непрерывности и содержали бы в себе одну галеркинскую функцию с подгоночным коэффициентом α :

$$f = \frac{Ra \alpha}{84} (r^5 - 2r^3 + r) - 3s_1 (r^3 - r), \\ F = \frac{Ra \alpha}{168} (r^5 - 2r^3 + r) + \frac{s_1}{2} (r^3 - r), \\ g = \frac{1}{6r} (f r^2)^1, \quad G = \frac{1}{6r} (F r^2)^1, \quad h = -\frac{s_1 r^3}{15}.$$

Подставим формулу (3.2) в уравнения теплопроводности для второго приближения и решим их точно. Найденное таким образом выражение $T_2^{(2)}$ подставим в уравнение Навье — Стокса и после умножения последнего на галеркинскую функцию $\mathbf{v}_2^{(2)}$ и интегрирования по объему полости получим

$$\alpha = \left[\frac{4}{39} \frac{2 + \kappa}{Pr} + Ra \frac{4(64 + 83\kappa)}{1044225} + \frac{9}{10} \frac{s_1^2 (\kappa - 1)}{Ra (2 + \kappa) (4 + 3\kappa)} + \right. \\ \left. + s_1 \frac{1544 + 7922\kappa + 4709\kappa^2}{40950 (2 + \kappa) (4 + 3\kappa)} \right] \left/ \left[1 - Ra \frac{140 + 157\kappa}{405405 (4 + 3\kappa)} \right] \right.$$

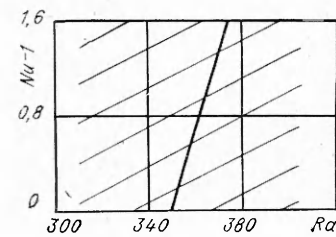
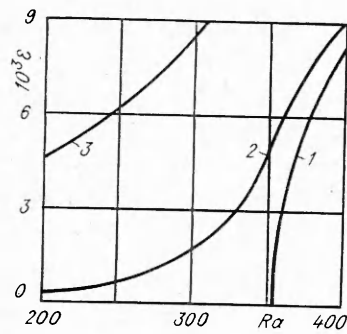
4. В третьем приближении для определения s_3 нам потребуется только одна гармоника

$$(4.1) \quad \mathbf{v}^{(3)} = \left[\beta (r^3 - r) + \frac{207}{25} r s_1^2 \right] \mathbf{r} \times \nabla P_1^{(1)} \sin \varphi + \frac{12 Ra \alpha s_1}{441} (r - r^3) P_2^{(1)} \times \\ \times \cos \varphi \mathbf{r}_1 + \frac{2 Ra \alpha s_1}{441} (3r - 5r^2) r \nabla P_2^{(1)} \cos \varphi, \\ T_1^{(3)}, T_2^{(3)} \sim P_1^{(1)} \cos \varphi.$$

После обычной [1] процедуры определения $T_1^{(3)}$ и $T_2^{(3)}$, умножения уравнения Навье — Стокса на галеркинскую функцию $(r^3 - r) \mathbf{r} \times \nabla P_1^{(1)} \sin \varphi$ и интегрирования по объему шара находим s_3 :

$$(4.2) \quad \frac{\kappa - 1}{2 + \kappa} s_3 = 1,0963 \cdot 10^{-4} (2 + \kappa)^2 Ra^2 \alpha Pr^{-1} + Ra^3 \cdot 10^{-6} (3,2529 + \\ + 12,943\kappa + 19,112\kappa^2 + 10,566\kappa^3) + Ra^3 \alpha \cdot 10^{-7} (5,2409 + 9,4173\kappa + \\ + 3,3984\kappa^2) + \frac{Ra^2 s_1}{2 + \kappa} \cdot 10^{-4} (2,9919 + 8,3894\kappa + 10,653\kappa^2 + 9,0451\kappa^3) + \\ + \frac{Ra s_1^2}{(2 + \kappa)^2 (4 + 3\kappa)} (1,7093 + 4,7022\kappa + 5,1393\kappa^2 + 2,2202\kappa^3 + 0,22908\kappa^4) + \\ + \frac{\alpha Ra^2 s_1 \cdot 10^{-4}}{(2 + \kappa) (4 + 3\kappa)} (14,057 + 25,259\kappa + 15,307\kappa^2 + 3,0962\kappa^3) - \\ - \frac{s_1^3 (\kappa - 1)}{(2 + \kappa)^3 (4 + 3\kappa)} (59,131 + 36,828\kappa + 10,377\kappa^2 + 10,663\kappa^3).$$

Из (2.2), (4.2) видно, что при $\kappa = 1$ (теплопроводности массива и жидкости одинаковы) движение в полости начинается только при $Ra = Ra_*$ и растет с ростом Ra , где $Ra = Ra_* + \varepsilon^2 Ra_2$, $Ra_2 = 0,27s_3(\kappa - 1) \times (2 + \kappa)^{-2}$.



Ф и г. 1

Ф и г. 2

Проблема устойчивости покоя в этой задаче возникает не только при $\kappa = 1$, но и при $s = 0$ (идеальная сфера). В этом случае $s_1 \equiv s_3 \equiv 0$ и наши результаты совпадают с известными итогами решения соответствующих задач [1].

Для сравнения с экспериментом [4] и для графической иллюстрации теории рассмотрен случай почти сферической полости в плексиглазе, заполненной водой ($\kappa = 3,26$, $Pr = 7$). Соответствующие графики зависимости ε от Ra представлены на фиг. 1 ($s = 0; 0,01; 0,1$, кривые 1—3 соответственно). Кривые, как и следовало ожидать, имеют характерный для такого рода задач вид [5]. (Движения и их устойчивость для отрицательных значений ε при $Ra > Ra_*$ исследованы в общем виде в [5], и здесь эти вопросы не рассматриваются.) Фиг. 2 иллюстрирует зависимость числа Нуссельта (безразмерный конвективный теплопоток через полость) от чисел Рэлея Ra для идеальной сферы $s \equiv 0$ (теория — сплошная линия; область, в которой лежат экспериментальные точки [4], заштрихована). Теория дает вблизи Ra_* линейную зависимость $Nu - 1$ от $Ra - Ra_*$, что отличается от выводов экспериментальной работы [4].

Поступила 30 III 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. Сорокин В. С. Замечания о шаровых электромагнитных волнах. — ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 2.
3. Братухин Ю. К., Шлиomis М. И. Об одном точном решении уравнений нестационарной конвекции. — ПММ, 1964, т. 28, № 5.
4. Овчинников А. П., Шайдуров Г. Ф. Конвективная устойчивость однородной жидкости в шаровой полости. — Учен. зап. Перм. ун-та, 1968, № 184.
5. Чернатыйский В. И., Шлиomis М. И. Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1.

УДК 532.526.013

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. М. Тумин, А. В. Федоров

(Москва)

Современные представления [1] о переходе ламинарного пограничного слоя в турбулентный позволяют сформулировать метод расчета критических чисел Рейнольдса перехода, заключающийся в анализе развития неустойчивых возмущений в пограничном слое и в определении сечения, в котором их амплитуда впервые достигает критического значения. При этом для построения замкнутой схемы расчета требуется решение задачи о возбуждении в пограничном слое так называемых неустойчивых волн Толлмина-Шлихтинга. В экспериментальных и теоретических исследованиях [2—6] получено, что волны Толлмина — Шлихтинга могут возникать на различного рода неоднородностях течения (острая передняя кромка модели, отдельная шероховатость на