

- across magnetic field. Proc. 8-th Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vienna, 1967, Internat. Atomic. Energy Agency, Vienna, 1968.
4. Marshall J. Performance of hydromagnetic plasma gun. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 1.
 5. Лукьянов С. Ю., Подгорный И. М., Чуватин С. А. Исследование процесса электродинамического ускорения сгустков плазмы. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, вып. 9, стр. 1026.
 6. Hurwitz H., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 2, p. 205.
 7. Craston J. L., Hancox R., Robson A. E., Kaufman S., Miles N. T., Ware A. A., Wesson J. A. The role of materials in controlled thermonuclear research. Proc. U. N. Internat. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy. 2nd. Geneva, 1958, vol. 32, No. 34, pp. 414—426.

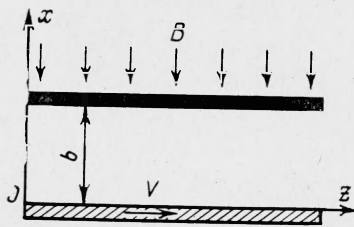
НЕСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА ПРИ ПОСТОЯННОМ РАСХОДЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

С. Е. Кузнецов

(Ленинград)]

Приводится приближенное решение задачи для случая ламинарного нестационарного течения Куэтта, обусловленного изменением величины приложенного магнитного поля, при постоянном расходе вязкой несжимаемой проводящей жидкости.

Рассмотрим нестационарное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости между двумя параллельными плоскими стенками, одна из которых $x = 0$ является изолятором и движется с постоянной скоростью V , а другая $x = b$ является проводником и покоится (фиг. 1). Нестационарность течения вызывается резким изменением величины однородного магнитного поля (включение, выключение или регулирование величины индукции магнитного поля), перпендикулярного обеим стенкам. Полагаем, что расход жидкости поддерживается постоянным. В рассматриваемом случае в отличие от [1] продольный градиент давления не равен нулю и является функцией времени.



Фиг. 1

При этих условиях и малом магнитном числе Рейнольдса система уравнений магнитной гидродинамики может быть сведена к одному уравнению для скорости жидкости

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P(t) - \frac{M^2}{b^2} v v + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \left(P(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\nu = \eta / \rho, \quad M = bB \sqrt{\sigma / \eta}$$

Здесь v — скорость течения жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, M — число Гартмана.

Интегрируя уравнение (1) по высоте канала и используя условие постоянства расхода, получаем

$$P(t) = \frac{M^2}{b^2} v V_f - \frac{\nu}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx, \quad V_f = \frac{1}{b} \int_0^b v dx \quad (2)$$

Здесь V_f — средняя скорость течения жидкости.

Исключая с помощью (2) функцию $P(t)$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{M^2 \nu}{b^2} (V_f - v) - \frac{\nu}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3)$$

Граничными условиями для уравнения (3) будут

$$v = V, \quad x = 0, \quad v = 0, \quad x = b \quad (4)$$

Начальные условия зададим в виде

$$\left. \begin{aligned} M = M_0 \\ v = v_0(x, 0) \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0, \quad \begin{aligned} V_f = \text{const} \\ V = \text{const} \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение уравнения (3) ищем в виде

$$v(x, t) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) \psi_n(x)$$

Здесь функция $F(x)$ соответствует асимптотическому значению скорости течения жидкости.

Согласно методу Фурье исходное уравнение (3) распадается на систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - \frac{M^2}{b^2} F(x) + \frac{M^2}{b^2} V_f - \frac{1}{b} \int_0^b \frac{d^2 F(x)}{dx^2} dx &= 0 \\ \frac{1}{\Phi_n(t)} \frac{d\Phi_n(t)}{dt} = -\alpha_n^2 \quad (\alpha_n^2 = \nu (\beta_n + \frac{M^2}{b^2})) & \\ \frac{1}{\psi_n(x)} \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} - \frac{1}{b\psi_n(x)} \int_0^b \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} dx = -\beta_n & \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь собственные значения β_n определяются из следующего трансцендентного уравнения:

$$\operatorname{tg} \sqrt[1]{2b} \sqrt{\beta_n} = \sqrt[1]{2b} \sqrt{\beta_n} \quad (7)$$

Решение первого уравнения системы (6) с учетом граничных условий (4) имеет вид

$$F(x) = V \left\{ H(M) \left(1 - \operatorname{ch} \frac{Mx}{b} + \operatorname{sh} \frac{Mx}{b} \operatorname{th} \frac{M}{2} \right) + \frac{\operatorname{sh} M(1-x/b)}{\operatorname{sh} M} \right\} \quad (8)$$

$$H(M) = \frac{\operatorname{th} \sqrt[1]{2} M - MV_f/V}{2 \operatorname{th} \sqrt[1]{2} M - M} \quad (9)$$

Общее решение второго и третьего уравнений системы (6) соответственно

$$\Phi_n(t) = C_{2n} \exp(-\alpha_n^2 t), \quad \psi_n(x) = C_{3n} [\sqrt[1]{2b} \sqrt{\beta_n} \sin \sqrt{\beta_n} x + \cos \sqrt{\beta_n} x - 1] \quad (10)$$

Здесь C_{2n} и C_{3n} — произвольные постоянные, определяемые из начальных (5) и граничных условий (4).

Таким образом, общее решение уравнения движения жидкости (3)

$$\begin{aligned} v(x, t) = V \left\{ H(M) \left(1 - \operatorname{ch} \frac{Mx}{b} + \operatorname{sh} \frac{Mx}{b} \operatorname{th} \frac{M}{2} \right) + \frac{\operatorname{sh} M(1-x/b)}{\operatorname{sh} M} \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\sqrt[1]{2b} \sqrt{\beta_n} \sin \sqrt{\beta_n} x + \cos \sqrt{\beta_n} x - 1] \exp(-\alpha_n^2 t) \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения коэффициента ряда C_n необходимо установить ортогональность собственных функций $\psi_n(x)$, т. е. выполнение условия

$$\int_0^b \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m$$

В данном случае это условие удовлетворяется. Тогда, воспользовавшись начальным условием для скорости жидкости

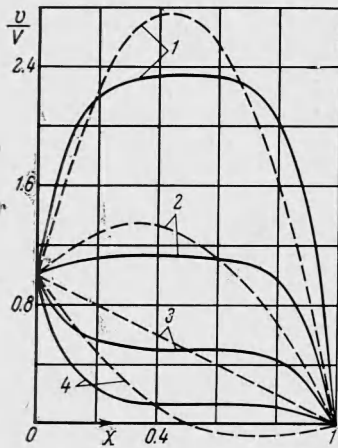
$$v_0(x, 0) = V \left\{ H(M_0) \left(1 - \operatorname{ch} \frac{M_0 x}{b} + \operatorname{sh} \frac{M_0 x}{b} \operatorname{th} \frac{M_0}{2} \right) + \frac{\operatorname{sh} M_0(1-x/b)}{\operatorname{sh} M_0} \right\}$$

выражение для C_n получим в виде

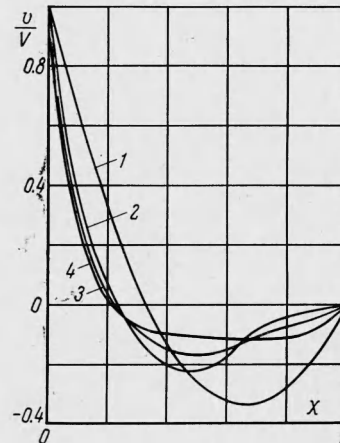
$$C_n = \frac{V}{J} \{H(M_0)J_1 - H(M)J_2 - J_3 - J_4\} \quad (12)$$

Здесь $H(M)$ согласно (9)

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{b}{M_0^2 + b^2\beta_n} \left\{ \frac{M_0^2(4 + b^2\beta_n)}{4\sqrt{\beta_n}b} \sin \sqrt{\beta_n}b + \frac{2b^2\beta_n}{M_0} \operatorname{th} \frac{M_0}{2} \right\} - b \\ J_2 &= \frac{b}{M^2 + b^2\beta_n} \left\{ \frac{M^2(4 + b^2\beta_n)}{4\sqrt{\beta_n}b} \sin \sqrt{\beta_n}b + \frac{2b^2\beta_n}{M} \operatorname{th} \frac{M}{2} \right\} - b \\ J_3 &= \frac{b^3\beta_n(M - 2 \operatorname{th}^{1/2}M)}{2M(M^2 + \beta_n b^2)}, \quad J_4 = \frac{b^3\beta_n(M_0 - 2 \operatorname{th}^{1/2}M_0)}{2M_0(M_0^2 + \beta_n b^2)} \\ J &= \int_0^b \psi_n^2(x) dx = b \left\{ 0.75 + \frac{b^2\beta_n}{8} + \frac{16 + 8b^2\beta_n + b^4\beta_n^4}{32\sqrt{\beta_n}b(4 - b^2\beta_n)} \sin 2\sqrt{\beta_n}b - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2\beta_n + 4}{4b\sqrt{\beta_n}} \sin \sqrt{\beta_n}b \right\} \end{aligned} \quad (13)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Если нестационарное течение жидкости обусловлено включением магнитного поля при начальных условиях

$$t = 0, \quad M_0 = 0, \quad v_0(x, 0) = V \left\{ \left(\frac{3x}{b} - 1 \right) - \frac{V_f}{V} \frac{6x}{b} \right\} \left(\frac{x}{b} - 1 \right)$$

то коэффициент ряда

$$C_n = \frac{V}{J} \left\{ \frac{b^2\beta_n + 2}{2b\beta_n} - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{4} + \frac{1}{b\beta_n} \right) \cos \sqrt{\beta_n}b - \frac{V_f}{V} b - H(M)J_2 - J_3 \right\} \quad (14)$$

Здесь J определяется согласно (13), $H(M)$ — согласно (9).

Полученные зависимости (11) — (14) были использованы для расчета течения Куэтта. На фиг. 2 приведены эпюры скорости жидкости в установившихся режимах течения в обычной гидродинамике (пунктирные линии) и для магнитогидродинамического потока $M = 10$ (сплошные линии) в зависимости от безразмерной координаты $x/b = X$. При этом кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям $V_f/V = 2.0, 1.0, 0.5, 0.2$.

Как видно, в установившемся режиме при наличии магнитного поля градиент скорости жидкости на неподвижной стенке канала возрастает по отношению к обычно-

му гидродинамическому потоку при всех V_f/V , а на движущейся стенке может как возрастать, так и уменьшаться в зависимости от величины отношения V_f/V .

На фиг. 3 приведены эпюры скорости жидкости в различные моменты нестационарного процесса, обусловленного резким включением магнитного поля, для случая, когда $V_f/V = 0$ и $M_0 = 0$, $M = 10$. В качестве безразмерного времени переходного процесса принята величина $\theta = tv/b^2$; кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\theta = 0.0001, 0.005, \infty$ при $M_0 = 0$.

В заключение автор благодарит А. И. Хожанова за помощь, оказанную при проведении данной работы.

Поступила 13 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Хожанов А. И. Нестационарное магнитогидродинамическое течение Куэтта, обусловленное изменением величины приложенного магнитного поля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
3. Будаков Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М., «Наука», 1967.

КРИТЕРИАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л. И. Колонина, Б. А. Урюков

(Новосибирск)

Получены критерии подобия для дуги, движущейся в поперечном магнитном поле, в случае, когда ее длина достаточно велика и не должна входить в систему определяющих параметров. Приведены результаты обработки экспериментальных данных в полученных критериях.

В настоящее время основное внимание при изучении поведения дуги в магнитном поле уделяется эксперименту, поскольку теоретические исследования в этом направлении еще недостаточно развиты. Известные из литературы данные о таких характеристиках дуги в магнитном поле, как скорости движения и напряженности электрического поля, получены на установках двух типов:

1) на рельсотроне, в котором дуга под действием магнитного поля движется в направлении, нормальном к ее оси, и баланс аэродинамических и магнитных сил достигается при разгоне дуги до равновесной скорости; 2) на установке, где удержание дуги в поперечном потоке газа на фиксированных электродах осуществляется с помощью магнитного поля.

Для обобщения экспериментальных данных о свойствах дуги в рельсотроне в работе [1] предложены критерии подобия, в которых в качестве характерного размера используется величина зазора между электродами. Очевидно, однако, что с ростом зазора между электродами рельсотрона, когда приэлектродные явления все более слабо сказываются на свойствах основной части столба дуги, величина зазора должна все меньше влиять на исследуемые параметры дуги. Единственным характерным для данной задачи размером мог бы являться некоторый размер поперечного сечения столба дуги, но он, в свою очередь, должен быть определяемым параметром. Таким образом, для описания данного явления следует ввести другие критерии подобия, в которых отсутствует характерный размер.

Для стационарного движения в пренебрежении излучением и индуцированным электрическим полем, используя уравнение импульсов, уравнение энергии, уравнение Максвелла и закон Ома, можно получить ряд критериев. Считая определяемыми параметрами E — напряженность электрического поля, V — скорость дуги, D — поперечный размер дуги, находим три комплекса

$$A_V = \frac{V \sqrt{\rho \mu_e}}{B}, \quad A_E = \frac{E}{h \sqrt{\rho \mu_e}}, \quad A_D = \frac{BD}{\mu_e I}$$