

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОКОЛО ПЛАСТИНЫ В КАНАЛЕ

С. В. Сухинин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследованы собственные акустические колебания газа около пластины в прямоугольном канале в двумерной постановке: зависимость собственной частоты колебаний от хорды и положения пластины в канале, изучен вид собственных функций. Предложена и обоснована математическая модель собственных колебаний около пластины в канале, с помощью которой проведены численные исследования зависимости собственных частот колебаний от геометрических параметров.

Точная математическая формулировка задачи о собственных акустических колебаниях газа около пластины в канале впервые появилась в работах [1–4]. В них содержится полное теоретическое обоснование математической модели, описывающей акустические и электромагнитные собственные колебания около произвольной решетки препятствий, и теоретическое доказательство существования собственных частот колебаний в рамках предложенной модели. В [4] впервые показано, что нарушение симметрии ножевой решетки не изменяет ее резонансных свойств.

Основной трудностью при описании собственных колебаний в бесконечных областях является наличие непрерывного спектра частот, соответствующих обобщенным собственным функциям. В [4] эта трудность преодолена при помощи аналитической теоремы Фредгольма. Доказано существование собственных колебаний и изучен их вид. В [5] содержатся доказательства аналогичных утверждений, полученных другими методами.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения, описывающие акустические колебания. На рис. 1 представлена геометрия области акустических колебаний, разбитая на подобласти 1–4. Потенциал $u(x, y, t)$ акустического возмущения скорости предполагается периодически зависящим от времени $u(x, y, t) = u(x, y) \exp(i\omega t)$. Уравнение для потенциала акустического возмущения скорости $u(\xi, \zeta)$ имеет вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\zeta\zeta} + \lambda^2 u = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (1.1)$$

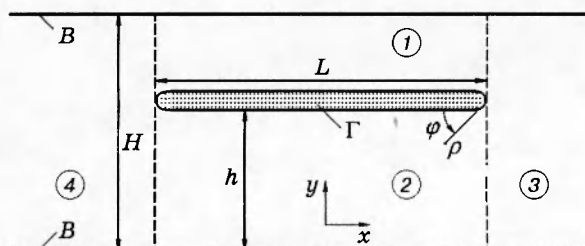


Рис. 1. Геометрия области собственных колебаний около профиля в канале:

Γ — профиль длиной L , H — высота канала, B — стенки канала, h — расстояние от пластины до нижней стенки канала, (ρ, φ) — полярные координаты с началом в кромке профиля; 1–4 — подобласти Ω

(Ω — область, занятая газом). Безразмерные частота λ и переменные (ξ, ζ) выражаются через размерные $\lambda = H\omega/c$, $\xi = x/H$, $\zeta = y/H$, где c — скорость звука; H — высота канала; ω — круговая частота акустических колебаний.

В безразмерных переменных ширина канала равна 1, длине пластины L соответствует безразмерная величина $l = L/H$, характеризующая длину профиля пластины относительно высоты канала.

На стенках канала B и профиле пластины Γ должны выполняться условия непротекания

$$u_\zeta = 0 \quad \text{на } \Gamma + B. \quad (1.2)$$

Согласно физическому содержанию задачи, необходимо, чтобы для функции u выполнялось условие конечности энергии во всей области колебаний:

$$E(u) = \int_{\Omega} [u^2 + (\nabla u)^2] d\Omega < \infty, \quad (1.3)$$

где $E(u)$ имеет смысл энергии колебаний.

Условия излучения и непрерывный спектр. Удобно выбрать систему координат (ξ, ζ) таким образом, чтобы начало координат находилось на нижней стенке канала и ось ζ пересекала профиль пластины посередине. Тогда границы канала B можно описать соотношениями $B = \{\zeta = 0, 1\}$, а профиль Γ — в виде множества на плоскости (ξ, ζ) : $\Gamma = \{\zeta = h, -l/2 \leq \xi \leq l/2\}$, где h — расстояние от пластины до нижней стенки канала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Решение уравнения (1.1) считается удовлетворяющим условию излучения, если для некоторого достаточно большого числа R ($R > L/2$) и всех $\{(\xi, \zeta), |\xi| \geq R\}$ справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} u(\xi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\pi n \zeta) c_n^{(+)} \exp(i\xi \sqrt{\lambda^2 - (\pi n)^2}), \quad \xi \geq R, \\ u(\xi, \zeta) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(\pi n \zeta) c_n^{(-)} \exp(-i\xi \sqrt{\lambda^2 - (\pi n)^2}), \quad \xi \leq -R \end{aligned} \quad (1.4)$$

(здесь и далее безразмерная длина профиля пластины l для удобства обозначена L).

Если функция удовлетворяет условию излучения, то она затухает либо возрастает в общем случае как экспонента при удалении от начала координат (препятствия). Более подробно условия излучения обсуждаются в работах [1–4].

Далее предполагается, что для $\lambda^2 < (\pi n)^2$ выбрана такая ветвь квадратного корня, что $i\sqrt{\lambda^2 - (\pi n)^2} < 0$; $c_n^{(+)}$ и $c_n^{(-)}$ — комплексные числа такие, что ряды (1.4) сходятся. Задача (1.1), (1.2) в классе функций, удовлетворяющих условиям излучения, является фредгольмовой [2] и имеет нетривиальные решения только для дискретного (на некоторой поверхности Римана) множества Λ^* значений параметра λ уравнения Гельмгольца (1.1). В [1–4] значения $\lambda^* \in \Lambda^*$ называются квазисобственными значениями этой задачи, а соответствующие значениям λ^* решения u_* называются квазисобственными функциями. В случае, когда энергия квазисобственных колебаний конечна ($E(u_*) < \infty$), функция u_* описывает классические собственные колебания. Они локализованы в окрестности пластины и могут являться причиной резонансных явлений. В том случае, когда энергия квазисобственных колебаний бесконечна, физический смысл колебаний до конца не ясен.

Для целых n и всех λ ($|\lambda| > \pi n$) функции вида $Y_n = \cos(\pi n \zeta) \exp(-i\xi \sqrt{\lambda^2 - (\pi n)^2})$ описывают обобщенные собственные волны в канале без препятствия (имеющие неограниченную энергию). С точки зрения теории самосопряженных операторов это означает, что

соответствующее самосопряженное расширение оператора Лапласа Δ имеет непрерывный спектр, который заполняет всю неотрицательную часть вещественной прямой. Числа λ^2 соответствуют обобщенным собственным значениям этого расширения оператора Δ . Классическим собственным значениям соответствует чисто точечный спектр оператора, погруженный в непрерывный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Обобщенные собственные волны в канале, которые описываются при помощи функций $Y_0 = \exp(i\lambda\xi)$, далее называются поршневыми модами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Поршневая мода является обобщенной собственной функцией канала как с пластиной, так и без нее. Это обусловлено тем, что функции, описывающие поршневые моды, не зависят от переменной ζ , направление которой перпендикулярно оси канала (см. рис. 1). Если в канале параллельно его стенкам находится пластина, то вид функций, описывающих обобщенные собственные волны в этой структуре, может быть существенно другим по сравнению с видом обобщенных собственных функций пустого канала.

Сужение класса решений. Оператор, который соответствует задаче о собственных колебаниях около пластины в канале, имеет непрерывный спектр, совпадающий с положительной полуосью вещественных чисел, что затрудняет исследование собственных значений. Сужения пространства допустимых решений могут отодвинуть нижнюю грань σ_0 непрерывного спектра от начала координат. Это может позволить применять в интервале $[0, \sigma_0]$ известные вариационные методы определения собственных значений.

Далее задача (1.1)–(1.4) называется задачей СК (собственных колебаний). Пространство допустимых решений этой задачи является пространством функций с локально конечной энергией в области Ω/Γ , оно обозначено через H_s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Собственным значением λ^* задачи СК называется такое значение параметра λ , для которого существует нетривиальное решение u^* этой задачи, удовлетворяющее условию (1.3). Функция u^* называется собственной функцией задачи СК.

Необходимо отметить, что собственные значения и функции задачи СК позволяют полностью описать акустические резонансные явления около пластины в канале, собственные значения погружены в непрерывный спектр, поршневая мода $Y_0 = \exp(i\lambda\xi)$ является обобщенной собственной функцией задачи СК.

Для исследования собственных колебаний возможны два подхода:

1. Если задача СК обладает зеркальной симметрией относительно середины канала, то добавляется условие антисимметрии колебаний относительно середины канала $\{(\xi, \zeta), \zeta = 1/2\}$. Условие позволяет исключить поршневую моду из пространства допустимых решений задачи СК. В этом подходе непрерывный спектр самосопряженного расширения оператора $-\Delta$, соответствующего задаче СК, равен $[\pi^2, \infty)$. Подход не обоснован, если расположение пластины в канале произвольно.

2. Другой подход применен в работе [4]. Доказано, что в условиях излучения (1.4) для собственной функции задачи СК не может присутствовать слагаемое, соответствующее поршневой моде. При помощи аналитической теоремы Фредгольма доказано существование собственных значений задачи СК для произвольного положения достаточно длинного профиля. Доказательство основано на том, что поршневая мода является обобщенной собственной функцией задачи СК.

В этих подходах сужение пространства допустимых решений задачи СК приводит к изменению непрерывного спектра и появлению чисто точечного спектра соответствующего оператора. Первый из них использует симметрию задачи, второй — то, что поршневые моды являются обобщенными собственными функциями задачи СК. Последний подход

более общий. В силу результатов теории самосопряженных операторов собственные функции имеют нулевую проекцию в соответствующем пространстве функций на произвольную поршневую моду, так как она является обобщенной собственной функцией. Поэтому если собственная функция u^* задачи СК существует, то она должна для всех значений λ удовлетворять необходимому условию

$$\int_{\Omega} Y_0 u^* d\Omega = \int_{\Omega} \exp(i\xi\lambda) u^* d\Omega = 0.$$

Условие будет выполнено для всех значений λ тогда и только тогда, когда для всех значений ξ справедливо тождество

$$\int_0^1 u^*(\xi, \zeta) d\zeta \equiv 0, \quad (1.5)$$

которое сужает пространство H_s допустимых решений задачи СК на пространство H_0 ($H_0 \subseteq H_s$), которое является подпространством H_s . Далее задача СК с условием (1.5), выполненным для всех значений ξ , называется задачей СКО (собственных колебаний ортогональных). Непрерывный спектр, соответствующий задаче СКО, представляет собой множество $\sigma_1 = [\pi^2, \infty)$ на вещественной полуоси. Поэтому собственные значения СКО ищутся в интервале $(0, \pi^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Условия антисимметрии собственных функций относительно пластины по переменной ζ — частный случай условий (1.5).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ВИД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Вид собственных функций вдали от пластины описывается при помощи условия излучения и условия конечности энергии.

Для более полного понимания механики собственных колебаний и создания алгоритмов численного исследования необходимо представление о виде собственной функции в окрестности кромок профиля.

Вид собственной функции в окрестности пластины. Важным является исследование вида собственных функций в окрестности кромок (концов) пластины. Физическими предпосылками для этого будут:

- а) энергия в окрестности кромки конечна;
- б) кромка не излучает.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Эти предпосылки эквивалентны друг другу и являются следствием условия конечности энергии собственных колебаний (1.3).

В окрестности кромки профиля решение u^* задачи СК (или СКО) имеет вид [6]

$$u^* = \text{const} + \sqrt{\rho} \cos(\varphi/2). \quad (2.1)$$

Здесь ρ — расстояние от кромки, в окрестности которой исследуется вид решения, до точки (ξ, ζ) ; φ — угол, измеряемый от нижней границы профиля для вектора $(\xi - L/2, \zeta - h)$ при изучении окрестности передней кромки или $(\xi + L/2, \zeta - h)$ при изучении задней кромки (см. рис. 1).

В области Ω/Γ решение u задачи СК (или СКО) можно считать достаточно гладким, поэтому в области Ω его можно представить в виде

$$u = u_p + u_n, \quad (2.2)$$

где u_p — функция, разрывная на множестве точек Γ , описывающем профиль; u_n — функция, непрерывная во всей области Ω .

Утверждение 2.1. Каждое решение задачи СК представимо в виде (2.2). Функция u_p непрерывна в кромках профиля, в областях 3 и 4, слева и справа от профиля, $u_p = 0$ (см. рис. 1), а в областях 1 и 2, над и под профилем, ее можно записать в виде

$$u_p = \begin{cases} \nu f(\xi), & (\xi, \zeta) \in 1, \\ (\nu - 1)f(\xi), & (\xi, \zeta) \in 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

В том случае, когда функция u_p удовлетворяет условиям ортогональности поршневой моде (1.5) и координаты безразмерны, справедливо равенство $\nu = h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Методом от противного. Пусть u_+ — предельное значение при $\zeta \rightarrow h + 0$, а u_- — предельное значение при $\zeta \rightarrow h - 0$ функции u_p . Тогда функция $f(\xi) = u_+ - u_-$ описывает интенсивность разрыва на профиле функции u_p и справедливо представление (2.3). Если непрерывность в точках t_1 и t_2 — кромках профиля — нарушается, то не выполняется условие (2.1), которое является следствием условия конечности энергии (1.3). Выражение для константы ν получено из условия ортогональности (1.5). Необходимо отметить, что u_p может не удовлетворять условию конечности энергии. Утверждение доказано.

Следствие 2.1. На кромках профиля нет разрыва потенциала скорости, $f(\xi) = 0$ при $\xi = L/2$ и $\xi = -L/2$.

Можно заметить, что задача СКО при надлежащем выборе начала координат ($\xi = 0$ — середина профиля) переходит сама в себя (инвариантна) относительно замены переменных $\xi \rightarrow -\xi$. Поэтому любое решение u задачи можно представить в виде $u = u_s + u_a$. Здесь и далее $u_s(\xi, \zeta) = u_s(-\xi, \zeta)$ — симметричная (четная) по ξ , $u_a(\xi, \zeta) = -u_a(-\xi, \zeta)$ — антисимметричная (нечетная) по ξ составляющие решения u . Так как задача СКО линейна, то пространство H_0 всех допустимых ее решений можно представить в виде прямой суммы пространств симметричных H_{sym} и антисимметричных H_a по ξ решений, $H_0 = H_{sym} \oplus H_a$. В силу этого и линейности задача разбивается на две независимые задачи для четных и нечетных по ξ функций, исследования их аналогичны, поэтому дальнейшее изложение ведется для случая симметричных (четных) по ξ решений. Необходимые изменения для исследования случая нечетных по ξ решений приведены по ходу изложения.

Пусть u_i , $i = 1, \dots, 4$ есть сужения решения u задачи СКО на области 1–4 соответственно. Общее решение задачи СК в областях 1–3 в классе четных по ξ функций имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \zeta) &= a_0 \cos(\lambda\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left[\frac{m\pi(\zeta - h)}{1 - h} \right] \operatorname{ch} \left(\xi \sqrt{\left[\frac{m\pi}{1 - h} \right]^2 - \lambda^2} \right), \\ u_2(\xi, \zeta) &= b_0 \cos(\lambda\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \left[\frac{m\pi(\zeta - h)}{h} \right] \operatorname{ch} \left(\xi \sqrt{\left[\frac{m\pi}{h} \right]^2 - \lambda^2} \right), \\ u_3(\xi, \zeta) &= c_0 \exp(i\lambda\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\pi\zeta) \exp(-\xi \sqrt{(k\pi)^2 - \lambda^2}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для нечетных по ξ функций справедливо представление

$$u_1(\xi, \zeta) = a_0 \sin(\lambda\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \left[\frac{m\pi(\zeta - h)}{1 - h} \right] \operatorname{sh} \left(\xi \sqrt{\left[\frac{m\pi}{1 - h} \right]^2 - \lambda^2} \right),$$

$$u_2(\xi, \zeta) = b_0 \sin(\lambda\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \left[\frac{m\pi(\zeta - h)}{h} \right] \operatorname{sh} \left(\xi \sqrt{\left[\frac{m\pi}{h} \right]^2 - \lambda^2} \right), \quad (2.5)$$

$$u_3(\xi, \zeta) = c_0 \exp(i\lambda\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\pi\zeta) \exp(-\xi \sqrt{(k\pi)^2 - \lambda^2}).$$

Условия (1.5) будут выполнены в том случае, когда

$$c_0 = 0, \quad a_0(1 - h) + b_0 h = 0. \quad (2.6)$$

Для того чтобы функция вида (2.4) (или (2.5)) с условиями (2.6) была решением задачи СКО, на границах областей 1-4 должны выполняться условия непрерывности решения и его нормальной производной, которые называются условиями склейки или сшивания [7]. В силу симметрии задачи по ξ достаточно выполнения условий склейки на границах областей 1-3 и 2-3. Пусть $g_{(1-3)}$ обозначает границу между 1 и 3, а $g_{(2-3)}$ — границу между 2 и 3. Условия склейки имеют вид

$$u_1 = u_3, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} \quad \text{на } g_{(1-3)}; \quad u_2 = u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} \quad \text{на } g_{(2-3)}. \quad (2.7)$$

Условия (2.7) означают, что функция вида (2.3) будет слабым решением задачи СКО в энергетическом пространстве Соболева. Известно, что для эллиптических уравнений слабое решение автоматически является сильным решением.

Существование собственных колебаний около профиля в канале. Для обоснования корректности математического описания собственных акустических колебаний около профиля в канале необходимо показать, что хотя бы для некоторых геометрических параметров структуры собственные колебания описываются при помощи предложенной математической модели.

Для этого будут рассмотрены вспомогательные задачи и использован метод «вилки Дирихле — Неймана» [8]. Пусть дополнительно к граничным условиям задачи на отрезках $G = \{(\xi, \zeta) : \xi = R, 0 \leq \zeta \leq 1, R > L/2\}$ выполнены условия Дирихле (D) $u(\xi, \zeta) = 0$ при $|\xi| = R > L/2$, либо Неймана (N) $u_\xi(\xi, \zeta) = 0$ при $|\xi| = R > L/2$.

Для удобства дальнейшего изложения задача СКО с дополнительным условием D будет обозначаться СКО(DR), а с условием N — СКО(NR). Пусть λ_{DR} , u_{DR} и λ_{NR} , u_{NR} — собственные значения и собственные функции задач СКО(DR) и СКО(NR) соответственно. Так как условие N расширяет пространство допустимых решений задачи СКО, а условие D сужает его, то для всех чисел R ($R > L/2$) справедливы неравенства, которые можно получить при помощи вариационной формулировки задачи [8],

$$\lambda_{NR} \leq \lambda^* \leq \lambda_{DR}. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если для некоторых значений R ($R \geq L/2$) выполнены строгие неравенства $\lambda_{NR} > 0$ и $0 < \lambda_{DR} < \pi$, то из соотношения (2.8) следует существование собственного значения задачи СК.

Если $R = L/2$, то условие D представляет собой «мягкое» условие излучения для колебаний в каналах 1 и 2 (см. рис. 1). Тогда безразмерная собственная частота продольных колебаний λ_{DL} вычисляется по формуле $\lambda_{DL} = \pi/L$. В силу этого для выполнения неравенства $\lambda^* < \pi$ достаточно, чтобы длина профиля была больше высоты канала ($L > 1$). Из условия (1.5) при $R > L/2$ следует строгое неравенство $\lambda_{NR} > 0$. Это означает, что собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в связной области 1 строго больше нуля.

Теорема 2.1 (достаточное условие существования собственных колебаний около профиля в канале). *Если безразмерная длина профиля L удовлетворяет строгому неравенству $L > 1$, то нетривиальные собственные значения задачи СКО существуют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \rightarrow 1$ (или $h \rightarrow 0$), h — ордината положения профиля, $(h - 1/2)$ — отклонение положения профиля от середины канала. Тогда существует собственная функция $u^*(\xi, \zeta)$ задачи СКО(DR), локализованная в области $[-L/2, L/2] \times [h, 1]$, которая имеет вид

$$u^*(\xi, \zeta) = \begin{cases} \cos(\pi\xi/L), & (\xi, \zeta) \in [-L/2, L/2] \times [h, 1], \\ ((h-1)/h) \cos(\pi\xi/L), & (\xi, \zeta) \in [-L/2, L/2] \times [0, h]. \end{cases}$$

Этой собственной функции соответствует собственное значение λ^* , которое удовлетворяет соотношению $\lambda^* \cong \pi/L$ при $h \rightarrow 1$. Для случая $h \rightarrow 0$ необходимо сделать очевидные замены. Теорема доказана.

В теореме 2.1 доказано существование собственных значений задачи только для достаточно большой относительной длины профиля.

Теорема 2.2 (существование собственных колебаний). *Собственные колебания около профиля в канале всегда существуют, независимо от длины и местоположения профиля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого значения $L > 0$ существует такое $R > 0$, что справедливы неравенства

$$0 < \lambda_{NR} \leq \lambda^* \leq \lambda_{DR} < \pi. \quad (2.9)$$

Оценка снизу. Если $R > L/2$, то $\lambda_{NR} > 0$ в силу связности области и ортогональности решения константе, так как $(\lambda_{NR})^2$ есть второе собственное значение задачи Неймана для оператора Лапласа в ограниченной связной области.

Оценка сверху. Пусть в представлении (2.2) непрерывная составляющая u_n приближенной собственной функции u имеет вид $u_n = \cos(\pi\zeta) \cos(\pi\xi/R)$ в Ω .

Разрывная на профиле составляющая приближенной собственной функции (2.3) имеет вид

$$u_p^* = \begin{cases} \varkappa \cos(\pi\xi/L), & (\xi, \zeta) \in 1, \\ (1 - 1/h) \varkappa \cos(\pi\xi/L), & (\xi, \zeta) \in 2 \end{cases}$$

(\varkappa — некоторая произвольная константа). Функцию u_p можно считать определенной во всей области колебаний, если ее продолжить тождественно равной 0 вне областей 1 и 2. Для всех значений \varkappa справедливо соотношение, которое отражает вариационное свойство собственных значений,

$$(\lambda_{DR})^2 \leq \frac{\int_{\Omega_R} [\nabla(u_n + u_p)]^2 d\Omega_R}{\int_{\Omega_R} (u_n + u_p)^2 d\Omega_R} = \mu^2(\varkappa, R), \quad (2.10)$$

где $\Omega_R = \Omega \cap \{(\xi, \zeta) : |\xi| \leq R\}$. Прямым вычислением проверяется (это есть следствие ограниченности носителя функции u_p), что для больших значений R справедливо асимптотическое представление

$$\mu^2(\varkappa, R) \cong \pi^2 + \frac{A}{R} + \frac{B}{R^2}.$$

Величины A и B зависят от \varkappa . Так как параметры R и \varkappa независимы, то для достаточно больших R определяющим является значение величины A . Справедливо выражение

$$A = \frac{(L^2 h - L^2 + 1 - h)\pi^2 \varkappa^2}{hL} + 8 \frac{\sin(\pi h)L\varkappa}{h}.$$

Отсюда следует, что для достаточно малых отрицательных значений величины ε значения A будут отрицательными. Поэтому для достаточно больших значений R и малых отрицательных значений ε справедливо строгое неравенство $\mu^2(\varepsilon, R) < \pi^2$.

В силу соотношения (2.10) справедливы неравенства (2.9). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Метод доказательства теоремы 2.2 фактически основан на оценке возмущения обобщенной собственной функции, вносимого профилем. Отсюда следует, что при уменьшении длины профиля собственная функция все более «походит» на обобщенную собственную функцию, удовлетворяющую условиям (1.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Механика собственных колебаний при $L > 1$ и $L < 1$ не имеет принципиальных отличий. При $L < 1$ собственные функции не могут быть локализованы между профилем и стенками канала. Этот факт наиболее существен при $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow 1$. В этом случае собственная функция «выдавливается» наружу из пространства между профилем и стенкой (малость величины ε). Если $L > 1$, то, как следует из доказательства теоремы 2.1, при $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow 1$ собственная функция локализована между профилем и ближайшей стенкой канала. Необходимо отметить, что обсуждается поведение наименьших собственных значений, если не оговорено иное.

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Дискретизация задачи должна приближенно учитывать все ее свойства. Учет условия конечности энергии — наиболее специфическая проблема, характерная только для задач подобного типа. Если соотношения (2.7) рассматривать как равенства рядов Фурье на всем интервале $g_{(1-3)}$ и $g_{(2-3)}$ по переменной ζ , то они примут вид бесконечной однородной системы уравнений [7].

Элементы матриц этих уравнений аналитически зависят от параметра λ . Эта система обладает существенным недостатком для численных методов решения, на который следует обратить внимание. Необходимы дополнительные условия [7], чтобы численное решение этих уравнений сходилось к решению, для которого справедливы условия конечности энергии. В предлагаемой работе для корректности вычислений при $h = 1/2$ дискретизованные соотношения (2.7) дополнялись принудительным условием конечности энергии, которое позволяет существенно повысить точность и скорость вычислений. В силу следствия 2.1 на кромках профиля для четных по оси абсцисс мод колебаний справедливо равенство

$$(a_0 - b_0) \cos\left(\lambda \frac{L}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m) \operatorname{ch} \left\{ \frac{L}{2} \sqrt{\left[\frac{m\pi}{1-h}\right]^2 - \lambda^2} \right\} = 0, \quad (3.1a)$$

для нечетных

$$(a_0 - b_0) \sin\left(\lambda \frac{L}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - b_m) \operatorname{sh} \left\{ \frac{L}{2} \sqrt{\left[\frac{m\pi}{1-h}\right]^2 - \lambda^2} \right\} = 0. \quad (3.1b)$$

Соотношения (3.1a) и (3.1b) имеют смысл принудительного выполнения условия конечности энергии на кромках профиля для приближенных собственных функций и являются добавочными при вычислениях собственных значений и функций (количество неизвестных $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ было равным). Это позволяет использовать результаты [7] для обоснования численных исследований. Для численного определения зависимости собственных значений и функций от параметра h применялся обобщенный метод разложения определителя. Для выполнения условия конечности энергии в дискретных моделях использована

известная методика решения бесконечных систем уравнений в специальных пространствах допускаемых решений [7].

Метод прямого принудительного учета конечности энергии. Этот метод применяется в предлагаемой работе для численного исследования зависимости частоты собственных колебаний от длины профиля в том случае, когда он находится посередине канала ($h = (1 - h) = 1/2$). Поэтому условия (2.6) примут вид $a_0 = -b_0$. Если профиль находится посередине канала, то любую собственную функцию u^* задачи СКО можно представить в виде суммы двух функций $u^* = u_a + u_s$, из которых u_s симметрична относительно профиля, а u_a антисимметрична. Так как любая собственная функция задачи СКО удовлетворяет условию (1.5), то можно считать, что собственная функция u^* антисимметрична относительно профиля, если он находится посередине канала. В силу этого можно считать, что $u_1 = -u_2$ или $a_m = -b_m$ для всех значений m . Кроме того, поскольку функция u_3 антисимметрична относительно места положения профиля, в представлениях (2.4) и (2.5) для нее все коэффициенты c_k с четными номерами равны нулю. Система уравнений, полученная из (2.7) с условием (3.1), обрезалась и исследовалась численно.

Метод разложения определителя. Наибольшая трудность, которая встречается при численных исследованиях задачи типа СКО, заключается в том, что необходимо контролировать сходимость приближенных решений к решению задачи в классе функций с условиями конечности энергии на кромке.

Пусть для областей 1 (над профилем) и 2 (под профилем) собственные функции приближенно представлены в виде

$$u_1(\xi, \zeta) = a_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda\xi) \\ \sin(\lambda\xi) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^M a_m \cos \left[\frac{m\pi(\zeta - h)}{1 - h} \right] \begin{Bmatrix} \text{ch}(\xi\alpha_m) \\ \text{sh}(\xi\alpha_m) \end{Bmatrix},$$

$$u_2(\xi, \zeta) = b_0 \begin{Bmatrix} \cos(\lambda\xi) \\ \sin(\lambda\xi) \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^N b_n \cos \left[\frac{n\pi(\zeta - h)}{h} \right] \begin{Bmatrix} \text{ch}(\xi\beta_n) \\ \text{sh}(\xi\beta_n) \end{Bmatrix},$$

$$\alpha_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{1-h}\right)^2 - \lambda^2}, \quad \beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 - \lambda^2}.$$

Эти выражения аналитически зависят от λ и содержат $K = N + M + 1$ неизвестных констант a_m и b_n , так как a_0 и b_0 связаны условием (3.1). Для определения этих неизвестных необходимо K дополнительных соотношений, которые можно получить при помощи условий (2.7). По сути требуется выполнение для приближенной собственной функции K парциальных условий излучения. Пусть

$$u_3(\xi, \zeta) = \sum_{k=1}^{K+1} c_k \cos(k\pi\zeta) \exp(-\xi\delta_k), \quad \delta_k = \sqrt{(k\pi)^2 - \lambda^2}.$$

Условия (2.7) приводят к системе выражений для неизвестных коэффициентов c_k ($k = 1, \dots, K = M + N + 1$):

$$c_k = \int_h^1 u_1 \cos(k\pi\zeta) d\zeta + \int_0^h u_2 \cos(k\pi\zeta) d\zeta,$$

$$c_k = -\frac{1}{\delta_k} \left\{ \int_0^h \left(\frac{d}{d\xi} u_2 \right)_{\xi=L/2} \cos(k\pi\zeta) d\zeta + \int_h^1 \left(\frac{d}{d\xi} u_1 \right)_{\xi=L/2} \cos(k\pi\zeta) d\zeta \right\}.$$

Если исключить c_k из этих соотношений, то получается однородная система уравнений с K неизвестными константами a_m и b_n ($m = 0, 1, \dots, M$; $n = 1, \dots, N$):

$$\int_0^h \cos(k\pi\zeta) \left(u_2 + \frac{1}{\delta_k} \frac{d}{d\xi} u_2 \right)_{\xi=L/2} d\zeta + \int_h^1 \cos(k\pi\zeta) \left(u_1 + \frac{1}{\delta_k} \frac{d}{d\xi} u_1 \right)_{\xi=L/2} d\zeta = 0 \quad (k = 1, \dots, K).$$

Если сделать замену переменных, то система уравнений примет канонический вид

$$a_0 \left(\frac{1}{\delta_k - i\lambda} + \frac{e^{-i\lambda L}}{\delta_k + i\lambda} \right) + \sum_{m=1}^M a_m \left(\frac{1}{\delta_k + \alpha_m} + \frac{e^{-\alpha_m L}}{\delta_k - \alpha_m} \right) + \sum_{n=1}^N b_n \left(\frac{1}{\delta_k + \beta_n} + \frac{e^{-\beta_n L}}{\delta_k - \beta_n} \right) = 0,$$

она исследована при помощи метода разложения определителя [7]. Получено выражение, которое позволяет приближенно рассчитать собственные частоты колебаний около профиля в канале:

$$k\pi = \lambda \left(L - 2 \frac{(1-h) \ln(1-h) + h \ln(h)}{\pi} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi^2 / (1-h)^2 - \lambda^2}} \right) - \\ - \operatorname{arctg} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi^2 / h^2 - \lambda^2}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi^2 - \lambda^2}} \right) \quad (3.2)$$

(для четных по оси ξ собственных колебаний k — нечетное число, для нечетных — четное).

4. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Зависимость частоты от длины профиля и его положения в канале. На рис. 2, а представлены результаты численных исследований зависимости частот собственных колебаний от длины профиля пластины. Четные и нечетные моды чередуются. Из сравнения результатов численных исследований видно, что с увеличением длины пластины значения частот первых мод собственных колебаний уменьшаются, а количество мод растет. Наибольшей возможной частотой для каждой моды является значение π , достигаемое при уменьшении длины профиля до некоторой критической величины, при которой

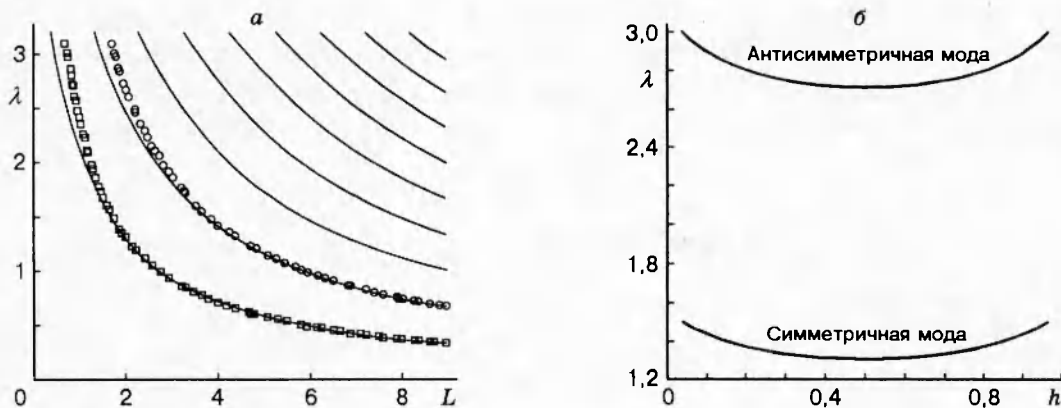


Рис. 2. Зависимость частоты собственных колебаний от длины профиля (а) и его положения в канале (б):

а — сплошные линии — результаты, полученные методом прямого принудительного учета конечной энергии; точки — результаты, полученные с помощью выражения (3.2)

количество мод собственных колебаний изменяется. Для первой моды собственных колебаний $\lim_{L \rightarrow 0} [\lambda_1(L)] = \pi$. Расчетные данные зависимости частот собственных колебаний от положения профиля при его фиксированной длине приведены на рис. 2, б. Следует обратить внимание на слабую зависимость частот от h . При $h \rightarrow 0$ или $h \rightarrow 1$ в случае, если $L > 1$, наблюдается предельный переход $\lambda(h) \rightarrow \pi/L$. Если $L < 1$, справедлив предельный переход $\lambda(h) \rightarrow \pi$. Половина длины волны собственных колебаний в последнем случае стремится к высоте канала.

Собственные колебания существуют для любых длин и любого места положения пластины в канале, для каждой фиксированной длины профиля пластины количество мод собственных колебаний конечно и определяется из рис. 2, а.

Эффективная длина профиля. Пусть $L \gg 1$. Если длина профиля стремится к бесконечности или профиль приближается к стенке канала, то первая безразмерная частота собственных колебаний около профиля λ^* приближенно имеет вид $\lambda^* \approx \pi/L$. В силу этого для изучения механики колебаний на первой собственной частоте удобно ввести понятие эффективной длины профиля L_{eff} , которая равна половине длины волны собственных колебаний ($L_{eff} = \pi/\lambda^*$). В силу теорем 2.1 и 2.2 справедливы:

Утверждение 4.1 (зависимость эффективной длины от предельных размеров профиля). Если $L \rightarrow 0$, то $L_{eff} \rightarrow 1$. Если $L \rightarrow \infty$, то $L_{eff} \rightarrow L$.

Утверждение 4.2 (зависимость эффективной длины от места положения профиля). Пусть $L > 1$. Если $h \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 1$), то $L_{eff} \rightarrow L$. Пусть $L < 1$. Если $h \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 1$), то $L_{eff} \rightarrow 1$.

Пусть $L_{eff} = \pi/\lambda^* = L(1 + \varepsilon)$ или $L_{eff}/L - 1 = \varepsilon$. На рис. 3 приведена зависимость величины ε от безразмерной длины профиля, которая получена численно при помощи метода принудительного учета конечности энергии. Можно отметить хорошее совпадение результатов, полученных в ходе расчетов, с приведенными выше утверждениями.

Теоретические и численные исследования позволяют сделать вывод, что не существует минимальной или максимальной длины профиля, при которой отсутствуют собственные колебания.

Вид собственных функций, зависимость амплитуды от координат. При помощи метода принудительного учета конечности энергии произведены расчеты зависимости собственной функции от координат для $L = 2$, $h = 1/2$. На рис. 4, а приведена зависимость амплитуды колебаний под пластиной для первой (четной) моды собственных колебаний от координат. В силу ортогональности собственных колебаний поршневой моде собственная функция антисимметрична относительно профиля, если он находится

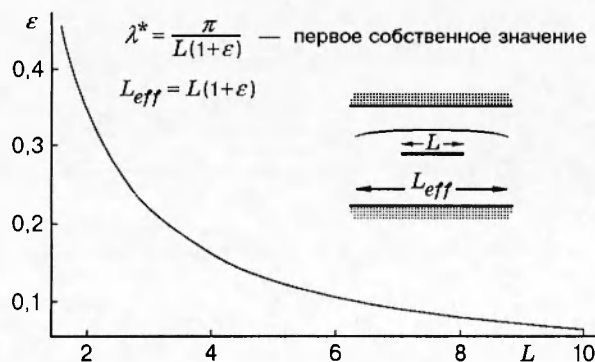


Рис. 3. Зависимость эффективной длины (для первой собственной частоты) от длины профиля

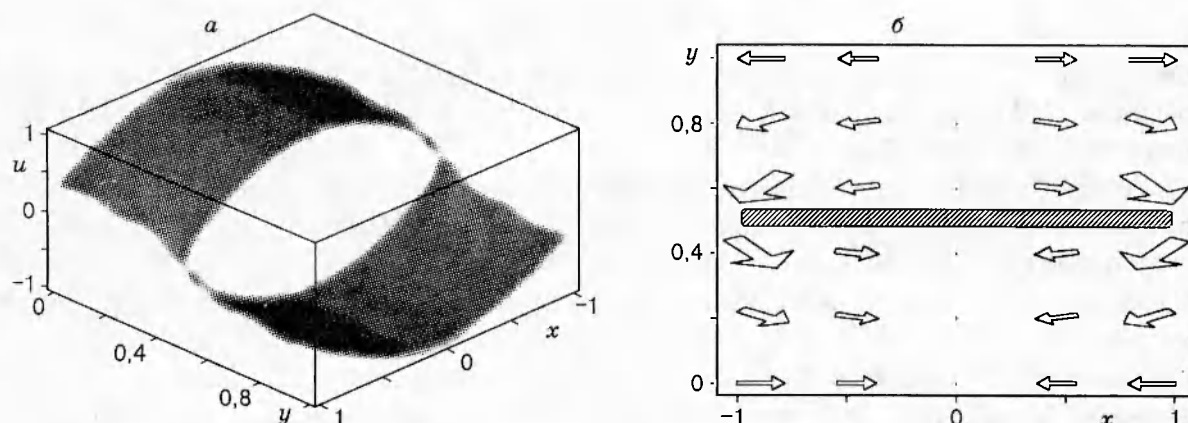


Рис. 4. Амплитуда колебаний (а) в поле скоростей (б) первой моды в окрестности профиля

посередине канала (колебания сверху и снизу профиля находятся в противофазе).

Вид собственных колебаний, направление акустических скоростей потока.

На рис. 4, б показано поле акустических скоростей для первой моды собственных колебаний (над пластиной — фаза сжатия, под пластиной — фаза разрежения). Проведенные исследования позволяют понять механику собственных колебаний около профиля в канале. Из рис. 4, б ясно, что первая мода собственных колебаний — это перетекание газа из области 1 в область 2 и наоборот.

ВЫВОДЫ

- Построена математическая модель, описывающая собственные колебания около пластины в канале. Проведены полные численные исследования собственных колебаний.
- Численно найдены зависимости частот собственных колебаний от длины профиля пластины и его положения в канале, а также эффективная длина профиля.
- Показано, что собственные колебания существуют для любых длин и положений профиля в канале.
- Исследованы асимптотики собственных частот при приближении пластины к стенке канала и бесконечном удлинении или уменьшении длины профиля. Обнаружено, что при приближении пластины к стенке канала собственная функция локализуется между пластиной и стенкой, если длина профиля больше высоты канала. Если его длина стремится к нулю, то собственная частота колебаний стремится к низшей частоте, соответствующей допустимым обобщенным собственным волнам в канале без препятствия.
- Исследована зависимость амплитуды собственных колебаний от координат. Показано, что собственные колебания над и под профилем находятся в противофазе.

Автор выражает благодарность Р. М. Гарипову за конструктивное обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00894).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сухинин С. В.** Об акустических и электромагнитных колебаниях около периодической решетки // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 51. С. 159–168.
2. **Сухинин С. В.** Качественные вопросы теории рассеяния на периодических цилиндрических препятствиях // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 118–134.
3. **Сухинин С. В.** Эффект волновода // Тез. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 1986.
4. **Сухинин С. В.** Эффект волновода // ПМТФ. 1989. № 2. С. 92–101.
5. **Evans D. V., Linton C. M.** Trapped mode frequencies embedded in the continuous spectrum // Q. J. Mech. and Appl. Math. 1993. V. 46, pt 2. P. 255–274.
6. **Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.** Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
7. **Миттра Р., Ли С.** Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
8. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 10/VI 1996 г.
