

УДК 539.3

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ УПРУГОЙ КОНУСООБРАЗНОЙ КОНСОЛИ

М. Акбарзаде, А. Фаршидиянфар

Университет им. Фирдоуси, Мешхед, Иран

E-mails: mehdiakbarzade@yahoo.com, farshid@ferdowsi.um.ac.ir

Проведено аналитическое моделирование динамики упруго защемленной конусообразной консоли. Нелинейное дифференциальное уравнение колебаний решено с использованием пяти аналитических методов. Получены аналитические зависимости собственной частоты колебаний от начальной амплитуды. Проведено сравнение полученных решений с точным решением задачи и показано, что они хорошо согласуются.

**Ключевые слова:** нелинейные осцилляции, аналитические методы, периодическое решение.

DOI: 10.15372/PMTF20170321

**Введение.** Консольные балки являются основным элементом различных строительных конструкций, поэтому их поведение при динамических нагрузках исследуется достаточно интенсивно. Наиболее широко используются конусообразные балки, поскольку их применение позволяет уменьшить массу конструкции, увеличить ее несущую способность, сделать конструкцию более экономичной.

При изучении поведения многих инженерных конструкций (свай, основания нефтяных платформ и терминалов, башен и стрел башенных кранов) в качестве модели можно использовать конусообразные балки. Как правило, такие конструкции подвержены динамическим воздействиям (ветровым нагрузкам, ударам волн и др.), поэтому при их проектировании необходимо знать нелинейные собственные частоты колебаний.

Построению теории колебаний балок и решению прикладных задач посвящено большое количество работ (см., например, [1–3]).

При интенсивных динамических воздействиях амплитуды колебаний балки являются большими. В этом случае представляет интерес сравнение результатов, полученных с использованием линейных и нелинейных теорий. Многими исследователями с использованием нелинейных моделей определялись частоты колебаний балок с различными поперечными сечениями [4]. При решении инженерных задач строятся дифференциальные уравнения, позволяющие адекватно описать динамическое поведение системы. Существующие математические методы позволяют с использованием этих уравнений, являющихся обыкновенными дифференциальными уравнениями или дифференциальными уравнениями в частных производных, решить многие прикладные задачи, возникающие в различных областях машиностроения.

Современные технологии требуют обеспечить работу механизмов при больших скоростях и мощностях, а также их долговечность и надежность. С использованием линейных

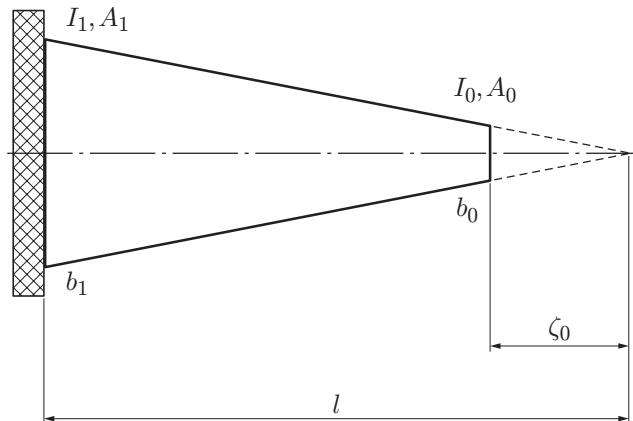


Рис. 1. Схема конусообразной балки

моделей эти задачи можно решить лишь в первом приближении. Использование линейных моделей не позволяет объяснить многие явления. Окружающий мир и человек по своей природе нелинейны, поэтому необходимо использовать нелинейные модели в форме обыкновенных дифференциальных уравнений, или дифференциальных уравнений в частных производных, или интегродифференциальных уравнений со стохастическими коэффициентами, зависящими от времени и учитывающими запаздывание. Однако такие модели находятся в стадии разработки.

В настоящее время существуют различные методы решения уравнений со слабой нелинейностью. Наиболее часто при этом используются методы Боголюбова — Митропольского [5], метод Линдстеда — Пуанкаре, метод возмущений [6], метод разложения по собственным формам [7] и др. В случае сильной нелинейности обычно применяются метод гармонического баланса [8], метод энергетического баланса (МЭБ) [9–12], метод гомотопного возмущения [13–21], метод Гамильтона [22–25], вариационный метод [26, 27], метод, основанный на амплитудно-частотной формулировке задачи [28–30], метод гомотопического анализа и вариационный метод одновременно [31, 32] и ряд других классических методов [33–40].

**1. Математическая модель.** На рис. 1 приведена схема исследуемой механической системы. Предполагается, что модуль упругости  $E$  и плотность материала балки постоянны, толщина и ширина балки изменяются в продольном направлении по линейному закону. Способ заделки торца балки моделируется пружиной, работающей на кручение, с жесткостью  $K_r$  и пружиной, работающей на растяжение-сжатие, с жесткостью  $K_t$ . Через  $A_1$ ,  $I_1$  обозначены площадь и момент инерции поперечного сечения на левом торце балки соответственно [41].

Инерцией вращения и деформациями поперечного сдвига пренебрегается, поскольку предполагается, что толщина балки мала по сравнению с ее длиной. Также предполагается, что балка совершает поперечные колебания в одной плоскости и их амплитуды могут быть большими.

Выражение для потенциальной энергии системы, являющейся суммой потенциальной энергии деформаций изгиба балки и энергии пружин с жесткостями  $K_r$ ,  $K_t$ , записывается в виде [41]

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^1 I(\xi) R^2 d\xi + \frac{1}{2} (K_r v'^2 + K_t v^2) \Big|_{\xi=1},$$

где  $R = \lambda\varphi'$  — кривизна нейтральной оси балки;  $\lambda = 1/l$ ;  $v$  — поперечный прогиб балки;  $\xi = s/l$ ; штрих означает производную по безразмерной переменной  $\xi$ ;  $\varphi$  — угол поворота поперечного сечения балки [41].

Нелинейное выражение для кривизны балки имеет вид

$$R^2 = \lambda^4(v''^2 + \lambda^2 v''^2 v'^2),$$

выражение для кинетической энергии  $T$  —

$$T = \frac{\rho l}{2} \int_0^1 A(\xi)[\dot{u}^2 + \dot{v}^2] d\xi,$$

где

$$u = \frac{1}{2} \int_0^\zeta \left( \lambda v'^2 + \frac{\lambda^3}{4} v'^4 \right) d\zeta —$$

уменьшение длины балки в продольном направлении, вызванное деформациями изгиба. Лагранжиан балки запишем в виде

$$L = T - V.$$

Для того чтобы разделить переменные, поперечный прогиб балки представим в виде

$$v(\zeta, t) = \varphi_i(\zeta)q(t),$$

где  $\varphi(\zeta)$  — нормированная самоподобная мода балки;  $q(t)$  — неизвестная функция времени, соответствующая моде  $\varphi_i(\zeta)$ . Для двухконусной балки функцию  $\varphi_i(\zeta)$  примем в виде

$$\varphi_i(\zeta) = \xi^{-1}[C_1 J_2(Z) + C_2 Y_2(Z) + C_3 I_2(Z) + C_4 K_2(Z)],$$

где  $J, Y$  — функции Бесселя первого и второго рода соответственно;  $I, K$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно; константы  $C_1, \dots, C_4$  определяются с учетом краевых условий на концах балки. Введем обозначения [41]

$$\beta_1 = \int_0^1 A^* \varphi^2 d\xi, \quad \beta_2 = \int_0^1 A^* \left( \int_0^\xi \varphi'^2 d\chi \right)^2 d\xi,$$

$$\beta_3 = \int_0^1 I^* \varphi''^2 d\xi + \frac{K_t L^3}{EI} \varphi^2(1) + \frac{K_r L}{EI} \varphi'^2(1), \quad \beta_4 = \int_0^1 I^* \varphi'^2 \varphi''^2 d\xi.$$

Здесь в случае двухконусной балки  $A_1^* = A_1 \xi^2$ ,  $I_1^* = I_1 \xi^4$ , в случае одноконусной —  $A_1 \xi$ ,  $I_1 \xi^3$  соответственно. Из уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

следует нелинейное одномодовое безразмерное уравнение движения

$$\beta_1 \ddot{q} + \beta_2 (q^2 \ddot{q} + q \dot{q}^2) + \beta_2 (\beta_3 q + 2\beta_4 q^3) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что коэффициенты  $\beta_i$  в уравнении (1) могут быть большими. Поэтому уравнение (1) масштабируется и записывается в виде [41]

$$(1 + \varepsilon_1 q^2) \frac{d^2 q}{dt^{*2}} + \varepsilon_1 q \left( \frac{dq}{dt^*} \right)^2 + q + \varepsilon_2 q^3 = 0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2\beta_4}{\beta_3}, \quad t^* = \sqrt{\frac{\beta_2\beta_3}{\beta_1}} t$$

( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — безразмерные коэффициенты).

Уравнение (2) описывает нелинейные плоские свободные изгибные колебания нерастяжимой балки. Осциллирующие системы характеризуются двумя существенными параметрами: частотой колебаний  $\omega$  и амплитудой колебаний  $A$ . Поэтому рассматриваются следующие начальные условия:

$$q(0) = A, \quad \frac{dq}{dt^*}(0) = 0. \quad (3)$$

**2. Вариационный метод (ВМ).** Функционал, соответствующий уравнению (2), можно получить с использованием полуобратного метода [27]:

$$J = \int_0^{2\pi/\omega} \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{2} q(t^*)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 q(t^*)^2 \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2 q(t^*)^4 \right) dt^*. \quad (4)$$

Приближенное решение будем искать в виде

$$q(t^*) = A \cos(\omega t^*). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получаем

$$J = -\frac{1}{8} A^4 \omega \pi \varepsilon_1 + \frac{3}{16} \frac{A^4 \pi \varepsilon_2}{\omega} - \frac{1}{2} A^2 \omega \pi + \frac{1}{2} \frac{A^2 \pi}{\omega}.$$

Используя метод Ритца  $\partial J / \partial A = 0$ , получаем соотношение между частотой и амплитудой

$$\omega_{\text{ВМ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3A^2 \varepsilon_2 + 4}{A^2 \varepsilon_1 + 2}}.$$

**3. Частотно-амплитудное соотношение (ЧАС).** Для решения нелинейных задач для нелинейных осцилляторов в работе [30] предложен метод, основанный на частотно-амплитудной формулировке задачи. В соответствии с этим методом в качестве пробных функций выбираются функции  $q_1(t^*) = A \cos(t^*)$ ,  $q_2(t^*) = A \cos(\omega t^*)$ . Подставляя  $q_1, q_2$  в уравнение (2), получаем выражения для невязок

$$R_1 = -(1 + \varepsilon_1 A^2 \cos(t^*)^2) A \cos(t^*) + \varepsilon_1 A^3 \cos(t^*) \sin(t^*)^2 + A \cos(t^*) + \varepsilon_2 A^3 \cos(t^*)^3; \quad (6)$$

$$R_2 = -(1 + \varepsilon_1 A^2 \cos(\omega t^*)^2) A \cos(\omega t^*) \omega^2 + \varepsilon_1 A^3 \cos(\omega t^*) \sin(\omega t^*)^2 \omega^2 + A \cos(\omega t^*) + \varepsilon_2 A^3 \cos(\omega t^*)^3. \quad (7)$$

Согласно работе [42] невязки (6), (7) заменяются взвешенными невязками

$$R_{11} = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/4} R_1 \cos(t^*) dt^*, \quad T_1 = 2\pi,$$

$$R_{22} = \frac{4}{T_2} \int_0^{T_2/4} R_2 \cos(\omega t^*) dt^*, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega},$$

для которых выполняется соотношение [42]

$$\frac{R_{22} - R_{11} \omega^2}{R_{22} - R_{11}} = \frac{-A(3A^2 \omega^2 \varepsilon_2 - 3A^2 \varepsilon_2 + 4\omega^2 - 4)/8}{-A(A^2 \omega^2 \varepsilon_1 - A^2 \varepsilon_1 + 2\omega^2 - 2)/4} = \omega^2.$$

В результате для частоты получаем приближенное выражение

$$\omega_{\text{ЧАС}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3A^2\varepsilon_2 + 4}{A^2\varepsilon_1 + 2}}.$$

**4. Метод Гамильтона (МГ).** В работе [11] для решения задач консервативных быстро осциллирующих систем предложен вариант энергетического метода, основанный на использовании гамильтониана и метода коллокаций. Гамильтониан уравнения (2) записывается в виде [22]

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{2} q(t^*)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 q(t^*)^2 \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2 q(t^*)^4. \quad (8)$$

При выводе гамильтониана (8) полагается, что при осцилляциях энергия системы не изменяется. Введем новую функцию [16]

$$\bar{H} = \int_0^{T/4} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{2} q(t^*)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 q(t^*)^2 \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2 q(t^*)^4 \right) dt^*, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial T} = \frac{1}{4} H. \quad (9)$$

Уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial (1/\omega)} \right) = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде

$$q(t^*) = A \cos(\omega t^*). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$-\frac{1}{8} A^3 \pi \varepsilon_1 \omega^2 - \frac{1}{4} A \pi \omega^2 + \frac{3}{16} A^3 \pi \varepsilon_2 + \frac{1}{4} A \pi = 0. \quad (12)$$

Из (12) находим приближенное выражение для частоты

$$\omega_{\text{МГ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3A^2\varepsilon_2 + 4}{A^2\varepsilon_1 + 2}}.$$

**5. Интегральный итерационный метод (ИИМ).** В соответствии с интегральным итерационным методом для уравнения (2) запишем следующую итерационную процедуру [26]:

$$q_{n+1} = -q_n - f \left( q_n, \frac{dq_n}{dt^*}, \frac{d^2 q_n}{dt^{*2}} \right). \quad (13)$$

Подставляя пробную функцию в (13) и дважды интегрируя, определяем  $q_{n+1}$ . При  $n = 0$  получаем

$$\frac{d^2 q_1}{dt^{*2}} = -\varepsilon_1 q_0 \left( \frac{dq_0}{dt^*} \right)^2 - q_0 - \varepsilon_2 q_0^3 - \varepsilon_1 q_0^2 \frac{d^2 q_0}{dt^{*2}}. \quad (14)$$

Выберем пробную функцию в виде

$$q_0(t^*) = A \cos(\omega t^*). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (14) и дважды интегрируя, находим

$$q_1 = \frac{A}{\omega^2} \left( -\frac{1}{2} A^2 \varepsilon_1 \omega^2 + \frac{3}{4} A^2 \varepsilon_2 + 1 \right) \cos(\omega t^*) + \frac{A^3}{\omega^2} \left( -\frac{\varepsilon_1}{18} \omega^2 + \frac{\varepsilon_2}{36} \right) \cos(3\omega t^*) + Ct^* + D,$$

где  $C, D$  — константы интегрирования, которые в силу периодичности решения полагаются равными нулю [26]. Приравнявая коэффициенты при  $\cos(\omega t^*)$  в выражениях для  $u_0$  и  $u_1$ , получаем приближенное выражение для частоты

$$\omega_{\text{ИИМ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3A^2\varepsilon^2 + 4}{A^2\varepsilon_1 + 2}}.$$

**6. Одновременное использование метода гомотопического анализа и вариационного метода (МГАВ).** В работе [31] для решения нелинейных задач для осциллирующих систем одновременно используются метод гомотопического анализа [13] и вариационный метод. В отличие от традиционных методов возмущения эти методы не требуют наличия в уравнении малого параметра. В соответствии с МГАВ строится гомотопия с параметром погружения  $p \in [0, 1]$ , так чтобы получить решение задачи при  $p = 0$ . Последующие приближения строятся с использованием вариационного метода, затем вычисляется частота нелинейного осциллятора. Для уравнения (2) строится следующая гомотопия:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^{*2}} q(t^*) + \omega^2 q(t^*) + p \left( \varepsilon_1 q(t^*)^2 \left( \frac{d^2}{dt^{*2}} q(t^*) \right) + \varepsilon_1 q(t^*) \left( \frac{d}{dt^*} q(t^*) \right)^2 + \right. \\ \left. + (1 - \omega^2) q(t^*) + \varepsilon_2 q(t^*)^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

При  $p = 0$  уравнение (16) является линейным уравнением  $d^2 q(t^*)/dt^{*2} + \omega^2 q(t^*) = 0$ , при  $p = 1$  превращается в исходное уравнение. Предположим, что периодическое решение уравнения (2) можно представить в виде ряда по степеням параметра  $p$ :

$$q(t^*) = q_0(t^*) + p q_1(t^*) + p^2 q_2(t^*) + \dots \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и собирая члены с одной и той же степенью  $p$ , получаем

$$p^0: \quad \omega^2 q_0(t^*) + \frac{d^2}{dt^2} q_0(t^*) = 0; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} p^1: \quad \frac{d^2}{dt^{*2}} q_1(t^*) + \varepsilon_2 q_0(t^*)^3 + \varepsilon_1 q_0(t^*)^2 \left( \frac{d^2}{dt^{*2}} q_0(t^*) \right) + \varepsilon_1 q_0(t^*) \left( \frac{d}{dt^*} q_0(t^*) \right)^2 + \\ + \omega^2 q_1(t) + q_0(t) - \omega^2 q_0(t) = 0. \end{aligned}$$

Решением уравнения (18) является функция  $q_0(t^*) = A \cos(\omega t^*)$ , где частота  $\omega$  определяется из решения вариационной задачи для  $q_1$ :

$$\begin{aligned} J(q_1) = \int_0^{2\pi/\omega} \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt^*} q_1(t^*) \right)^2 + \varepsilon_2 A^3 \cos(\omega t^*)^3 q_1(t^*) - \varepsilon_1 A^3 \cos(\omega t^*)^3 \omega^2 q_1(t^*) + \right. \\ \left. + \varepsilon_1 A^3 \cos(\omega t^*) \sin(\omega t^*)^2 \omega^2 q_1(t^*) + \frac{1}{2} \omega^2 q_1(t^*)^2 + A \cos(\omega t^*) q_1(t^*) - \right. \\ \left. - \omega^2 A \cos(\omega t^*) q_1(t^*) \right) dt^*. \end{aligned} \quad (19)$$

6.1. *Приближение первого порядка.* Выберем простую пробную функцию

$$q_1(t^*) = B_1 \left( \cos(\omega t^*) - \frac{1}{3} \cos(5\omega t^*) \right).$$

Подставляя  $q_1$  в (19), находим

$$J(\omega, B_1) = -\frac{1}{2} B_1 \omega \varepsilon_1 A^3 \pi + \frac{3}{4} \frac{B_1 \varepsilon_2 A^3 \pi}{\omega} - B_1 \omega A \pi + \frac{B_1 A \pi}{\omega} - \frac{4}{3} B_1^2 \omega \pi.$$

Решая уравнения

$$\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \omega} = 0,$$

для частоты получаем приближенное выражение

$$\omega_{\text{МГАВ}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3A^2 \varepsilon_2 + 4}{A^2 \varepsilon_1 + 2}}.$$

6.2. *Приближение второго порядка.* Точность решения в первом приближении можно существенно увеличить, выбрав пробную функцию в виде

$$q_1(t^*) = B_1 \left( \cos(\omega t^*) - \frac{1}{3} \cos(3\omega t^*) \right) + B_2 \left( \frac{1}{3} \cos(3\omega t^*) - \frac{3}{5} \cos(5\omega t^*) + \frac{5}{7} \cos(7\omega t^*) \right). \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получаем

$$J(\omega, B_1, B_2) = -\frac{3}{4} \omega A^3 \varepsilon \pi \rho B_1 - \frac{9}{28} \omega A^3 \varepsilon \pi \rho B_2 + \frac{3}{4} \frac{A^3 \varepsilon \pi B_1 \omega_0^2}{\omega} + \frac{1}{28} \frac{A^3 \varepsilon \pi B_2 \omega_0^2}{\omega} - \omega A \pi B_1 + \frac{A \pi B_1 \omega_0^2}{\omega} - 12 \omega \pi B_1^2 - 168 \omega \pi B_1 B_2 - \frac{28816}{49} \omega \pi B_2^2. \quad (21)$$

Используя условия стационарности функционала (21) [31]

$$\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial B_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \omega} = 0,$$

запишем приближение второго порядка для частоты:

$$\omega_{\text{МГАВ2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-(43\,034A^4 \varepsilon_1^2 + 253\,304A^2 \varepsilon_1 + 375\,056)(\alpha)}{21\,517A^4 \varepsilon_1^2 + 126\,652A^2 \varepsilon_1 + 187\,528}},$$

$$\alpha = 84\,843A^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 126\,652A^2 \varepsilon_1 + 250\,854A^2 \varepsilon_2 - 2\sqrt{\beta} + 375\,056,$$

$$\beta = (0,721\,698A^8 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + 2,156\,56A^6 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + 4,252\,91A^6 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + 1,611\,53A^4 \varepsilon_1^2 +$$

$$+ 12,710\,95A^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 6,294\,64A^4 \varepsilon_2^2 + 9,500\,32A^2 \varepsilon_1 + 18,816\,86A^2 \varepsilon_2 + 14,066\,70) \cdot 10^{10}.$$

**7. Результаты исследования и их обсуждение.** Сравним результаты, полученные с помощью рассмотренных методов, с результатами точного решения [1]. Уравнение (2) описывает поведение нелинейного осциллятора, являющегося консервативной системой. Интегрируя уравнение (2) и используя начальные условия (3), получаем

$$\frac{1}{2} (1 + \varepsilon_1 q^2) \left( \frac{dq}{dt^*} \right)^2 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2 q^4 = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_2 A^4. \quad (22)$$

Из (22) следует

$$\frac{dq}{dt^*} = \pm \left( \frac{2(A^2 - q^2) + \varepsilon_2(\varepsilon_1^4 - q^4)}{2(1 + \varepsilon_1 q^2)} \right)^{1/2}.$$

Значения частоты при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$  и различных значениях амплитуды

A	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$					$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$				
	$\omega_1$	$\omega_{\text{МГAB2}}$	$\omega_{\text{num}}$	$E_1$	$E_2$	$\omega_1$	$\omega_{\text{МГAB2}}$	$\omega_{\text{num}}$	$E_1$	$E_2$
0,01	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	0
0,05	1,0003	1,0004	1,0004	0,0100	0	1,0006	1,0008	1,0008	0,0077	0
0,10	1,0012	1,0016	1,0015	0,0257	0,0149	1,0025	1,0033	1,0031	0,0626	0,0183
0,50	1,0274	1,0375	1,0370	0,9255	0,0447	1,0488	1,0685	1,0682	1,8153	0,0245
1,00	1,0801	1,1169	1,1163	3,2408	0,0509	1,1180	1,1810	1,1802	5,2674	0,0711
5,00	1,2095	1,3688	1,3680	11,5841	0,0618	1,2169	1,3865	1,3855	12,1712	0,0708
10,00	1,2207	1,3960	1,3949	12,4858	0,0761	1,2227	1,4009	1,3998	12,6502	0,0773
20,00	1,2237	1,4034	1,4023	12,7342	0,0777	1,2242	1,4047	1,4036	12,7789	0,0752
50,00	1,2246	1,4055	1,4043	12,7977	0,0869	1,2247	1,4057	1,4047	12,8167	0,0730
100,00	1,2247	1,4058	1,4045	12,8014	0,0945	1,2247	1,4059	1,4049	12,8248	0,0696

Время, необходимое для изменения величины  $u$  от значения 0 до значения  $A$ , равно  $1/4$  точного периода  $T_{\text{exact}}(A)$ . Тогда

$$T_{\text{exact}}(A) = 4 \int_0^A \left( \frac{2(1 + \varepsilon_1 q^2)}{2(A^2 - q^2) + \varepsilon_2(\varepsilon_1^4 - q^4)} \right)^{1/2} dq,$$

следовательно, точное значение частоты равно

$$\omega_{\text{exact}} = 2\pi/T_{\text{exact}}.$$

Решения, получаемые с помощью вариационного метода, метода с использованием гамильтониана, метода, основанного на использовании частотно-амплитудного соотношения, интегрального вариационного метода, и приближение первого порядка, полученное при одновременном использовании методов гомотопического анализа и вариационного, практически совпадают. Далее эти решения называются аппроксимацией первого порядка. В работе [4] аналогичные результаты получены с помощью метода энергетического баланса. Установлено, что при любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  относительная погрешность равна

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\omega_1}{\omega_{\text{exact}}} = 0,866\ 03,$$

где  $\omega_1 = \omega_{\text{МЭБ}} = \omega_{\text{ВМ}} = \omega_{\text{ЧАС}} = \omega_{\text{ИИМ}} = \omega_{\text{МГAB}} = \omega_{\text{МГ}}$ .

Относительная погрешность аппроксимации второго порядка при любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  равна

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\omega_{\text{МГAB2}}}{\omega_{\text{exact}}} = 0,9992.$$

В таблице приведены значения частот, вычисленные с помощью изложенных выше методов и численного метода. Погрешность находим по формулам

$$E_1 = \frac{|\omega_1 - \omega_{\text{num}}|}{\omega_{\text{num}}} \cdot 100, \quad E_2 = \frac{|\omega_{\text{МГAB2}} - \omega_{\text{num}}|}{\omega_{\text{num}}} \cdot 100.$$

На рис. 2, 3 приведены зависимости частоты от амплитуды при различных значениях  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . На рис. 4 приведены аналитические зависимости  $q(t^*)$ , полученные различными методами. Видно, что различие между аналитической зависимостью второго порядка и зависимостью, полученной численным методом, пренебрежимо мало.

**Заключение.** В работе с использованием пяти различных аналитических методов, а также численного метода получены аппроксимации первого и второго порядков решения задачи об осцилляциях конусообразной заземленной консоли.



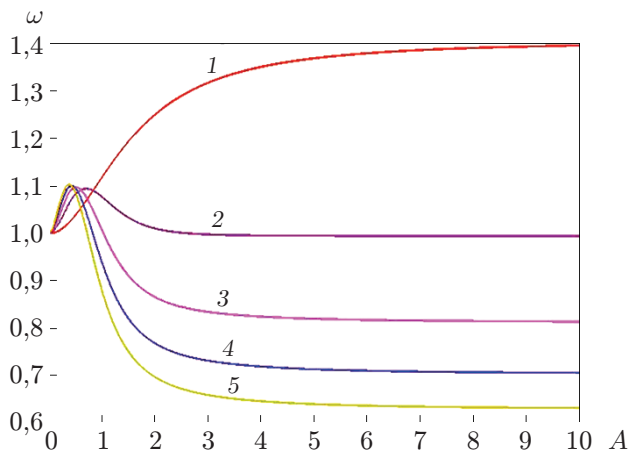


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость частоты от амплитуды при  $\varepsilon_2 = 1$  и различных значениях  $\varepsilon_1$ :

1 —  $\varepsilon_1 = 1$ , 2 —  $\varepsilon_1 = 2$ , 3 —  $\varepsilon_1 = 3$ , 4 —  $\varepsilon_1 = 4$ , 5 —  $\varepsilon_1 = 5$

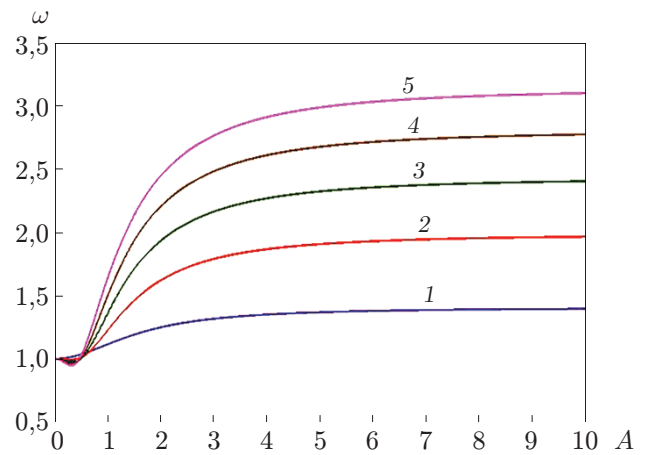


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость частоты от амплитуды при  $\varepsilon_1 = 1$  и различных значениях  $\varepsilon_2$ :

1 —  $\varepsilon_2 = 1$ , 2 —  $\varepsilon_2 = 2$ , 3 —  $\varepsilon_2 = 3$ , 4 —  $\varepsilon_2 = 4$ , 5 —  $\varepsilon_2 = 5$

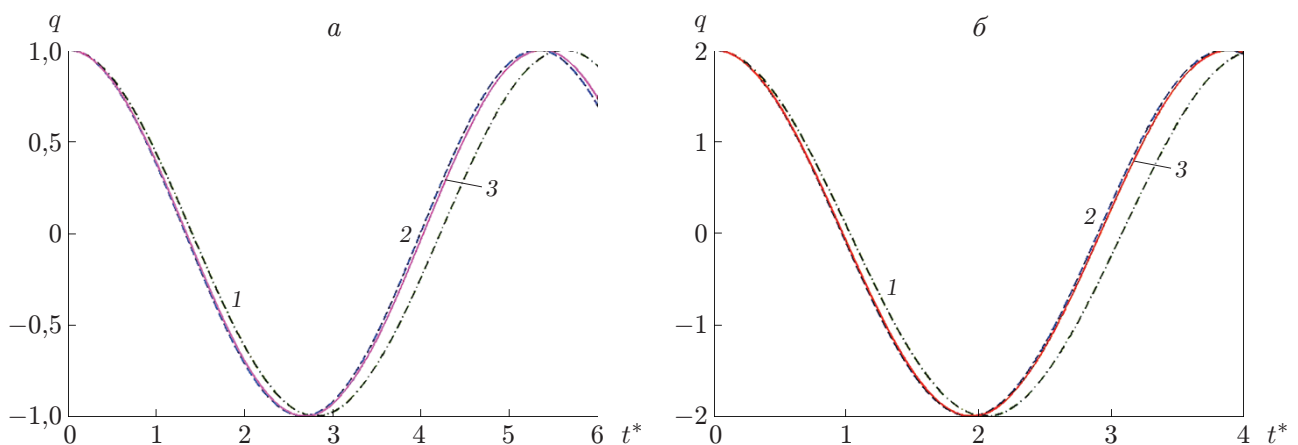


Рис. 4. Зависимость  $q(t^*)$  при  $A = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$  (а) и  $A = 2$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 2$  (б):

1 — первое приближение, 2 — второе приближение, 3 — численное решение

Показано, что решение данной задачи можно свести к решению системы нелинейных алгебраических уравнений и нелинейного дифференциального уравнения. Анализ полученных результатов показывает, что с помощью рассмотренных методов можно решать задачи об осцилляции сильнонелинейных систем. Одновременное использование метода гомотопического анализа и вариационного метода позволяет получать аппроксимации решения высокого порядка. Очевидно, что вариационные методы дают бóльшую свободу в выборе пробных функций и позволяют получить достоверную зависимость частоты от амплитуды. Аппроксимацию решения второго порядка можно получить при одновременном использовании метода гомотопического анализа и вариационного метода. В случае аппроксимации первого порядка результаты, полученные с использованием рассмотренных методов, практически совпадают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Rayleigh J. W. S.** The theory of sound. N. Y.: Dover Publ., 1877.
2. **Poincaré H.** Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. 3 v. N. Y.: Dover Publ., 1957.
3. **Timoschenko S.** Vibration problems in engineering / S. Timoschenko, D. H. Young, W. Weaver. N. Y.: Wiley, 1974.
4. **Karimpour S., Ganji S. S., Barari A., et al.** Nonlinear vibration of an elastically restrained tapered beam // *Sci. China*. 2012. V. 55, N 10. P. 1925–1930.
5. **Bogoliubov N.** Asymptotical methods in the theory of nonlinear oscillations / N. Bogoliubov, J. A. Mitropolski. Delhi: Hindustan Publ. Co., 1963.
6. **Nayfeh A. H.** Nonlinear oscillations / A. H. Nayfeh, D. T. Mook. N. Y.: Wiley, 1979.
7. **Bhattacharya R., Jainb P., Nair A.** Normal mode localization for a two degrees-of-freedom system with quadratic and cubic non-linearities // *J. Sound Vibrat.* 2002. V. 249. P. 909–919.
8. **Lai S. K., Lim C. W.** Nonlinear vibration of a two-mass system with nonlinear stiffnesses // *Nonlinear Dynamics*. 2007. V. 49. P. 233–249.
9. **Ganji D. D., Ranjbar Malidarreh N., Akbarzade M.** Comparison of energy balance period for arising nonlinear oscillator equations (He's energy balance period for nonlinear oscillators with and without discontinuities) // *Acta Appl. Math.* 2009. V. 108, N 2. P. 353–362.
10. **Mehdipour I., Ganji D. D., Mozaffari M.** Application of the energy balance method to nonlinear vibrating equations // *Current Appl. Phys.* 2010. V. 10. P. 104–112.
11. **He J. H.** Preliminary report on the energy balance for nonlinear oscillations // *Mech. Res. Comm.* 2002. V. 29, N 2/3. P. 107–111.
12. **Khan Y., Mirzabeigy A.** Improved accuracy of He's energy balance method for analysis of conservative nonlinear oscillator // *Neural Comput. Appl.* 2014. V. 25. P. 889–895.
13. **He J. H.** Homotopy perturbation technique // *Comput. Math. Appl. Mech. Engng.* 1999. V. 178, N 3/4. P. 257–262.
14. **He J. H.** A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems // *Intern. J. Nonlinear Mech.* 2000. V. 35, N 1. P. 115–123.
15. **Ganji D. D., Sadighi A.** Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations // *Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2006. V. 7, iss. 4. P. 411–418.
16. **Ganji D. D., Rafei M.** Solitary wave solutions for a generalized Hirota — Satsuma coupled KdV equation by homotopy perturbation method // *Phys. Lett. A*. 2006. V. 356, N 2. P. 131–137.
17. **Cveticanin L.** The homotopy-perturbation method applied for solving complex valued differential equations with strong cubic nonlinearity // *J. Sound Vibrat.* 2005. V. 285. P. 1171–1179.

18. **Cveticanin L.** Application of homotopy-perturbation to non-linear partial differential equations // *Chaos, Solitons Fractals*. 2009. V. 40, iss. 1. P. 221–228.
19. **Tari H., Su H.-J., Li T.-Y.** A constrained homotopy technique for excluding unwanted solutions from polynomial equations arising in kinematics problems // *Mech. Machine Theory*. 2010. V. 45, iss. 6. P. 898–910.
20. **Ariel P. D.** Extended homotopy perturbation method and computation of flow past a stretching sheet // *Comput. Math. Appl.* 2009. V. 58. P. 2402–2409.
21. **Fereidoon A., Rostamiyan Y., Akbarzade M., Ganji D. D.** Application of He's homotopy perturbation method to nonlinear shock damper dynamics // *Arch. Appl. Mech.* 2010. V. 80, N 6. P. 641–649.
22. **He J. H.** Hamiltonian approach to nonlinear oscillators // *Phys. Lett. A*. 2010. V. 374. P. 2312–2314.
23. **Durmaz S., Altay Demirbag S., Kaya M. O.** High order Hamiltonian approach to nonlinear oscillators // *Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2010. V. 11, iss. 8. P. 565–570.
24. **Yildirim A., Saadatnia Z., Askari H., et al.** Higher order approximate periodic solutions for nonlinear oscillators with the Hamiltonian approach // *Appl. Math. Lett.* 2011. V. 24. P. 2042–2051.
25. **Bayat M., Pakar I., Cveticanin L.** Nonlinear free vibration of systems with inertia and static type cubic nonlinearities: An analytical approach // *Mech. Machine Theory*. 2014. V. 77. P. 50–58.
26. **Akbarzade M., Khan Y.** Dynamic model of large amplitude non-linear oscillations arising in the structural engineering: Analytical solutions // *Math. Comput. Modelling*. 2012. V. 55. P. 480–489.
27. **Yildirim A., Askari H., KalamiYazdi M., Khan Y.** A relationship between three analytical approaches to nonlinear problems // *Appl. Math. Lett.* 2012. V. 25, N 11. P. 1729–1733.
28. **Akbarzade M., Farshidianfar A.** Application of the amplitude-frequency formulation to a nonlinear vibration system typified by a mass attached to a stretched wire // *Intern. Appl. Mech.* 2014. V. 50, N 4. P. 476. DOI: 10.1007/s10778-014-0650-x.
29. **Geng L., Cai X. C.** He's frequency formulation for nonlinear oscillators // *Europ. J. Phys.* 2007. V. 28. P. 923–931.
30. **He J. H.** An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nanomechanics in textile engineering // *Intern. J. Modern Phys. B*. 2008. V. 22, N 21. P. 3487–3578.
31. **Akbarzade M., Langari J.** Determination of natural frequencies by coupled method of homotopy perturbation and variational method for strongly nonlinear oscillators // *J. Math. Phys.* 2011. V. 52. 023518.
32. **Khan Y., Akbarzade M., Kargar A.** Coupling of homotopy and the variational approach for a conservative oscillator with strong odd-nonlinearity // *Sci. Iran. A*. 2012. V. 19, N 3. P. 417–422.
33. **Sardanyés J., Rodrigues C., Januário C., et al.** Activation of effector immune cells promotes tumor stochastic extinction: A homotopy analysis approach // *Appl. Math. Comput.* 2015. V. 252. P. 484–495.
34. **Khan Y., Sayevand K., Fardi M., Ghasemi M.** A novel computing multi-parametric homotopy approach for system of linear and nonlinear Fredholm integral equations // *Appl. Math. Comput.* 2014. V. 249. P. 229–236.
35. **Hassan H. N., El-Tawil M. A.** A new technique of using homotopy analysis method for second order nonlinear differential equations // *Appl. Math. Comput.* 2012. V. 219, iss. 2. P. 708–728.
36. **Marinca V., Herisanu N.** The optimal homotopy asymptotic method for solving Blasius equation // *Appl. Math. Comput.* 2014. V. 231. P. 134–139.

37. **Simos T. E.** Bessel and Neumann fitted methods for the numerical solution of the Schrödinger equation // *Comput. Math. Appl.* 2001. V. 42, iss. 6/7. P. 833–847.
38. **Jafarian A., Measoomy S., Abbasbandy S.** Artificial neural networks based modeling for solving Volterra integral equations system // *Appl. Soft Comput.* 2015. V. 27. P. 391–398.
39. **Ghayesh M. H., Alijani F., Darabi M. A.** An analytical solution for nonlinear dynamics of a viscoelastic beam-heavy mass system // *J. Mech. Sci. Technol.* 2011. V. 25, iss. 8. P. 1915–1923.
40. **Raja M. A. Z., Khan J. A., Siddiqui A. M., et al.** Exactly satisfying initial conditions neural network models for numerical treatment of first Painleve equation // *Appl. Soft Comput.* 2015. V. 26. P. 244–256.
41. **Abdel-Jaber M. S., Al-Qaisia A. A., Abdel-Jaber M., Beale R. G.** Nonlinear natural frequencies of an elastically restrained tapered beam // *J. Sound Vibrat.* 2008. V. 313. P. 772–783.
42. **He J. H.** Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations // *Intern. J. Modern Phys. B.* 2006. V. 20. P. 1141–1199.

*Поступила в редакцию 19/VIII 2015 г.,  
в окончательном варианте — 5/XI 2015 г.*

---