

AMS subject classification: 49J20, 65N30

Сверхсходимость и апостериорные оценки ошибки смешанных методов Равьяра–Тома порядка 1 для эллиптических задач управления с интегральным ограничением*

Т. Хоу

Hunan Key Laboratory for Computation and Simulation in Science and Engineering, Department of Mathematics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, Hunan, P.R.China

E-mail: htchb@163.com

Хоу Т. Сверхсходимость и апостериорные оценки ошибки смешанных методов Равьяра–Тома порядка 1 для эллиптических задач управления с интегральным ограничением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 2. — С. 185–199.

В данной статье мы исследуем свойство сверхсходимости и апостериорные оценки ошибки смешанных методов конечных элементов для линейной эллиптической задачи управления с интегральным ограничением. Состояние и сопряженное состояние аппроксимируются при помощи пространств смешанных конечных элементов Равьяра–Тома порядка $k = 1$, а переменная управления аппроксимируется кусочно-постоянными функциями. Аппроксимации оптимального управления непрерывной задачи оптимального управления будут построены путем проектирования дискретного сопряженного состояния. Доказывается, что эти аппроксимации имеют порядок сходимости h^2 . Кроме того, мы получаем апостериорные оценки ошибки как для переменной управления, так и для переменных состояния. И, наконец, для демонстрации наших теоретических результатов приводится численный пример.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, задачи оптимального управления, сверхсходимость, апостериорные оценки ошибки, смешанные методы конечных элементов, постобработка.

Hou T. Superconvergence and a posteriori error estimates of RT1 mixed methods for elliptic control problems with an integral constraint // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 2. — P. 185–199.

In this paper, we investigate the superconvergence property and a posteriori error estimates of mixed finite element methods for a linear elliptic control problem with an integral constraint. The state and co-state are approximated by order $k = 1$ Raviart–Thomas mixed finite element spaces, and the control variable is approximated by piecewise constant functions. Approximations of the optimal control of the continuous optimal control problem will be constructed by a projection of the discrete adjoint state. It is proved that these approximations have convergence order h^2 . Moreover, we derive a posteriori error estimates both for the control variable and the state variables. Finally, a numerical example is given to demonstrate the theoretical results.

Key words: elliptic equations, optimal control problems, superconvergence, a posteriori error estimates, mixed finite element methods, postprocessing.

1. Введение

Конечно-элементная аппроксимация играет важную роль в численной обработке задач оптимального управления. Обширные исследования проведены по сходимости и

*Работа поддержана Инновационным фондом провинции Хунань для аспирантов CX2010B247.

сверхсходимости конечно-элементных аппроксимаций задач оптимального управления (см., например, [1, 7, 12–16, 21–25]). Систематическое рассмотрение методов конечных элементов для дифференциальных уравнений в частных производных и задач оптимального управления можно найти, например, в [9, 18]. Следует отметить, что целью всех вышеупомянутых статей являются стандартные методы конечных элементов для оптимального управления.

По сравнению со стандартными методами конечных элементов смешанные методы конечных элементов имеют много преимуществ. Когда целевой функционал содержит градиент переменной состояния, мы выбираем прежде всего смешанные методы конечных элементов. Нами была выполнена некоторая работа, связанная с априорными оценками ошибки и свойствами сверхсходимости смешанных конечных элементов для задач оптимального управления [3, 4, 6]. В [4] автором использовался проекционный оператор постобработки, определенный Мейером и Решем (см. [21]) для доказательства квадратичной сверхсходимости управления с использованием смешанных методов конечных элементов. Недавно авторами [6] были получены оценки ошибки и сверхсходимость смешанных методов для выпуклых задач оптимального управления. Однако в этой статье порядок сходимости $h^{3/2}$, поскольку анализ ограничивался низкой регулярностью управления.

Целью данной статьи является получение свойства сверхсходимости и апостериорных оценок ошибки смешанной конечно-элементной аппроксимации линейной эллиптической задачи управления с интегральным ограничением. Сначала выводится свойство сверхсходимости между средней L^2 -проекцией и аппроксимацией переменной управления; здесь порядок сходимости h^2 вместо $h^{3/2}$, как в [6], что вызвано другим допустимым множеством. Затем, после решения полностью дискретизованной задачи оптимального управления, управление \hat{u} вычисляется путем проектирования сопряженного состояния z_h на стадии постобработки. Хотя аппроксимация дискретизованного решения — только порядка h , мы покажем, что эта постобработка улучшает порядок сходимости до h^2 . Так же мы получим апостериорные оценки ошибки как для переменной управления, так и для переменных состояния. И, наконец, мы приведем численный эксперимент для демонстрации практической значимости этих теоретических результатов по сверхсходимости.

Рассмотрим следующую линейную задачу оптимального управления для переменных состояния \mathbf{p} , y и управления u с интегральным ограничением

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|^2 + \frac{1}{2} \|y - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \right\} \quad (1.1)$$

с уравнением состояния

$$-\operatorname{div}(A(x)\operatorname{grad} y) = u, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

которое может быть записано как система первого порядка:

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = u, \quad \mathbf{p} = -A(x)\operatorname{grad} y, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

и граничное условие имеет вид

$$y = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.4)$$

где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^2 . U_{ad} обозначает допустимое множество для переменной управления, которое определяется так:

$$U_{\text{ad}} = \left\{ u \in L^\infty(\Omega) : \int_{\Omega} u \, dx \geq 0 \right\}. \quad (1.5)$$

Предположим, что $y_d \in H^1(\Omega)$ и $\mathbf{p}_d \in (H^1(\Omega))^2$, а ν — фиксированное положительное число. Коэффициент $A(x) = (a_{ij}(x))$ является симметрической матричной функцией с $a_{ij}(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, удовлетворяющей условию эллиптичности

$$c_* |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^2 \times \bar{\Omega}, \quad c_* > 0.$$

Статья построена следующим образом. В пункте 2 будет построена смешанная конечно-элементная аппроксимация для задачи оптимального управления (1.1)–(1.4) и представлены эквивалентные условия оптимальности. Основные результаты данной статьи содержатся в пунктах 3 и 4. В пункте 3 будут получены свойства сверхсходимости между средней L^2 -проекцией и аппроксимацией, а также между решением постобработки и точным решением управления. В пункте 4 будут изучены апостериорные оценки ошибки для задачи оптимального управления. В пункте 5 будет представлен численный пример для демонстрации наших теоретических результатов. В последнем пункте дается краткий обзор полученных результатов и приводятся некоторые возможные будущие их обобщения.

В данной статье мы используем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева на Ω с нормой $\|\cdot\|_{m,p}$, задаваемой $\|v\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$, и полунормой $|\cdot|_{m,p}$, задаваемой $|v|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p$. Положим $W_0^{m,p}(\Omega) = \{v \in W^{m,p}(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для $p = 2$ обозначим $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ и $\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_{m,2}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{0,2}$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h , где h — пространственный размер сетки для дискретизации управления и состояния.

2. Смешанные методы для задач оптимального управления

В этом пункте мы построим схему смешанной конечно-элементной аппроксимации задачи управления (1.1)–(1.4). Для простоты предположим, что область Ω представляет собой выпуклый многоугольник. Введем эллиптическое уравнение для сопряженного состояния

$$-\operatorname{div}(A(x)(\operatorname{grad} z + \mathbf{p} - \mathbf{p}_d)) = y - y_d, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

которое можно записать как систему первого порядка:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = y - y_d, \quad \mathbf{q} = -A(x)(\operatorname{grad} z + \mathbf{p} - \mathbf{p}_d), \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

и граничное условие имеет вид

$$z = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.3)$$

Пусть

$$\mathbf{V} = H(\operatorname{div} \Omega) = \{\mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2, \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}, \quad W = L^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Преобразуем (1.1)–(1.4) в следующую слабую форму: найти $(\mathbf{p}, y, u) \in \mathbf{V} \times W \times U_{\text{ad}}$ такие, что

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|^2 + \frac{1}{2} \|y - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \right\}, \quad (2.5)$$

$$(A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{v}) - (y, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.6)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}, w) = (u, w) \quad \forall w \in W. \quad (2.7)$$

Из [18] следует, что задача оптимального управления (2.5)–(2.7) имеет единственное решение (\mathbf{p}, y, u) и что триплет (\mathbf{p}, y, u) является решением (2.5)–(2.7), если и только если имеется сопряженное состояние $(\mathbf{q}, z) \in \mathbf{V} \times W$ такое, что $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z, u)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{v}) - (y, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.8)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}, w) = (u, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.9)$$

$$(A^{-1}\mathbf{q}, \mathbf{v}) - (z, \operatorname{div} \mathbf{v}) = -(\mathbf{p} - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.10)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{q}, w) = (y - y_d, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.11)$$

$$(\nu u + z, \tilde{u} - u) \geq 0 \quad \forall \tilde{u} \in U_{\text{ad}}, \quad (2.12)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

В [8] дано выражение для переменной управления. Используем этот же метод для получения следующего оператора:

$$u = (\max\{0, \bar{z}\} - z)/\nu, \quad (2.13)$$

где $\bar{z} = \int_{\Omega} z / \int_{\Omega} 1$ обозначает интегральное усреднение на Ω функции z .

Пусть \mathcal{T}_h обозначает регулярную триангуляцию многоугольной области Ω , h — диаметр T и $h = \max h_T$. Пусть $\mathbf{V}_h \times W_h \subset \mathbf{V} \times W$ — пространство смешанных конечных элементов Равьяра–Тома порядка $k = 1$, см. [11, 26], а именно,

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \quad \mathbf{V}(T) = \mathbf{P}_1(T) \oplus \operatorname{span}(x\mathbf{P}_1(T)), \quad W(T) = P_1(T),$$

где $P_1(T)$ — полиномы полной степени не больше 1, $\mathbf{P}_1(T) = (P_1(T))^2$, $x = (x_1, x_2)$ рассматривается как вектор, и

$$\mathbf{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V} : \forall T \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{V}(T)\}, \quad (2.14)$$

$$W_h := \{w_h \in W : \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h|_T \in W(T)\}. \quad (2.15)$$

Аппроксимированное пространство управления задается следующим образом:

$$U_h := \{\tilde{u}_h \in U_{\text{ad}} : \forall T \in \mathcal{T}_h, \tilde{u}_h|_T = \operatorname{const}\}. \quad (2.16)$$

Прежде чем дать смешанную конечно-элементную схему, введем два оператора. Прежде всего определим [11] стандартную $L^2(\Omega)$ -проекцию $P_h : W \rightarrow W_h$, удовлетворяющую для любого $\phi \in W$:

$$(P_h\phi - \phi, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.17)$$

$$\|\phi - P_h\phi\|_{0,\rho} \leq Ch^r \|\phi\|_{r,\rho}, \quad 1 \leq \rho \leq \infty, \quad \forall \phi \in W^{r,\rho}(\Omega), \quad r = 1, 2. \quad (2.18)$$

Теперь вспомним проекцию Фортэна $\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$ (см. [2, 11]), удовлетворяющую для любого $\mathbf{q} \in \mathbf{V}$:

$$(\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{q} - \mathbf{q}), w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.19)$$

$$\|\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q}\|_0 \leq Ch^r \|\mathbf{q}\|_r \quad \forall \mathbf{q} \in (H^r(\Omega))^2, \quad r = 1, 2, \quad (2.20)$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{q} - \Pi_h \mathbf{q})\|_0 \leq Ch^r \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|_r \quad \forall \operatorname{div} \mathbf{q} \in H^r(\Omega), \quad r = 1, 2. \quad (2.21)$$

Мы имеем следующее свойство диаграммы коммутативности:

$$\operatorname{div} \circ \Pi_h = P_h \circ \operatorname{div} : \mathbf{V} \rightarrow W_h \quad \text{и} \quad \operatorname{div}(I - \Pi_h)\mathbf{V} \perp W_h. \quad (2.22)$$

Здесь и далее I обозначает единичную матрицу.

Кроме того, определим также стандартную L^2 -ортогональную проекцию $Q_h : U_{\text{ad}} \rightarrow U_h$, удовлетворяющую для любого $u \in U_{\text{ad}}$:

$$(u - Q_h u, u_h) = 0 \quad \forall u_h \in U_h. \quad (2.23)$$

Мы имеем следующее свойство аппроксимации:

$$\|u - Q_h u\|_{-s,r} \leq Ch^{1+s} |\phi|_{1,r}, \quad s = 0, 1, \quad \forall u \in W^{1,r}(\Omega). \quad (2.24)$$

Тогда смешанная конечно-элементная дискретизация (2.5)–(2.7) имеет следующий вид: найти $(\mathbf{p}_h, y_h, u_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h \times U_h$ такое, что

$$\min_{u_h \in U_h} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d\|^2 + \frac{1}{2} \|y_h - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h\|^2 \right\}, \quad (2.25)$$

$$(A^{-1} \mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) - (y_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.26)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}_h, w_h) = (u_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \quad (2.27)$$

Задача оптимального управления (2.25)–(2.27) вновь имеет единственное решение (\mathbf{p}_h, y_h, u_h) , и триплет (\mathbf{p}_h, y_h, u_h) является решением (2.25)–(2.27), если и только если имеется сопряженное состояние $(\mathbf{q}_h, z_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h$, такое что $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h, u_h)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$(A^{-1} \mathbf{p}_h, \mathbf{v}_h) - (y_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.28)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}_h, w_h) = (u_h, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.29)$$

$$(A^{-1} \mathbf{q}_h, \mathbf{v}_h) - (z_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.30)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{q}_h, w_h) = (y_h - y_d, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.31)$$

$$(\nu u_h + z_h, \tilde{u}_h - u_h) \geq 0 \quad \forall \tilde{u}_h \in U_h. \quad (2.32)$$

Для вариационного неравенства (2.32) мы получаем следующий вывод.

Лемма 2.1. *Предположим, что z_h в вариационном неравенстве (2.32) известно. Тогда вариационное неравенство (2.32) имеет следующее решение:*

$$u_h = Q_h \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right), \quad \bar{z}_h = \frac{\int_{\Omega} z_h}{\int_{\Omega} 1}. \quad (2.33)$$

Доказательство. Доказательство делится на два этапа. Докажем, что $u_h \in U_h$ на первом этапе, а затем на втором этапе докажем, что u_h является решением вариационного неравенства.

Этап 1. Для любого $v \in U$ мы имеем

$$\int_{\Omega} (Q_h v - v) \psi = 0 \quad \forall \psi \in U_h. \quad (2.34)$$

Поскольку $\phi \equiv 1 \in U_h$, так что

$$\int_{\Omega} \left[Q_h \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) - \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) \right] = 0, \quad (2.35)$$

мы имеем

$$\int_{\Omega} u_h = \int_{\Omega} \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) = - \int_{\Omega} \frac{z_h}{\nu} + \int_{\Omega} \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \geq 0. \quad (2.36)$$

Таким образом, $u_h \in U_h$.

Этап 2. Отметим, что для каждого $v_h \in U_h$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_h + z_h/\nu)(v_h - u_h) &= \int_{\Omega} \left[Q_h \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) - \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) + \right. \\ &\quad \left. \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right] (v_h - u_h) = \int_{\Omega} \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} (v_h - u_h). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Мы видим, что если $\bar{z}_h \leq 0$, то

$$\int_{\Omega} (\nu u_h + z_h)(v_h - u_h) = 0, \quad (2.38)$$

и если $\bar{z}_h \geq 0$, то

$$\int_{\Omega} (\nu u_h + z_h)(v_h - u_h) \geq 0, \quad (2.39)$$

так как $\int_{\Omega} u_h = \int_{\Omega} \left(-\frac{z_h}{\nu} + \max \left\{ 0, \frac{\bar{z}_h}{\nu} \right\} \right) = 0$ и $\int_{\Omega} v_h \geq 0$.

Следовательно, было показано, что u_h является решением вариационного неравенства (2.32). \square

Далее в этой статье используем некоторые промежуточные переменные. Сначала для любой функции управления $\tilde{u} \in U_{\text{ad}}$ определим решение состояния $(\mathbf{p}(\tilde{u}), y(\tilde{u}), \mathbf{q}(\tilde{u}), z(\tilde{u})) \in (\mathbf{V} \times W)^2$, связанное с \tilde{u} , удовлетворяющее

$$(A^{-1} \mathbf{p}(\tilde{u}), \mathbf{v}) - (y(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.40)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}(\tilde{u}), w) = (\tilde{u}, w) \quad \forall w \in W, \quad (2.41)$$

$$(A^{-1} \mathbf{q}(\tilde{u}), \mathbf{v}) - (z(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}) = -(\mathbf{p}(\tilde{u}) - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.42)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{q}(\tilde{u}), w) = (y(\tilde{u}) - y_d, w) \quad \forall w \in W. \quad (2.43)$$

Затем определим дискретное решение состояния $(\mathbf{p}_h(\tilde{u}), y_h(\tilde{u}), \mathbf{q}_h(\tilde{u}), z_h(\tilde{u})) \in (\mathbf{V}_h \times W_h)^2$, связанное с \tilde{u} , удовлетворяющее

$$(A^{-1}\mathbf{p}_h(\tilde{u}), \mathbf{v}_h) - (y_h(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.44)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{p}_h(\tilde{u}), w_h) = (\tilde{u}, w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.45)$$

$$(A^{-1}\mathbf{q}_h(\tilde{u}), \mathbf{v}_h) - (z_h(\tilde{u}), \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{p}_h(\tilde{u}) - \mathbf{p}_d, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.46)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{q}_h(\tilde{u}), w_h) = (y_h(\tilde{u}) - y_d, w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \quad (2.47)$$

Таким образом, как мы и определили, точное решение и его аппроксимацию можно записать следующим образом:

$$(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z) = (\mathbf{p}(u), y(u), \mathbf{q}(u), z(u)), \quad (\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h) = (\mathbf{p}_h(u_h), y_h(u_h), \mathbf{q}_h(u_h), z_h(u_h)).$$

3. Сверхсходимость и постобработка

В данном пункте будет дан детальный анализ сверхсходимости. Затем в этом пункте переменная управления будет дискретизована при помощи кусочно-постоянных функций. Прежде всего вспомним следующие результаты по сходимости, которые очень важны для нашей работы. Аналогичные результаты были доказаны в [6].

Лемма 3.1. Пусть

$$(\mathbf{p}(\tilde{u}), y(\tilde{u}), \mathbf{q}(\tilde{u}), z(\tilde{u})) \in (\mathbf{V} \times W)^2 \quad \text{и} \quad (\mathbf{p}_h(\tilde{u}), y_h(\tilde{u}), \mathbf{q}_h(\tilde{u}), z_h(\tilde{u})) \in (\mathbf{V}_h \times W_h)^2$$

являются решениями (2.40)–(2.43) и (2.44)–(2.47) соответственно. Если промежуточные решения удовлетворяют

$$\mathbf{p}(\tilde{u}), \mathbf{q}(\tilde{u}) \in (H^2(\Omega))^2,$$

мы имеем

$$\|y(\tilde{u}) - y_h(\tilde{u})\| + \|\mathbf{p}(\tilde{u}) - \mathbf{p}_h(\tilde{u})\| \leq Ch^2, \quad (3.1)$$

$$\|z(\tilde{u}) - z_h(\tilde{u})\| + \|\mathbf{q}(\tilde{u}) - \mathbf{q}_h(\tilde{u})\| \leq Ch^2. \quad (3.2)$$

Модифицируя доказательство теоремы 4.1 в [6], мы получим следующую лемму.

Лемма 3.2. Пусть u — решение (2.8)–(2.12), а u_h — решение (2.28)–(2.32) соответственно. Предположим, что $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (H^2(\Omega))^2$ и $u \in H^1(\Omega)$. Тогда мы имеем

$$\|u - u_h\| \leq Ch. \quad (3.3)$$

Лемма 3.3. Пусть $(\mathbf{p}(Q_h u), y(Q_h u), \mathbf{q}(Q_h u), z(Q_h u))$ и $(\mathbf{p}(u), y(u), \mathbf{q}(u), z(u))$ являются решениями (2.40)–(2.43) при $\tilde{u} = Q_h u$ и $\tilde{u} = u$ соответственно. Предположим, что $u \in H^1(\Omega)$. Тогда мы имеем

$$\|y(u) - y(Q_h u)\| + \|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(Q_h u)\| \leq Ch^2, \quad (3.4)$$

$$\|z(u) - z(Q_h u)\| + \|\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(Q_h u)\| \leq Ch^2. \quad (3.5)$$

Доказательство. Из (1.2) и (2.1) соответственно получим следующие уравнения:

$$-\operatorname{div}(A \operatorname{grad}(y(Q_h u) - y(u))) = Q_h u - u, \quad (3.6)$$

$$-\operatorname{div}(A(\operatorname{grad}(z(Q_h u) - z(u)) + \mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u))) = y(Q_h u) - y(u). \quad (3.7)$$

Используя оценки регулярности и (2.24), мы получим

$$\|y(Q_h u) - y(u)\|_1 \leq C\|Q_h u - u\|_{-1} \leq Ch^2|u|_1. \quad (3.8)$$

Отметим, что $\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u) = -A \operatorname{grad}(y(Q_h u) - y(u))$. Таким образом, мы имеем

$$\|\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u)\| \leq C \|y(Q_h u) - y(u)\|_1 \leq Ch^2 |u|_1. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом, используя (3.8), мы получим

$$\begin{aligned} \|z(Q_h u) - z(u)\|_1 &\leq C \|\operatorname{div}(A(\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u))) + y(Q_h u) - y(u)\|_{-1} \\ &\leq C \|\operatorname{div}(A^2(\operatorname{grad}(y(Q_h u) - y(u))))\|_{-1} + C \|y(Q_h u) - y(u)\|_{-1} \\ &\leq C \|y(Q_h u) - y(u)\|_1 \leq Ch^2 |u|_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим, что

$$\mathbf{q}(Q_h u) - \mathbf{q}(u) = -A \operatorname{grad}(z(Q_h u) - z(u)) - A(\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u)). \quad (3.11)$$

Таким образом, используя (3.9) и (3.10), мы получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}(Q_h u) - \mathbf{q}(u)\| &= \|A(\operatorname{grad}(z(Q_h u) - z(u)) + \mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u))\| \\ &\leq C \|z(Q_h u) - z(u)\|_1 + C \|\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u)\| \leq Ch^2 |u|_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Следовательно, лемма 3.3 получается из (3.8)–(3.10) и (3.12). \square

Лемма 3.4. Пусть u — решение (2.8)–(2.12), а u_h — решение (2.28)–(2.32) соответственно. Предположим, что $\mathbf{p}(u_h), \mathbf{q}(u_h) \in (H^1(\Omega))^2$, $u \in H^1(\Omega)$. Тогда мы имеем

$$\|Q_h u - u_h\| \leq Ch^2. \quad (3.13)$$

Доказательство. Возьмем $\tilde{u} = u_h$ из (2.12) и $\tilde{u}_h = Q_h u$ из (2.32) для получения следующих двух неравенств:

$$(\nu u + z, u_h - u) \geq 0, \quad (3.14)$$

$$(\nu u_h + z_h, Q_h u - u_h) \geq 0. \quad (3.15)$$

Отметим, что $u_h - u = u_h - Q_h u + Q_h u - u$. Сложив (3.14) и (3.15), мы получим

$$(\nu u_h + z_h - \nu u - z, Q_h u - u_h) + (\nu u + z, Q_h u - u) \geq 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, используя (3.16), мы находим, что

$$\begin{aligned} \nu \|Q_h u - u_h\|^2 &= \nu(Q_h u - u_h, Q_h u - u_h) = \nu(Q_h u - u, Q_h u - u_h) + \nu(u - u_h, Q_h u - u_h) \\ &\leq (z_h - z, Q_h u - u_h) + (\nu u + z, Q_h u - u). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} (z_h - z, Q_h u - u_h) &= (z_h - z(u_h), Q_h u - u_h) + (z(u_h) - z(Q_h u), Q_h u - u_h) + \\ &\quad (z(Q_h u) - z(u), Q_h u - u_h). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Используя лемму 3.1 и лемму 3.3, получим

$$(z_h - z(u_h), Q_h u - u_h) \leq Ch^4 + \frac{\nu}{4} \|Q_h u - u_h\|^2 \quad (3.19)$$

$$(z(Q_h u) - z(u), Q_h u - u_h) \leq Ch^4 + \frac{\nu}{4} \|Q_h u - u_h\|^2. \quad (3.20)$$

Кроме того, мы можем доказать, что

$$(z(u_h) - z(Q_h u), Q_h u - u_h) = -\|y(Q_h u) - y(u_h)\|^2 - \|\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u_h)\|^2 \leq 0. \quad (3.21)$$

Из (2.13) мы знаем, что

$$\nu u + z = \max\{0, \bar{z}\} = \text{const}. \quad (3.22)$$

Таким образом, мы имеем

$$(\nu u + z, Q_h u - u) = (\nu u + z) \int_{\Omega} (Q_h u - u) = 0. \quad (3.23)$$

Объединив (3.17)–(3.21) с (3.23), мы получим (3.13). \square

Пусть $(\mathbf{p}(u_h), y(u_h), \mathbf{q}(u_h), z(u_h))$ и $(\mathbf{p}(Q_h u), y(Q_h u), \mathbf{q}(Q_h u), z(Q_h u))$ — решения (2.40)–(2.43) при $\tilde{u} = u_h$ и $\tilde{u} = Q_h u$ соответственно. Тогда мы получим следующие уравнения для ошибки:

$$(A^{-1}(\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u_h)), \mathbf{v}) - (y(Q_h u) - y(u_h), \text{div } \mathbf{v}) = 0, \quad (3.24)$$

$$(\text{div } (\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u_h)), w) = (Q_h u - u_h, w), \quad (3.25)$$

$$(A^{-1}(\mathbf{q}(Q_h u) - \mathbf{q}(u_h)), \mathbf{v}) - (z(Q_h u) - z(u_h), \text{div } \mathbf{v}) = -(\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u_h), \mathbf{v}), \quad (3.26)$$

$$(\text{div } (\mathbf{q}(Q_h u) - \mathbf{q}(u_h)), w) = (y(Q_h u) - y(u_h), w) \quad (3.27)$$

для любых $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и $w \in W$.

Из стандартного доказательства устойчивости и леммы 3.4 мы можем доказать следующую оценку.

Лемма 3.5. *Предположим, что все условия леммы 3.4 верны. Тогда мы имеем*

$$\|y(Q_h u) - y(u_h)\| + \|\mathbf{p}(Q_h u) - \mathbf{p}(u_h)\| \leq Ch^2, \quad (3.28)$$

$$\|z(Q_h u) - z(u_h)\| + \|\mathbf{q}(Q_h u) - \mathbf{q}(u_h)\| \leq Ch^2. \quad (3.29)$$

Объединив леммы 3.1, 3.3 и 3.5, мы можем получить результаты по сверхсходимости для состояния и сопряженного состояния.

Лемма 3.6. *Пусть $(\mathbf{p}, y, \mathbf{q}, z, u)$ и $(\mathbf{p}_h, y_h, \mathbf{q}_h, z_h, u_h)$ являются решениями (2.8)–(2.12) и (2.28)–(2.32) соответственно. Предположим, что все условия лемм 3.1, 3.3 и 3.5 верны. Тогда мы имеем*

$$\|y - y_h\| + \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\| \leq Ch^2, \quad (3.30)$$

$$\|z - z_h\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\| \leq Ch^2. \quad (3.31)$$

Лемма 3.7. *Предположим, что все условия леммы 3.4 верны и $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Пусть u и u_h являются решениями (2.8)–(2.12) и (2.28)–(2.32) соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|u - u_h\|_{0,\infty} \leq Ch. \quad (3.32)$$

Доказательство. Используя (2.24) и обратное неравенство, мы получим

$$\|u - u_h\|_{0,\infty} \leq C(\|u - Q_h u\|_{0,\infty} + \|Q_h u - u_h\|_{0,\infty}) \leq C(h\|u\|_{1,\infty} + h^{-1}\|Q_h u - u_h\|). \quad (3.33)$$

Объединив (3.33) и лемму 3.4, мы получим (3.32). \square

Кроме того, для повышения точности аппроксимации управления в глобальном масштабе, подобно случаю в [21], построим следующий оператор проекции постобработки дискретного сопряженного состояния на допустимое множество:

$$\hat{u} = (\max\{0, \bar{z}_h\} - z_h)/\nu. \quad (3.34)$$

Теперь мы можем доказать следующий результат глобальной сверхсходимости.

Теорема 3.1. *Предположим, что все условия леммы 3.6 верны. Пусть u — решение (2.8)–(2.12) и \hat{u} — функция, построенная в (3.34). Тогда мы имеем*

$$\|u - \hat{u}\| \leq Ch^2. \quad (3.35)$$

Доказательство. Из (2.13) и (3.34) мы получим

$$|u - \hat{u}| \leq C|z - z_h| + C|\bar{z} - \bar{z}_h|. \quad (3.36)$$

С использованием (3.36) и леммы 3.6 мы имеем

$$\|u - \hat{u}\| \leq C\|z - z_h\| \leq Ch^2. \quad (3.37)$$

Доказательство завершено. \square

4. Апостериорные оценки ошибки

В данном пункте будут даны апостериорные оценки ошибки переменных как управления, так и состояния и сопряженного состояния. Сначала получим апостериорные оценки ошибки для управления u .

Лемма 4.1. *Пусть u и u_h являются решениями (2.8)–(2.12) и (2.28)–(2.32) соответственно. Тогда мы имеем*

$$\|u - u_h\|^2 \leq C\{\eta_1^2 + \|z(u_h) - z_h\|^2\}, \quad (4.1)$$

где $\eta_1^2 = \sum_T \int_T (z_h - Q_h z_h)^2$.

Доказательство. Нам известно, что $Q_h u \in U_h$. Из (2.12) и (2.32) следует, что

$$\begin{aligned} \nu\|u - u_h\|^2 &= (\nu u + z, u - u_h) - (\nu u_h + z_h, u - u_h) + (z_h - z, u - u_h) \\ &\leq (\nu u_h + z_h, Q_h u - u) + (z_h - z(u_h), u - u_h) + (z(u_h) - z, u - u_h). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из леммы 2.1 мы имеем

$$(\nu u_h + z_h, Q_h u - u) = \sum_T \int_T (-Q_h z_h + \max(0, \bar{z}_h) + z_h)(Q_h u - u). \quad (4.3)$$

Так как $\int_T (Q_h u - u) = 0$, следовательно,

$$(\nu u_h + z_h, Q_h u - u) = \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)(Q_u - u). \quad (4.4)$$

Отметим, что $Q_h u_h = u_h$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)(Q_h u - u) &= \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)(Q_h(u - u_h) - (u - u_h)) \\ &\leq C \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)^2 + \frac{\nu}{3} \|u - u_h\|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для второго члена (4.2) получим

$$(z_h - z(u_h), u - u_h) \leq C \|z_h - z(u_h)\|^2 + \frac{\nu}{3} \|u - u_h\|^2. \quad (4.6)$$

Кроме того, легко убедиться, что

$$(z(u_h) - z, u - u_h) = -\|y - y(u_h)\|^2 - \|\mathbf{p} - \mathbf{p}(u_h)\|^2 \leq 0. \quad (4.7)$$

Подставив (4.5)–(4.7) в (4.2), мы имеем (4.1). \square

Из [5] получим следующие 4 леммы.

Лемма 4.2. Для элементов Равьяра–Тома имеется положительная постоянная C , зависящая только от A , Ω и формы элементов, такая что

$$\|\mathbf{p}(u_h) - \mathbf{p}_h\|_{\text{div}} + \|y(u_h) - y_h\| \leq C\eta_2, \quad (4.8)$$

где

$$\eta_2 := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{2T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} := \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|u_h - \text{div} \mathbf{p}_h\|_{0,T}^2 + h_T^2 \cdot \|\text{curl}(A^{-1} \mathbf{p}_h)\|_{0,T}^2 + h_T^2 \cdot \min_{w_h \in W_h} \|A^{-1} \mathbf{p}_h - \nabla_h w_h\|_{0,T}^2 + \|h_E^{\frac{1}{2}} J(A^{-1} \mathbf{p}_h \cdot \boldsymbol{\tau})\|_{0,\partial T}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 4.3. Для элементов Равьяра–Тома имеется положительная постоянная C , зависящая только от A , Ω и формы элементов, такая что

$$C\eta_2 \leq \|\mathbf{p}(u_h) - \mathbf{p}_h\|_{\text{div}} + \|y(u_h) - y_h\|. \quad (4.9)$$

Лемма 4.4. Для элементов Равьяра–Тома имеется положительная постоянная C , зависящая только от A , Ω и формы элементов, такая что

$$\|\mathbf{q}(u_h) - \mathbf{q}_h\|_{\text{div}} + \|z(u_h) - z_h\| \leq C(\eta_2 + \eta_3), \quad (4.10)$$

где η_2 определена в лемме 4.2, и

$$\eta_3 := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{3T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} := \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|y_h - y_d - \text{div} \mathbf{q}_h\|_{0,T}^2 + h_T^2 \cdot \|\text{curl}(A^{-1} \mathbf{q}_h + \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d)\|_{0,T}^2 + h_T^2 \cdot \min_{w_h \in W_h} \|A^{-1} \mathbf{q}_h + \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d - \nabla_h w_h\|_{0,T}^2 + \|h_E^{\frac{1}{2}} J((A^{-1} \mathbf{q}_h + \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_d) \cdot \boldsymbol{\tau})\|_{0,\partial T}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 4.5. Для элементов Равьяра–Тома имеется положительная постоянная C , зависящая только от A , Ω и формы элементов, такая что

$$C\eta_3 \leq \|\mathbf{q}(u_h) - \mathbf{q}_h\|_{\text{div}} + \|z(u_h) - z_h\|. \quad (4.11)$$

Пусть $(y(u), \mathbf{p}(u), z(u), \mathbf{q}(u))$ и $(y(u_h), \mathbf{p}(u_h), z(u_h), \mathbf{q}(u_h))$ являются решениями (2.40)–(2.43) при $\tilde{u} = u$ и $\tilde{u} = u_h$ соответственно.

Тогда мы имеем следующие уравнения для ошибки:

$$\begin{aligned} (A^{-1}(\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(u_h)), \mathbf{v}) - (y(u) - y(u_h), \operatorname{div} \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (\operatorname{div}(\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(u_h)), w) &= (u - u_h, w) \quad \forall w \in W, \\ (A^{-1}(\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(u_h)), \mathbf{v}) - (z(u) - z(u_h), \operatorname{div} \mathbf{v}) &= -(\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(u_h), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ (\operatorname{div}(\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(u_h)), w) &= (y(u) - y(u_h), w) \quad \forall w \in W. \end{aligned}$$

Из стандартной оценки устойчивости следует, что

$$\|y(u) - y(u_h)\| + \|\mathbf{p}(u) - \mathbf{p}(u_h)\|_{\operatorname{div}} \leq C\|u - u_h\|, \quad (4.12)$$

$$\|z(u) - z(u_h)\| + \|\mathbf{q}(u) - \mathbf{q}(u_h)\|_{\operatorname{div}} \leq C\|u - u_h\|. \quad (4.13)$$

Лемма 4.6. Пусть $(y, \mathbf{p}, z, \mathbf{q}, u)$ и $(y_h, \mathbf{p}_h, z_h, \mathbf{q}_h, u_h)$ являются решениями (2.8)–(2.12) и (2.28) – (2.32) соответственно. Тогда мы имеем

$$\eta_1^2 \leq C\{\|u - u_h\|^2 + \|z - z_h\|^2\}, \quad (4.14)$$

где η_1 определена в лемме 4.1.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)^2 &= \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)(z_h - z + z - Q_h z + Q_h z - Q_h z_h) \\ &\leq \sum_T \int_T (z_h - Q_h z_h)(z - Q_h z) + \frac{1}{3} \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)^2 + C\|z - z_h\|^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Так как $\nu u + z = \max(0, \bar{z}) = \operatorname{const}$, следовательно,

$$Q_h(\nu u + z) = \nu u + z, \quad (4.16)$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_T \int_T (z_h - Q_h z_h)(z - Q_h z) &= \sum_T \int_T (z_h - Q_h z_h)(z + \nu u - Q_h(z + \nu u) + \nu Q_h u - \nu u) \\ &= \sum_T \int_T (z_h - Q_h z_h)(Q_h(\nu u - \nu u_h) - \nu(u - u_h)) \\ &\leq \frac{1}{3} \sum_T \int_T (-Q_h z_h + z_h)^2 + C\|u - u_h\|^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поэтому

$$\eta_1^2 \leq C\{\|u - u_h\|^2 + \|z - z_h\|^2\}. \quad (4.18)$$

Это и есть (4.14). \square

Таким образом, объединим леммы 4.1–4.6 и (4.12)–(4.13) для получения следующего утверждения.

Теорема 4.1. Пусть $(y, \mathbf{p}, z, \mathbf{q}, u)$ и $(y_h, \mathbf{p}_h, z_h, \mathbf{q}_h, u_h)$ являются решениями (2.8)–(2.12) и (2.28)–(2.32) соответственно. Тогда мы имеем

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\text{div}} + \|y - y_h\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{\text{div}} + \|z - z_h\| + \|u - u_h\| \leq C \sum_{i=1}^3 \eta_i, \quad (4.19)$$

где η_1 определена в лемме 4.1, η_2 — в лемме 4.2, а η_3 — в лемме 4.4.

Следующий результат показывает, что полученная оценка теоремы 4.1 в действительности является эквивалентной.

Теорема 4.2. Пусть $(y, \mathbf{p}, z, \mathbf{q}, u)$ и $(y_h, \mathbf{p}_h, z_h, \mathbf{q}_h, u_h)$ — решения (2.8)–(2.12) и (2.28)–(2.32) соответственно. Тогда мы имеем

$$C \sum_{i=1}^3 \eta_i \leq \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_h\|_{\text{div}} + \|y - y_h\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_h\|_{\text{div}} + \|z - z_h\| + \|u - u_h\|. \quad (4.20)$$

5. Численные эксперименты

В этом пункте мы представим пример для иллюстрации наших теоретических результатов. Задачи оптимизации численно решались методами проекции градиента, а коды были разработаны на основе AFEPack [17]. Описание дискретизации дано в предыдущих пунктах: функция управления u была дискретизована при помощи кусочно-постоянных функций, тогда как состояние (y, \mathbf{p}) и сопряженное состояние (z, \mathbf{q}) были аппроксимированы при помощи смешанных конечно-элементных функций Равьяра–Тома порядка $k = 1$. В наших примерах мы используем область $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\nu = 1$ и $A = I$.

Пример. Рассмотрим следующую двумерную эллиптическую задачу оптимального управления:

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_d\|^2 + \frac{1}{2} \|y - y_d\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 \right\} \quad (5.1)$$

при условии уравнения состояния

$$\text{div } \mathbf{p} = f + u, \quad \mathbf{p} = -\text{grad } y, \quad (5.2)$$

где

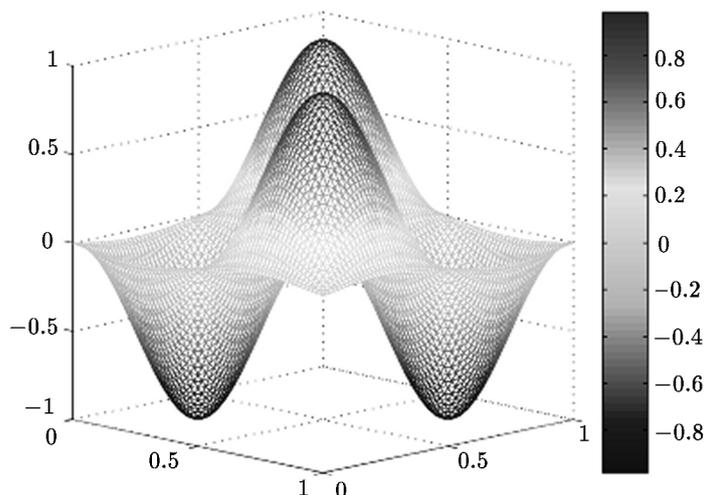
$$y = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad z = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \quad u = \max(0, \bar{z}) - z, \quad f = 2\pi^2 y - u, \quad (5.3)$$

$$y_d = y - 8\pi^2 z, \quad \mathbf{p}_d = - \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ \pi \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \end{pmatrix}.$$

В численной реализации мы выбираем решение u , удовлетворяющее $\int_{\Omega} u \, dx = 0$. В таблице даны ошибки $\|u - u_h\|$, $\|u - u_h\|_{0, \infty}$, $\|Q_h u - u_h\|$ и $\|u - \hat{u}\|$, полученные на последовательности нескольких однородно измельченных сеток. На рисунке показан профиль численного решения u на сетке 64×64 . Данные ясно иллюстрируют теоретические результаты.

Таблица. Ошибки примера на последовательных однородно измельченных сетках

Разрешение	$\ u - u_h\ $	$\ u - u_h\ _{0,\infty}$	$\ Q_h u - u_h\ $	$\ u - \hat{u}\ $
16×16	3.3645e-02	9.3612e-02	1.2693e-04	1.2772e-03
32×32	1.6784e-02	4.6928e-02	2.5716e-05	3.1227e-04
64×64	8.3706e-03	2.3774e-02	6.3452e-06	7.8143e-05
128×128	4.1906e-03	1.1693e-02	1.5668e-06	1.9687e-05

Рис. Профиль численного решения примера на треугольной сетке 64×64

6. Выводы

В данной статье мы обсуждали смешанные методы конечных элементов Равьяра-Тома порядка $k = 1$ для линейной эллиптической задачи оптимального управления (1.1)–(1.4). Мы получили некоторые результаты сверхсходимости смешанных методов конечных элементов для задачи управления, когда управление аппроксимировалось кусочно-постоянными функциями. Кроме того, мы получили апостериорные оценки ошибки как для переменной управления, так и для переменных состояния. В нашей дальнейшей работе мы будем исследовать сверхсходимость смешанных методов конечных элементов для задач оптимального управления с нелинейными эллиптическими уравнениями.

Литература

1. **Arada N., Casas E., and Tröltzsch F.** Error estimates for the numerical approximation of a semilinear elliptic control problem // *Comput. Optim. Appl.* — 2002. — № 23. — P. 201–229.
2. **Brezzi F., Fortin M.** *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* — New York: Springer-Verlag, 1991.
3. **Chen Y.** Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems // *Math. Comp.* — 2008. — Vol. 77, iss. 263. — P. 1269–1291.
4. **Chen Y.** Superconvergence of quadratic optimal control problems by triangular mixed finite elements // *Inter. J. Numer. Meths. Eng.* — 2008. — Vol. 75, iss. 8. — P. 881–898.
5. **Chen Y., Liu W.B.** A posteriori error estimates for mixed finite element solutions of convex optimal control problems // *J. Comp. Appl. Math.* — 2008. — № 211. — P. 76–89.
6. **Chen Y., Huang Y., Liu W.B., and Yan N.** Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems // *J. Sci. Comput.* — 2009. — Vol. 42, iss. 3. — P. 382–403.

7. **Chen Y., Dai Y.** Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations // *J. Sci. Comput.* — 2009. — Vol. 39. — P. 206–221.
8. **Chen Y., Yi N., and Liu W.B.** A Legendre Galerkin spectral method for optimal control problems governed by elliptic equations // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2008. — Vol. 46, iss. 5. — P. 2254–2275.
9. **Ciarlet P.G.** *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* — Amsterdam: North-Holland, 1978.
10. **Deng K., Chen Y., and Lu Z.** Higher order triangular mixed finite element methods for semilinear quadratic optimal control problems // *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.* — 2011. — Vol. 4, iss. 2. — P. 180–196.
11. **Douglas J., Roberts J.E.** Global estimates for mixed finite element methods for second order elliptic equations // *Math. Comp.* — 1985. — № 44. — P. 39–52.
12. **Falk F.S.** Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates // *J. Math. Anal. Appl.* — 1973. — № 44. — P. 28–47.
13. **Gunzburger M.D., Hou S.L.** Finite dimensional approximation of a class of constrained nonlinear control problems // *SIAM J. Control Optim.* — 1996. — № 34. — P. 1001–1043.
14. **Geveci T.** On the approximation of the solution of an optimal control problem governed by an elliptic equation // *RAIRO. Anal. Numer.* — 1979. — № 13. — P. 313–328.
15. **Hou L., Turner J.C.** Analysis and finite element approximation of an optimal control problem in electrochemistry with current density controls // *Numer. Math.* — 1995. — № 71. — P. 289–315.
16. **Knowles G.** Finite element approximation of parabolic time optimal control problems // *SIAM J. Control Optim.* — 1982. — № 20. — P. 414–427.
17. **Li R., Liu W.** — <http://circus.math.pku.edu.cn/AFEPack>.
18. **Lions J.L.** *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations.* — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
19. **Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.** *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* — New York: Academic Press, 1968.
20. **Lu Z., Chen Y.** L^∞ -error estimates of triangular mixed finite element methods for optimal control problems governed by semilinear elliptic equations // *Numer. Anal. Appl.* — 2009. — Vol. 12, iss. 1. — P. 74–86.
21. **Meyer C., Rösch A.** Superconvergence properties of optimal control problems // *SIAM J. Control Optim.* — 2004. — Vol. 43, iss. 3. — P. 970–985.
22. **Meyer C., Rösch A.** L^∞ -error estimates for approximated optimal control problems // *SIAM J. Control Optim.* — 2005. — Vol. 44, iss. 5. — P. 1636–1649.
23. **Meider D., Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part I: problems without control constraints // *SIAM J. Control Optim.* — 2008. — Vol. 47, iss. 3. — P. 1150–1177.
24. **Meider D., Vexler B.** A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems. Part II: problems with control constraints // *SIAM J. Control Optim.* — 2008. — Vol. 47, iss. 3. — P. 1301–1329.
25. **McKight R.S., Borsarge J.** The Rite–Galerkin procedure for parabolic control problems // *SIAM J. Control Optim.* — 1973. — № 11. — P. 510–542.
26. **Raviart P.A., Thomas J.M.** *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. Mathematical aspects of the finite element method.* — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1977. — (Lect. Notes Math.; 606.)

Поступила в редакцию 17 октября 2011 г.

