

Расчеты, выполненные по модели [5], дают близкие [1] результаты. Автор благодарит В. И. Букреева и Г. А. Хабахпашева за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koop C. G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 112.
2. Keulegan G. H. Gradual damping of solitary waves // J. Res. Nat. Bur. Stand.— 1948.— V. 40, N 6.
3. Leone C., Segur H., Hammack J. L. Viscous decay of long internal solitary waves // Phys. Fluids.— 1982.— V. 25, N 6.
4. Хабахпашев Г. А. Влияние вязкости на эволюцию возмущений свободной поверхности и границы раздела двухслойной жидкости // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью.— Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985.
5. Segur H., Hammack J. L. Soliton models of long internal waves // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 118.
6. Букреев В. И., Гаврилов Н. В., Знобищев К. Р. Экспериментальное исследование волн в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 64.
7. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.

Поступила 24/IV 1987 г.

УДК 532.516

О ВЕТВЛЕНИИ СТАЦИОНАРНО БЕГУЩИХ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

Ю. Я. Трифионов, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

В [1] получена модельная система уравнений, описывающая поведение длинноволновых возмущений на вертикально стекающей пленке жидкости при умеренных расходах:

$$(1) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + 1,2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = - \frac{3\nu q}{h^2} + g\dot{h} + \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Здесь q — мгновенный расход жидкости в сечении x ; h — мгновенная толщина пленки; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ν — коэффициент кинематической вязкости; ρ — плотность жидкости. Как показано в [2—4], она имеет два семейства решений в виде стационарно бегущих волн $h = h_0(\xi)$, $q = q_0(\xi)$, $\xi = x - ct$, количественно хорошо согласующихся с экспериментом [5] (c — фазовая скорость волны). Так как в эксперименте волны, близкие к стационарным, наблюдаются лишь на начальном ограниченном участке течения, а в дальнейшем развиваются и разваливаются, то для понимания этой эволюции течения необходимо исследовать вопрос об устойчивости и бифуркациях полученных решений системы (1).

Впервые устойчивость первого семейства волн (ответвляется от плоскопараллельного течения) изучалась в [6] при $Re \geq 30$. В [7] рассматривалась устойчивость слабо-нелинейных решений уравнения, описывающего волновые режимы при $Re \leq 1$. В [8, 9] систематично исследована устойчивость обоих семейств, а в [10] — бифуркация удвоения периода первого семейства волн. В данной работе проведен более общий бифуркационный анализ волн этого семейства и изучены новые семейства стационарных волн, сформировавшиеся в процессе нелинейного развития неустойчивых возмущений. Так как метод, изложенный в [8, 9], наряду с исследованием устойчивости позволяет проводить и бифуркационный анализ, то необходимо воспроизвести основные моменты из постановки задачи по устойчивости.

Предварительно обезразмеривая систему (1) аналогично [3, 4] и подставляя в нее

$$(2) \quad h(\xi, t) = h_0(\xi) + h'(\xi, t), \quad q(\xi, t) = q_0(\xi) + q'(\xi, t),$$

после линеаризации для исследования устойчивости решений $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$ получаем систему линейных уравнений в частных производных с перио-

дическими по ξ коэффициентами, решения которой представим в виде

$$(3) \quad \begin{pmatrix} h(\xi, t) \\ q(\xi, t) \end{pmatrix} = e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} h_1(\xi) \\ q_1(\xi) \end{pmatrix} + \text{к.с.}$$

(к. с. — комплексно-сопряженное выражение).

Решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $h_1(\xi)$, $q_1(\xi)$, ограниченные при всех ξ , по теореме Флоке имеют вид

$$(4) \quad \begin{pmatrix} h_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = e^{i\alpha Q \xi} \begin{pmatrix} \varphi(\xi) \\ \psi(\xi) \end{pmatrix},$$

где φ , ψ — периодические функции того же периода, что и $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$; Q — вещественный параметр. После всех подстановок для определения спектра собственных значений γ и соответствующих собственных функций φ , ψ приходим к системе

$$(5) \quad \begin{aligned} A\psi + B \frac{d\psi}{d\xi} + P\varphi - D \frac{d\varphi}{d\xi} - 9i\alpha Q h_0 \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - 3h_0 \frac{d^3\varphi}{d\xi^3} &= \gamma\psi, \\ i\alpha Q \psi + \frac{d\psi}{d\xi} - i\alpha Q c \varphi - c \frac{d\varphi}{d\xi} &= \gamma\varphi. \end{aligned}$$

Здесь $A = 2,4 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{q_0}{h_0} \right) + \frac{Z}{h_0^2} + i\alpha Q \left(2,4 \frac{q_0}{h_0} - c \right)$; $B = 2,4 \frac{q_0}{h_0} - c$;

$$P = - \left(1,2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{q_0^2}{h_0^2} \right) + F + 2Z \frac{q_0}{h_0^3} + 3 \frac{d^3 h_0}{d\xi^3} \right) - 1,2i\alpha Q \frac{q_0^2}{h_0^2} + 3i\alpha^3 Q^3 h_0;$$

$$D = 1,2 \frac{q_0^2}{h_0^2} - 9i\alpha^2 Q^2 h_0;$$

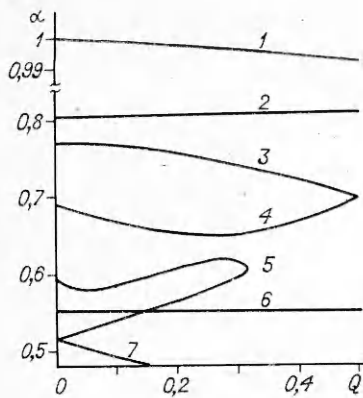
Z , F — параметры течения: $Z = (3We/Re^2)^{1/2}$, $F = (We/3Fr^2)^{1/2}$; $Re = \langle q_0 \rangle / \nu$ — число Рейнольдса; $We = \sigma \langle h_0 \rangle / (\rho \langle q_0 \rangle^2)$ — число Вебера; $Fr = \langle q_0 \rangle^2 / (g \langle h_0 \rangle^3)$ — число Фруда; скобки $\langle \rangle$ — среднее значение по длине волны.

Таким образом, исследование устойчивости стационарных волновых режимов $h_0(\xi)$, $q_0(\xi)$ сводится к изучению спектра собственных значений γ для различных Q , при которых система (5) имеет периодические решения того же периода λ . Воля устойчива, если для любого Q все $\text{Real}(\gamma) \geq 0$. Из (4) ясно, что достаточно ограничиться изменением Q на любом единичном интервале, например на $[-0,5; 0,5]$. Проводя над (5) операцию комплексного сопряжения, нетрудно убедиться, что $\gamma(Q) = \bar{\gamma}(-Q)$. Поэтому достаточно рассмотреть решения (5) для $0 \leq Q \leq 0,5$. Из (2)–(4) вытекает, что если в некоторой точке (α, Q) реальная часть какого-нибудь собственного значения обращается в нуль, то от исходного неответляется новый волновой режим. При этом возможно рождение как нестационарных (если $\text{Image}(\gamma) \neq 0$), так и новых стационарных (если $\text{Image}(\gamma) = 0$) режимов. Если $Q = P/r$ — рациональное число, то образуется периодический по ξ режим с $\alpha_{\text{нов}} = \alpha/r$. Если Q — иррациональное число, то рождается двухпериодический режим.

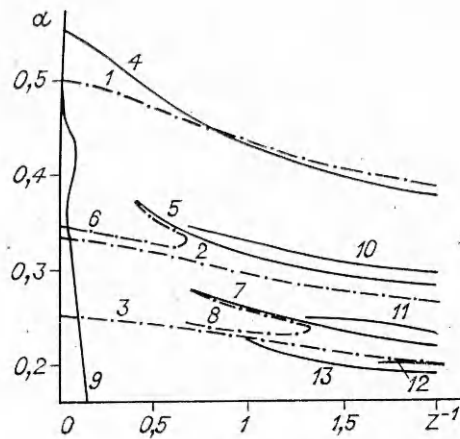
Используемые переменные таковы, что для любых значений параметра Z волновые периодические режимы первого семейства ответвляются от плоскопараллельного течения при значении волнового числа $\alpha = 1$. Это семейство при каждом Z продолжается в область меньших α и в пределе $\alpha \rightarrow 0$ переходит в отрицательные солитоны [2–4, 10]. В дальнейшем, говоря о новых решениях, бифурцирующих от него, не будем напоминать, что при этих же α и Z существует также и решение, принадлежащее самому порождающему семейству.

Итак, в пространстве параметров Z , α , Q стационарные режимы будут ответвляться в точках, лежащих на поверхностях

$$(6) \quad \gamma(\alpha, Z, Q) = 0.$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Сечения первых трех поверхностей (6) (первая поверхность имеет большие волновые числа) плоскостью $Z = 10$ представлены на рис. 1 кривыми 1, 2, 6. В точках на кривых 3–5, 7 возникают нестационарные режимы, на них $\text{Real}(\gamma) = 0$, $\text{Image}(\gamma) \neq 0$. Отметим, что для этого Z волны первого семейства устойчивы к возмущениям того же периода ($Q = 0$) на интервале $0,518 \leq \alpha \leq 1$, а область устойчивости к возмущениям с $Q \neq 0$ лежит между кривыми 2 и 3. Ясно, что интервал устойчивости ко всем возмущениям $-0,765 \leq \alpha \leq 0,82$.

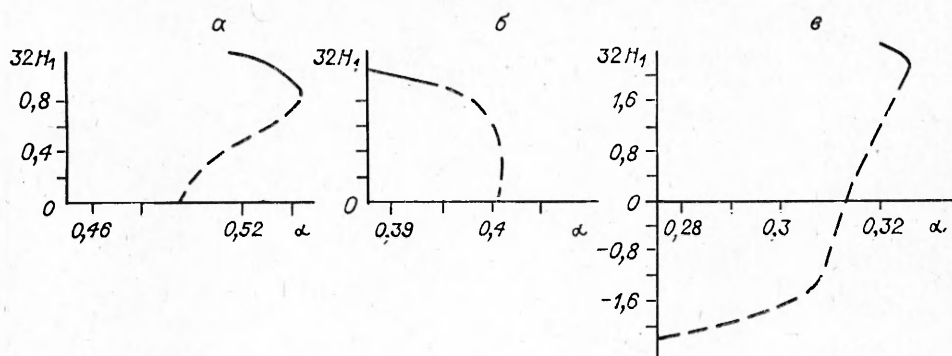
В данной работе ограничимся рассмотрением только стационарных волн. Для рис. 1 новые стационарно бегущие волновые режимы с наибольшими волновыми числами будут возникать при ветвлении решений от кривой 1 в точках с $Q = 1/2, 1/3, 1/4$. Для разных Z эти наибольшие волновые числа приведены на рис. 2 линиями 1–3 соответственно.

Лучше представить характер ветвления позволяет рис. 3. Здесь даны амплитуды первой гармоники возникающей волны в зависимости от α при удалении от места бифуркации. Для рис. 3, а, б ($Z^{-1} = 0,1$ и $Z^{-1} = 1,6$) точки бифуркации лежат на кривой 1 рис. 2, для рис. 3, в ($Z^{-1} = 0,6$) — на кривой 2. Бифуркация на кривой 1 односторонняя. Для всех рассмотренных Z ($Z^{-1} \leq 2$) решение сначала продолжается в сторону больших α , затем, достигнув линии возврата (на рис. 2 не показана), оно смещается в область меньших α . В момент зарождения это семейство неустойчиво даже по отношению к возмущениям той же периодичности ($Q = 0$). Смена характера устойчивости к таким возмущениям происходит по достижении линии 4. На рис. 3 соответствующие такой неустойчивости решения представлены штриховыми частями кривых.

В [10] при рассмотрении некоторых бифуркаций удвоения периода порождающее решение первого семейства бралось аналитически в виде суммы двух первых гармоник. Нахождение точек бифуркации сводилось к определению действительных корней квадратного уравнения. При таком подходе оказалось, что (применительно к нашим обозначениям) при $Z^{-1} > Z_*^{-1} \sim 1$ бифуркационное уравнение действительных корней не имеет — ветвления исходного решения нет. Расхождение с нашими расчетами, по-видимому, связано с тем, что в этой области параметров порождающее решение не очень точно представлять двумя гармониками.

В отличие от кривой 1, возникающей с линии первой поверхности (6) $\gamma(\alpha, Z, 1/2) = 0$, на кривой 2 имеет место двухсторонняя по α бифуркация. Эта ситуация характерна и для остальных кривых (в том числе и кривой 3 рис. 2), отвечающих рациональным числам $Q = P/r$.

Полученные в окрестности кривых 1–3 новые решения продолжались по непрерывности на всю рассматриваемую область изменения параметров: $\alpha \geq 0,15$; $0,5 < Z < 100$. Расчеты показали, что существует сложная взаимосвязь между этими решениями. На плоскости параметров



Р и с. 3

α , Z^{-1} они образуют многоскладчатую и многолистную поверхность. Так, если продолжать по непрерывности решение, возникающее на линии 1, фиксируя при этом значение Z , то при любом Z можно пройти до самых малых значений α , которые рассматривались в данных расчетах. Причем у значений Z , не являющихся общими для кривых 5 и 6 ($Z^{-1} \neq 0,4 \dots 0,68$), будем получать одно решение при каждом α . В области $0,4 \leq Z^{-1} \leq 0,68$ между кривыми 5 и 6 решение образует складку — двигаясь вниз при α , оно достигает линии 6, затем возвращается до линии 5 и снова идет в область малых α .

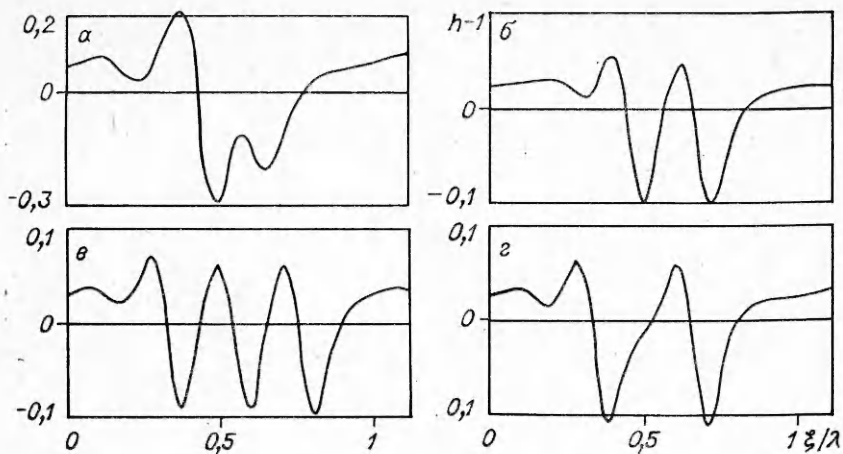
Если теперь, зафиксировав α из области существования кривой 5 ($0,284 \leq \alpha \leq 0,373$), начать двигаться по решению от $Z^{-1} < 0,4$ в сторону больших Z^{-1} , то, если наша прямая $\alpha = \text{const}$ пересекает и линию 6, мы, пройдя уже описанную выше складку (кривая 5 — кривая 6), остаемся на том же самом решении — увеличивая теперь и α и Z^{-1} , можно снова выйти на линию 1.

Если же двигаться по $\alpha = \text{const}$, не пересекающей с кривой 6, то кривая 5 по-прежнему остается линией возврата, но теперь решение продолжается только до кривой 2. Таким образом, оказалось, что решение, порождаемое кривой 1, непрерывно переходит в одно из двух бифуркационных решений, возникающих от первого семейства с параметром $Q = 1/3$ по кривой 2, а именно в то, которое при фиксированном значении Z ответвляется в сторону больших α .

Если при $Z = \text{const}$ продолжать по непрерывности решение, ответвляющееся от кривой 2 в сторону больших α при $Z^{-1} < 0,68$, то оказывается, что, достигнув линии 6, оно поворачивает и может быть продолжено до малых α . Характер поворота от этой кривой демонстрируется, в частности, на рис. 3 в поведении решения в окрестности $\alpha \approx 0,325$. Интересно отметить, что, если теперь после заворота от кривой 6 двигаться по решению, увеличивая α и Z^{-1} , но не пересекая эту кривую вторично, снова можно дойти до кривой 1. Если же двигаться от кривой 2 при $Z^{-1} > 0,68$, то, дойдя до линии 5, повернем в сторону меньших α . Теперь ситуация во многом аналогична той, которая имела место при ветвлении от кривой 1. Это решение также продолжаемо для любого Z и имеет складку при $0,75 \leq Z^{-1} \leq 1,33$ между кривыми 7 и 8. Кривая 7 аналогична кривой 5 — если подходить к ней снизу, то после возврата от нее мы или попадем в складку и, отразившись от кривой 8, продолжим движение по тому же решению, или непрерывно перейдем на одно из двух решений, бифурцирующих от первого семейства с $Q = 1/4$ по кривой 3.

Второе решение, возникающее по кривой 2, для всех рассмотренных значений Z^{-1} сразу монотонно продолжается в область малых α . На рис. 4, а показан волновой профиль этого решения с $\alpha = 0,2$ для $Z^{-1} = 0,6$. Аналогичным образом ведет себя и второе решение кривой 3.

Таким образом, для всех точек кривой 2 решение, ответвляющееся в сторону больших α , сливается, хотя и сложным образом, с решением, ответвляющимся по кривой 1. В области, ограниченной кривыми 5, 6, 2,



Р и с. 4

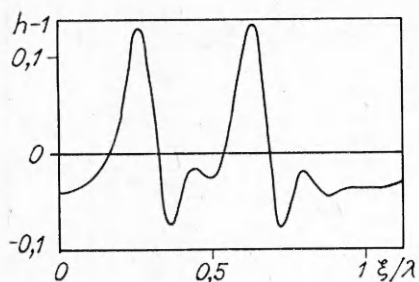
существует сразу три решения, она является своеобразной комбинацией складки с разрезом.

Область, ограниченная кривыми 7, 8, 3, также представляет собой аналогичную складку-разрез. Отметим, что для α и Z из этой области имеется уже пять решений. Три из них аналогичны трем на предшествующей складке — они получены продолжением вниз по α от линии 5 и ветвлением от линии 3 вверх по α с последующим поворотом на кривых 6, 8, плюс два решения, продолжаемые от кривых 1, 2 вниз по α .

Таким образом, уже для первой из поверхностей (6) ветвления по линиям, отвечающим первым максимальным из интервала $[0; 0,5]$ рациональным Q , приводят к образованию целого множества новых стационарно бегущих решений, сложным образом связанных между собой. Эта сложность возрастает с уменьшением α , так как, с одной стороны, происходят сгущение линий бифуркаций (ср. расстояния между кривыми 1, 2 и 2, 3 на рис. 2) и сужение складок-разрезов, с другой — быстро возрастает число решений. Кроме того, при меньших α начинают проявлять себя другие поверхности (6), и на каждой из них порождается от первого семейства свое сложное множество решений.

Профили волн семейств, ответвляющихся от первого семейства, со второй поверхности (6) по линии 2 рис. 1 при $Q = 1/2$ и $Q = 1/3$ даны соответственно на рис. 4, б и в, а с третьей поверхности (6) по линии 6 рис. 1 при $Q = 1/2$ — на рис. 4, г (для них всех $\alpha = 0,2$, $Z = 10$). Это волновое число уже достаточно близко к нулю — при дальнейшем уменьшении α профили меняются слабо, в основном только растет доля практически горизонтальных участков ($h = \text{const}$). Поэтому можно ожидать, что в пределе ($\alpha \rightarrow 0$) эти решения перейдут в отрицательные солитоны соответственно с двумя или тремя впадинами.

Хотя всеобъемлющего анализа всех решений провести невозможно, с известной долей осторожности можно утверждать, что на первой бифуркационной поверхности (6) рождаются выделенные в смысле устойчивости решения. У них довольно широк диапазон волновых чисел, устойчивых к возмущениям с $Q = 0$. Так, на рис. 2 α лежат между кривыми 4 и 9, а в областях за складками — соответственно между кривыми 4 и 10, 5 и 11, 7 и 12, 13 и ниже. Выделенность этого множества решений выражается также и в том, что часть решений количественно хорошо согласуются, как показано, например, в [2—4], с экспериментальными данными. Именно они в пределе по α переходят в одnogорбые солитоны-возвышения, и у них есть также и области устойчивости ко всем возможным возмущениям [8, 9]. Семейства, возникающие с других поверхностей (6), судя по выборочным расчетам, неустойчивы к возмущениям того же периода при всех рассматриваемых α .



Р и с. 5

Описанная выше достаточно сложная иерархия решений, бифурцирующих от первого семейства, еще не полна, так как для них в свою очередь существуют поверхности (6), на которых проходит через нуль какое-нибудь из собственных значений γ и появляются новые решения.

На рис. 5 дан профиль волны одного из семейств, возникающих в результате такой вторичной бифуркации ($\alpha = 0,2, Z = 10$). По-видимому,

это решение имеет предельно двугорбый солитон-возвышение. Многогорбые солитоны для уравнения, описывающего возмущения на пленке при $Re \leq 1$, получены в [11]. Из сказанного ясно, что существуют также трех- и многократные бифуркации.

Стационарно бегущие волны разделяют пространство всех периодических решений на области с различным поведением. Проведенное исследование демонстрирует чрезвычайно сложную структуру стационарных решений уравнения (1). Поэтому, не зная ее, невозможно сколько-нибудь полно исследовать эволюцию периодических возмущений, так как для определенных значений α и Z небольшие изменения в начальных данных будут приводить со временем к большим отличиям между решениями. Ясно также, что наличие большого числа неустойчивых стационарных решений для достаточно малых α будет с большой долей вероятности обеспечивать стохастическое поведение возмущений для любых Z (соответственно любых Re).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1967.— № 1.
2. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 3.
3. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Нелинейные волны на поверхности пленки жидкости, стекающей по вертикальной стенке // ПМТФ.— 1985.— № 5.
4. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Волновые режимы в стекающих пленках жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободными поверхностями.— Новосибирск, 1985.
5. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // ИФЖ.— 1976.— Т. 30, № 5.
6. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1968.— № 2.
7. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.
8. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Устойчивость волн на вертикальной пленке жидкости // Математическое моделирование в науке и технике.— Пермь, 1986.
9. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. Стационарные двумерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости и их устойчивость // ИФЖ.— 1988.— Т. 54, № 1.
10. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых режимов в вязком слое // ПММ.— 1984.— Т. 48, № 4.
11. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободными поверхностями.— Новосибирск, 1985.

Поступила 28/IV 1987 г.