

УДК 539.2; 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОГО ГРАФЕНОВОГО ЛИСТА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ВНЕШНИХ СИЛ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ

М. Пан, Ю. Фан, Ю. Ц. Чзан

Колледж гражданского строительства и архитектуры Чжэцзянского университета,
310058 Ханчжоу, Китай
E-mails: ppmzju@163.com, 11412071@zju.edu.cn, cyqzhang@zju.edu.cn

С использованием нелокальной градиентной теории деформации исследуются поперечные колебания вязкоупругого листа при воздействии плоского магнитного поля и внешних сил. Получено уравнение поперечных колебаний графенового листа и построены решения, описывающие затухающие и незатухающие поперечные колебания. В рамках нелокальной градиентной теории деформаций исследовано влияние магнитного поля на коэффициент демпфирования и частоту свободных и вынужденных колебаний.

Ключевые слова: вязкоупругий графеновый лист, свободные и вынужденные колебания, нелокальная градиентная теория деформации, плоское магнитное поле.

DOI: 10.15372/PMTF20220121

Введение. Интерес к исследованию механических свойств графеновых листов обусловлен широким использованием однослойных графеновых листов в наноэлектромеханических системах.

В последнее время разработаны неклассические теории сплошной среды, в которых учитывается влияние масштаба наноструктур. На основе нелокальной теории упругости проведены исследования поведения различных наноструктур [1–8]. Теории нелокального континуума описывают разупрочнение наноматериалов, но не их упрочнение, обнаруженное в результате экспериментальных и теоретических исследований [9, 10]. Градиентная теория деформации, предложенная в работе [11], описывает упрочнение материала. Для описания как разупрочнения, так и упрочнения материала разработана нелокальная градиентная теория деформации, содержащая нелокальный и масштабный параметры [12, 13]. С помощью этой теории в [14] изучены продольные колебания стержня. В работе [15] указанная теория использована при исследовании распространения волн в нанопластине из функционально-градиентного материала, подвергаемой нелинейному тепловому нагружению. В [16] с помощью нелокальной градиентной теории изучены затухающие колебания графеновых листов с учетом гигротермических эффектов. Динамическое деформирование

вязкоупругих графеновых листов под действием гармонической тепловой нагрузки исследовано в работе [17].

Известно, что если графеновые листы расположены на магнитных подложках, они намагничиваются. В последнее время проведен ряд исследований поведения графеновых листов в магнитном поле. В работе [18] с использованием нелокальной теории упругости изучено влияние плоского магнитного поля на поперечные колебания однослойных графеновых листов. В [19] построена нелокальная модель затухающих колебаний масс-наносенсора из однослойного графенового листа с прикрепленными наночастицами, находящегося под действием плоского магнитного поля. Влияние магнитного поля на распространение волн в графеновом листе исследовано в [20] с использованием модифицированной теории пластин, содержащей две неизвестные функции.

В данной работе с помощью нелокальной градиентной теории деформации изучаются поперечные колебания однослойного вязкоупругого графенового листа, расположенного на вязкоупругом основании и находящегося под действием плоского магнитного поля и равномерно распределенной гармонической нагрузки.

1. Формулировка задачи и ее математическое решение. Прямоугольный графеновый лист длиной a , шириной b и толщиной h покоится на вязкоупругом основании и находится под влиянием магнитного поля, действующего в плоскости листа, и внешней силы f_e (рис. 1). Внешняя сила f_e действует на верхнюю поверхность графенового листа.

В соответствии с теорией плит Кирхгофа смещения произвольной точки листа выражаются через смещения точек срединной поверхности:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y},$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t),$$

где u, v, w — компоненты вектора смещения произвольной точки листа; u_0, v_0, w_0 — компоненты вектора смещения точки срединной поверхности в направлениях x, y, z соответственно. Соотношения между компонентами тензора деформаций и компонентами

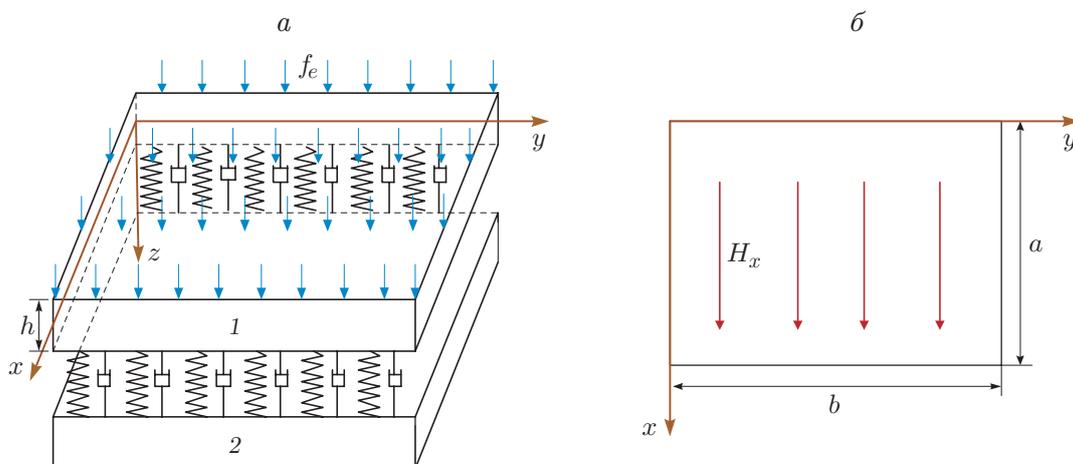


Рис. 1. Прямоугольный графеновый лист (1), покоящийся на вязкоупругом основании (2) и подвергающийся воздействию плоского магнитного поля и внешних сил:

a — графеновый лист, покоящийся на неподвижном основании, $б$ — магнитное поле

вектора смещения имеют вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \varkappa_{xx} \\ \varkappa_{yy} \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varkappa_{xx} \\ \varkappa_{yy} \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial^2 w_0 / \partial x^2 \\ -\partial^2 w_0 / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w_0 / \partial x \partial y \end{bmatrix}.$$

Поскольку графеновый лист подвергается воздействию магнитного поля $\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$ в направлении x , вектор силы Лоренца, индуцированной одноосным магнитным полем, представляется в виде [21]

$$\mathbf{f}(f_x, f_y, f_z) = \eta \left[0\mathbf{i} + H_x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{j} + H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \right],$$

где f_x, f_y, f_z — компоненты силы Лоренца \mathbf{f} в направлениях x, y, z . Для рассматриваемого процесса колебаний имеем

$$f_x = 0, \quad f_y = -z\eta H_x^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad f_z = \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

(η — магнитная проницаемость).

Следовательно, выражение для поперечной силы, индуцированной силой Лоренца, можно записать в виде

$$\mathbf{q}_m(q_m^x, q_m^y, q_m^z) = \int_{-h/2}^{h/2} f dz = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \eta h H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \mathbf{k}.$$

Нелокальная градиентная теория деформации содержит как нелокальную теорию упругости, так и градиентную теорию деформации вследствие наличия двух масштабных параметров. Определяющие соотношения нелокальной градиентной теории деформации имеют вид [17]

$$[1 - (e_a)^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = (1 - l^2 \nabla^2) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{kl} — компоненты тензора деформации; ∇^2 — оператор Лапласа; C_{ijkl} — тензор модулей упругости; e_a — параметр нелокальности; l — масштабный параметр, имеющий размерность длины и учитывающий влияние градиента деформации.

В рамках модели Кельвина с учетом уравнений (1) определяющие соотношения для однородного вязкоупругого графенового листа можно записать в следующем виде:

$$[1 - \mu \nabla^2] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [1 - l^2 \nabla^2] \left[1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Здесь τ_d — коэффициент демпфирования для вязкоупругой среды; $\mu = (e_a)^2$; $Q_{11} = Q_{22} = E/(1 - \nu^2)$; $Q_{12} = Q_{21} = \nu E/(1 - \nu^2)$; $Q_{66} = G_{12}$. Силы и моменты определяются следующим образом:

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz, \quad (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) z dz. \quad (3)$$

С учетом (2), (3) выражения для сил и моментов имеют вид

$$[1 - \mu \nabla^2] \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [1 - l^2 \nabla^2] \left[1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix};$$

$$[1 - \mu \nabla^2] \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [1 - l^2 \nabla^2] \left[1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varkappa_{xx} \\ \varkappa_{yy} \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $A_{11} = A_{22} = Eh/(1 - \nu^2)$; $A_{12} = A_{21} = \nu Eh/(1 - \nu^2)$; $A_{66} = G_{12}h$; $D_{11} = D_{22} = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$; $D_{12} = D_{21} = \nu Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$; $D_{66} = G_{12}h^3/12$.

Согласно второму закону Ньютона уравнения движения бесконечно малого элемента листа записываются в виде

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y,$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

где ρ — плотность материала листа; Q_x, Q_y — перерезывающие силы; q — внешняя сила, представляющая собой сумму внешней нагрузки, силы f_e , индуцированной плоским магнитным полем, и силы демпфирования:

$$q(x, y, t) = -kw - c \frac{\partial w}{\partial t} + \eta h H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f_e$$

(k, c — коэффициент жесткости основания Винклера и коэффициент демпфирования вязкоупругой среды соответственно). Пренебрегая смещениями u, v в плоскости листа, получаем следующее дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q. \quad (5)$$

С учетом (4) уравнение (5) записывается в виде

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q + (1 - l^2 \nabla^2) \left(1 + \tau_d \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \right). \quad (6)$$

Для свободно опертого листа задаются следующие краевые условия:

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, \quad w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0,$$

$$M_{xx}(0, y, t) = M_{xx}(a, y, t) = 0, \quad M_{yy}(x, 0, t) = M_{yy}(x, b, t) = 0. \quad (7)$$

2. Решение задачи о колебаниях листа. Решение уравнения (6) с краевыми условиями (7) представим в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \infty, \quad (8)$$

где $\alpha_m = m\pi/a$; $\beta_n = n\pi/b$; $T_{mn} = W e^{\Omega_{mnt}}$; W — неизвестный коэффициент.

При внешней силе f_e , равной нулю, имеем задачу о свободных колебаниях. Подставляя (8) в уравнение (6), получаем квадратное уравнение

$$M\Omega_{mn}^2 + (C_1 + C_2)\Omega_{mn} + (K + D_{ns} + H) = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} M &= [1 + \mu(\alpha_m^2 + \beta_n^2)]\rho h, & D &= D_{11}\alpha_m^4 + D_{22}\beta_n^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_m^2\beta_n^2, \\ C_1 &= c[1 + \mu(\alpha_m^2 + \beta_n^2)], & C_2 &= \tau_d D[1 + l^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)], & K &= k[1 + \mu(\alpha_m^2 + \beta_n^2)], \\ D_{ns} &= [1 + l^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)]D, & H &= [1 + \mu(\alpha_m^2 + \beta_n^2)]\eta h H_x^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2). \end{aligned}$$

Решение квадратного уравнения (9) имеет вид

$$\Omega_{mn} = -\frac{C_1 + C_2}{2M} \pm i\sqrt{\frac{K + D_{ns} + H}{M} - \left(\frac{C_1 + C_2}{2M}\right)^2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

От комплексных собственных значений Ω_{mn} можно перейти к комплексным собственным частотам $i\omega_{mn}$.

Вводя безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{mn} &= \Omega_{mn}a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}}, & \bar{\omega}_{mn} &= \omega_{mn}a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}}, & \bar{k} &= k\frac{a^4}{D_{11}}, & \bar{c} &= ca^2\sqrt{\frac{1}{\rho h D_{11}}}, \\ \bar{\tau}_d &= \tau_d\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{D_{11}}{\rho h}}, & \bar{\mu} &= \frac{\mu}{a^2}, & \bar{l} &= \frac{l}{a}, & R &= \frac{a}{b}, & \bar{\alpha}_m &= m\pi, & \bar{\beta}_n &= n\pi, \\ M_p &= \frac{\eta h H_x^2 a^2}{D_{11}}, & \bar{D}_{ij} &= \frac{D_{ij}}{D_{11}}, & i, j &= 1, 2, 6 \end{aligned}$$

и выполняя некоторые упрощения, безразмерные комплексные собственные частоты можно представить в виде

$$\bar{\omega}_{mn} = \bar{\omega}_u(\pm\sqrt{1 - \xi^2} + i\xi), \quad (10)$$

где $\bar{\omega}_u$, ξ — безразмерная собственная частота незатухающих колебаний и декремент затухания соответственно:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_u &= \sqrt{\frac{\bar{K} + \bar{D}_{ns} + \bar{H}}{\bar{M}}}, & \xi &= \frac{\bar{C}_1 + C_2}{2\bar{M}} / \sqrt{\frac{\bar{K} + \bar{D}_{ns} + \bar{H}}{\bar{M}}}, \\ \bar{M} &= 1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2), & \bar{D} &= \bar{D}_{11}\bar{\alpha}_m^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\bar{\alpha}_m^2R^2\bar{\beta}_n^2 + \bar{D}_{22}R^4\bar{\beta}_n^4, \\ \bar{C}_1 &= \bar{c}[1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)], & \bar{C}_2 &= \bar{\tau}_d\bar{D}[1 + \bar{l}^2(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)], & \bar{K} &= \bar{k}[1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)], \\ \bar{D}_{ns} &= [1 + \bar{l}^2(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)]\bar{D}, & \bar{H} &= [1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)]M_p(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2). \end{aligned}$$

Следует отметить, что вещественная часть выражения $\bar{\omega}_u\sqrt{1 - \xi^2}$ является безразмерной собственной частотой $\bar{\omega}_d$ затухающих колебаний. В отсутствие плоского магнитного поля ($H_x = 0$) частота затухающих колебаний совпадает с частотой затухающих колебаний в классической нелокальной градиентной теории деформации [22]. При неучете градиента деформации ($l = 0$) частота затухающих колебаний совпадает с частотой, соответствующей частоте в классической нелокальной теории упругости [8].

В случае вынужденных колебаний предполагается, что выражение для внешней силы записывается в виде $f_e = f_0(x, y) \cos(\omega t)$. В этом случае из (9) следует

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \left[\ddot{T}_{mn} + \frac{C_1 + C_2}{M} \dot{T}_{mn} + \frac{K + H + D_{ns}}{M} T_{mn} \right] = \\ = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{C_{mn} \cos(\omega t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)}{\rho h}, \end{aligned}$$

где $C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_0(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy$. Для неизвестных функций времени T_{mn} получаем дифференциальные уравнения

$$\ddot{T}_{mn} + \frac{C_1 + C_2}{M} \dot{T}_{mn} + \frac{K + H + D_{ns}}{M} T_{mn} = \frac{C_{mn} \cos(\omega t)}{\rho h},$$

решение которых представляется в виде

$$T_{mn} = T_{mnc} + T_{mnp},$$

где

$$\begin{aligned} T_{mnc} &= K_1 e^{-A/2+i\sqrt{B-(A/2)^2}} + K_2 e^{-A/2-i\sqrt{B-(A/2)^2}}, \\ T_{mnp} &= x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t); \\ A &= (C_1 + C_2)/M, \quad B = (K + H + D_{ns})/M. \end{aligned} \tag{11}$$

Из (11), (8) с учетом начальных условий $w|_{t=0} = 0$, $(\partial w / \partial t)|_{t=0} = 0$ следует

$$\begin{aligned} T_{mn} = \frac{C_{mn}}{\rho h} \frac{1}{\sqrt{(A\omega)^2 + (B - \omega^2)^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) + \\ + K_1 e^{-A/2+i\sqrt{B-(A/2)^2}} + K_2 e^{-A/2-i\sqrt{B-(A/2)^2}}, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{C_{mn}}{\rho h} \frac{1}{\sqrt{(A\omega)^2 + (B - \omega^2)^2}} \times \\ &\times \left\{ \sin\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) \left[-\frac{A}{2} - i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] - \omega \cos\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) \right\} / \\ &/ \left\{ \left[-\frac{A}{2} - i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] - \left[-\frac{A}{2} + i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] \right\}, \\ K_2 &= -\frac{C_{mn}}{\rho h} \frac{1}{\sqrt{(A\omega)^2 + (B - \omega^2)^2}} \times \\ &\times \left\{ \sin\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) \left[-\frac{A}{2} + i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] - \omega \cos\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) \right\} / \\ &/ \left\{ \left[-\frac{A}{2} + i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] - \left[-\frac{A}{2} - i\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя (12) в (8), получаем

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \left\{ \frac{C_{mn}}{\rho h} \frac{1}{\sqrt{(A\omega)^2 + (B - \omega^2)^2}} \sin\left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{B - \omega^2}{A\omega}\right) + K_1 e^{(-A/2 + i\sqrt{B - (A/2)^2})t} + K_2 e^{(-A/2 - i\sqrt{B - (A/2)^2})t} \right\}.$$

Вводя безразмерные величины и учитывая (10), имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_u &= \sqrt{\bar{B}}, \quad \xi = \frac{\bar{A}}{2\bar{\omega}_u}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b} = \frac{Ry}{a}, \\ \bar{A} &= \bar{c} + \bar{\tau}_d \frac{1 + \bar{l}^2(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)}{1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)} [\bar{D}_{11}\bar{\alpha}_m^4 + \bar{D}_{22}R^4\bar{\beta}_n^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\bar{\alpha}_m^2 R^2\bar{\beta}_n^2], \\ \bar{B} &= \bar{k} + (\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)M_p + \\ &\quad + \frac{1 + \bar{l}^2(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)}{1 + \bar{\mu}(\bar{\alpha}_m^2 + R^2\bar{\beta}_n^2)} [\bar{D}_{11}\bar{\alpha}_m^4 + \bar{D}_{22}R^4\bar{\beta}_n^4 + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66})\bar{\alpha}_m^2 R^2\bar{\beta}_n^2]. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для безразмерного смещения при вынужденных колебаниях записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\bar{\alpha}_m \bar{x}) \sin(\bar{\beta}_n \bar{y} R^2) \frac{16f_0}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2 + (\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2)^2}} \times \\ &\times \left[\sin\left(\bar{\omega} \bar{t} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega}}\right) - \bar{K}_1 e^{(-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} + i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2})\bar{t}} - \bar{K}_2 e^{(-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} - i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2})\bar{t}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_{11}}$ — безразмерная частота вынужденных колебаний; $\bar{t} = t\omega / (2\pi)$ — безразмерное время,

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= \frac{\sin\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega}}\right) (-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} - i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2}) - \bar{\omega} \cos\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega}}\right)}{(-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} - i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2}) - (-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} + i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2})}, \\ \bar{K}_2 &= \frac{\sin\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega}}\right) (-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} + i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2}) - \bar{\omega} \cos\left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{\bar{\omega}_u^2 - \bar{\omega}^2}{2\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega}}\right)}{(-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} + i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2}) - (-\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega} - i\sqrt{\bar{\omega}_u^2 - (\bar{\omega}_u \xi \bar{\omega})^2})}. \end{aligned}$$

3. Результаты исследования и их обсуждение. Ниже представлены результаты решения задачи о колебаниях графенового листа, находящегося в магнитном поле, в рамках нелокальной градиентной теории деформации. Полученные результаты сравниваются с имеющимися в литературе. Графеновый лист имел следующие механические и геометрические параметры: толщина $h = 0,090\,969\,56$ нм, модуль Юнга $E = 3,792\,477\,39$ ТПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,17$, модуль сдвига $G_{12} = E/2(1 + \nu)$ [23–25]. Безразмерные коэффициенты вязкоупругой среды имели значения $\bar{c} = 1$, $\bar{k} = 10$, коэффициент демпфирования равен $\bar{\tau}_d = 0,01$ [16, 26].

Результаты решения задачи представлены на рис. 2. Видно, что с увеличением параметра $\bar{\mu}$ коэффициент демпфирования затухающих и незатухающих свободных колебаний уменьшается, а с увеличением параметра \bar{l} — увеличивается. Следует отметить, что влияние параметра $\bar{\mu}$ на коэффициент демпфирования является более существенным, чем

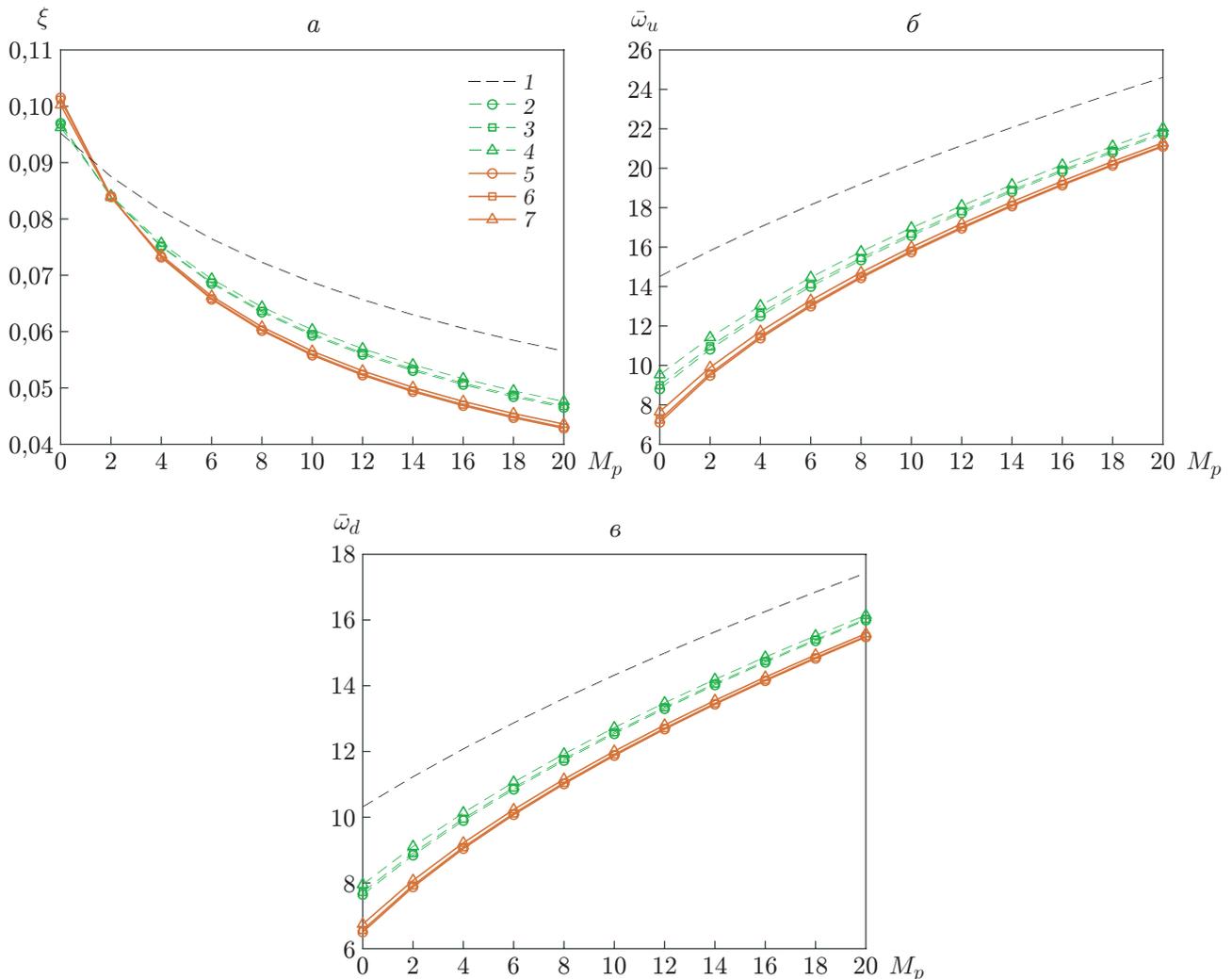


Рис. 2. Зависимости коэффициента демпфирования при свободных колебаниях листа ξ (а), а также частоты незатухающих $\bar{\omega}_u$ (б) и затухающих $\bar{\omega}_d$ (в) свободных колебаний от напряженности магнитного поля M_p при $a = b = 10$ нм, $m = n = 1$ и различных значениях параметров \bar{l} , $\bar{\mu}$:

1 — $\bar{\mu} = 0$, $\bar{l} = 0$, 2–4 — $\bar{\mu} = 0,1$ (2 — $\bar{l} = 0$, 3 — $\bar{l} = 0,05$, 4 — $\bar{l} = 0,1$), 5–7 — $\bar{\mu} = 0,2$ (5 — $\bar{l} = 0$, 6 — $\bar{l} = 0,05$, 7 — $\bar{l} = 0,1$)

влияние параметра \bar{l} . С увеличением напряженности магнитного поля M_p коэффициент демпфирования уменьшается, а частоты затухающих и незатухающих колебаний увеличиваются.

На рис. 3 представлены результаты решения задачи о вынужденных колебаниях графенового листа, а именно зависимости прогиба в центре листа от времени и частоты воздействия внешней силы соответственно.

Прогиб существенно увеличивается при увеличении параметра нелокальности $\bar{\mu}$ и незначительно уменьшается при увеличении параметра градиентности \bar{l} . Из зависимостей, приведенных на рис. 3,а, следует, что затухание колебаний происходит быстрее, если при решении задачи используются соотношения градиентной теории деформаций с учетом параметра нелокальности. Амплитуда колебаний графенового листа со временем уменьшается, и при $\bar{t} > 5$ затухающие колебания становятся установившимися. Поэто-

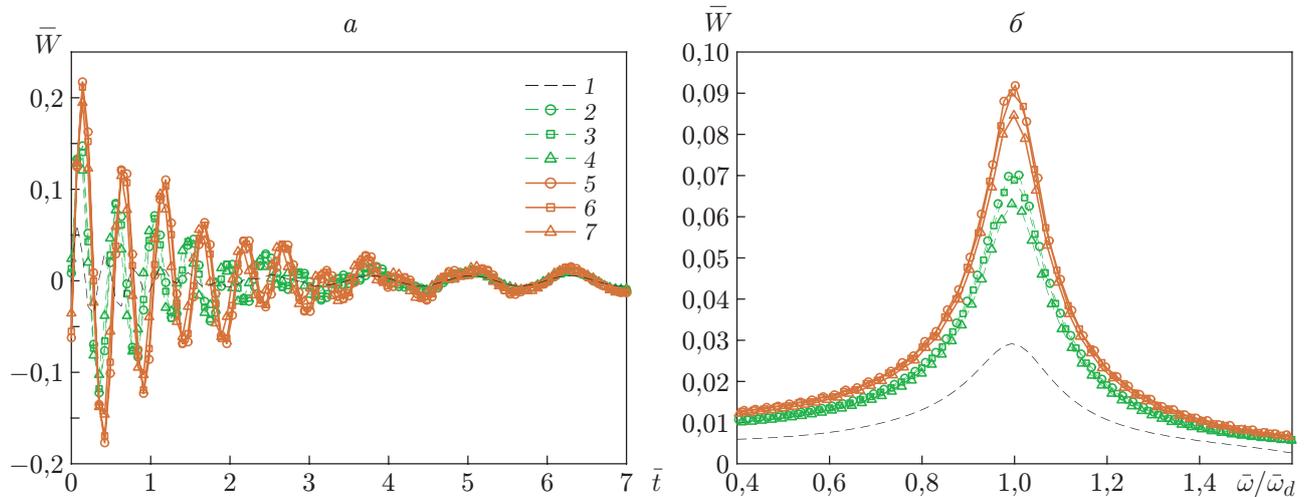


Рис. 3. Зависимости прогиба в центре листа от времени при $\bar{\omega} = 5$ (а) и от частоты воздействия внешней силы при $\bar{t} = 10$ (б) в случае вынужденных колебаний ($a = b = 10$ нм, $m = n = 1$, $M_p = 5$)

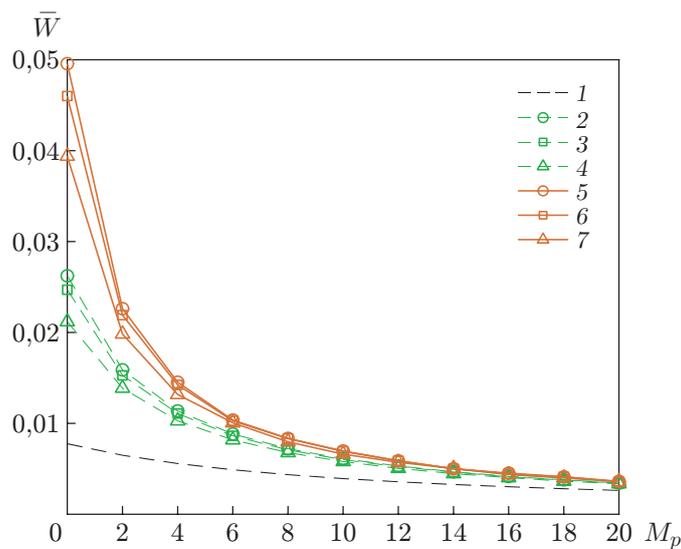


Рис. 4. Зависимость прогиба графенового листа от напряженности магнитного поля в случае вынужденных колебаний ($a = b = 10$ нм, $m = n = 1$, $\bar{t} = 10$, $\bar{\omega} = 5$)

му на рис. 3,б, 4 зависимости приведены при $\bar{t} = 10$. Прогиб изменяется при изменении частоты воздействия внешней силы и достигает максимального значения при $\bar{\omega}/\bar{\omega}_d \approx 1$.

На рис. 4 приведена зависимость прогиба от величины напряженности магнитного поля при вынужденных колебаниях графенового листа. Видно, что при наличии магнитного поля прогиб существенно уменьшается.

Заключение. С использованием нелокальной градиентной теории деформации изучены поперечные колебания вязкоупругого графенового листа, подвергаемого воздействию плоского магнитного поля и внешних сил. Получены уравнение колебаний графенового листа и его решения в случаях затухающих и незатухающих колебаний.

Установлено, что частота затухающих и незатухающих колебаний, а также коэффициент демпфирования зависят от параметра градиентности и параметра нелокальности.

В расчетах с учетом параметра нелокальности коэффициент демпфирования и частоты затухающих и незатухающих колебаний уменьшаются, а прогиб графенового листа увеличивается. В расчетах с учетом параметра градиентности имеют место обратные закономерности. При наличии плоского магнитного поля уменьшаются коэффициент демпфирования и поперечный прогиб графенового листа, но увеличиваются частоты затухающих и незатухающих колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Peddieson J., Buchanan G. R., McNitt R. P.** Application of nonlocal continuum models to nanotechnology // *Intern. J. Engng Sci.* 2003. V. 41. P. 305–312.
2. **Sudak L. J.** Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics // *J. Appl. Phys.* 2003. V. 94. P. 7281–7287.
3. **Zhang Y. Q., Liu G. R., Wang J. S.** Small-scale effects on buckling of multiwalled carbon nanotubes under axial compression // *Phys. Rev. B.* 2004. V. 47. 205430.
4. **Zhang Y. Q., Liu G. R., Xie X. Y.** Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity // *Phys. Rev. B.* 2005. V. 71. 195404.
5. **Wang Q., Varadan V. K., Quek S. T.** Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models // *Phys. Lett. A.* 2006. V. 357. P. 130–135.
6. **Pradhan S. C., Phadikar J. K.** Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models // *Phys. Lett. A.* 2009. V. 373, N 11. P. 1062–1069.
7. **Pradhan S. C., Murmu T.** Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics // *Comput. Materials Sci.* 2009. V. 47, N 1. P. 268–274.
8. **Pradhan S. C., Phadikar J. K.** Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates // *J. Sound Vibrat.* 2009. V. 325, N 1/2. P. 206–223.
9. **Fleck N. A., Hutchinson J. W.** A phenomenological theory for strain gradient theory in plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 2001. V. 41, N 12. P. 1825–1857.
10. **Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M.** Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* 2003. V. 51, N 8. P. 1477–1508.
11. **Mindlin R. D.** Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. V. 16, N 1. P. 51–78.
12. **Aifantis E. C.** On the gradient approach — Relation to Eringen's nonlocal theory // *Intern. J. Engng Sci.* 2011. V. 49, N 12. P. 1367–1377.
13. **Lim C. W., Zhang G., Reddy J. N.** A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation // *J. Mech. Phys. Solids.* 2015. V. 78. P. 298–313.
14. **Li L., Hu Y., Li X.** Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory // *Intern. J. Mech. Sci.* 2016. V. 115. P. 135–144.
15. **Ebrahimi F., Barati M. R., Dabbagh A.** A nonlocal strain gradient theory for wave propagation analysis in temperature-dependent inhomogeneous nanoplates // *Intern. J. Engng Sci.* 2016. V. 107. P. 169–182.
16. **Ebrahimi F., Barati M. R.** Damping vibration analysis of graphene sheets on viscoelastic medium incorporating hygro-thermal effects employing nonlocal strain gradient theory // *Composite Structures.* 2017. V. 185. P. 241–253.
17. **Radwan A. F., Sobhy M.** A nonlocal strain gradient model for dynamic deformation of orthotropic viscoelastic graphene sheets under time harmonic thermal load // *Phys. B: Condensed Matter.* 2018. V. 538. P. 74–84.

18. **Murmu T., Mccarthy M. A., Adhikari S.** In-plane magnetic field affected transverse vibration of embedded single-layer graphene sheets using equivalent nonlocal elasticity approach // Composite Structures. 2013. V. 96. P. 57–63.
19. **Ansari R., Gholami R., Rouhi H.** Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electro-thermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory // Composite Structures. 2015. V. 126. P. 216–226.
20. **Fardshad R. E., Mohammadi Y., Ebrahimi F.** Modeling wave propagation in graphene sheets influenced by magnetic field via a refined trigonometric two-variable plate theory // Structures Engng Mech. 2019. V. 72. P. 329–338.
21. **Karami B., Shahsavari D., Janghorban M.** Wave propagation analysis in functionally graded (FG) nanoplates under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory and four variable refined plate theory // Mech. Adv. Materials Structures. 2018. V. 25, N 12. P. 1047–1057.
22. **Shahsavari D., Karami B., Li L.** Damped vibration of a graphene sheet using a higher-order nonlocal strain-gradient Kirchhoff plate model // Comptes Rendus Mécanique. 2018. V. 346, N 12. P. 1216–1232.
23. **Korobeynikov S. N., Alyokhin V. V., Annin B. D., Babichev A. V.** Quasi-static buckling simulation of single-layer graphene sheets by the molecular mechanics method // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 7. P. 836–870.
24. **Korobeynikov S. N., Alyokhin V. V., Babichev A. V.** Simulating of graphene mechanical parameters by the DREIDING force field // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 2343–2378.
25. **Korobeynikov S. N., Alyokhin V. V., Babichev A. V.** On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // Intern. J. Engng Sci. 2018. V. 133. P. 109–131.
26. **Lei Y., Adhikari S., Froswell M. I.** Vibration of nonlocal Kelvin — Voigt viscoelastic damped Timoshenko beams // Intern. J. Engng Sci. 2013. V. 66/67. P. 1–13.

*Поступила в редакцию 5/VIII 2020 г.,
после доработки — 24/XI 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.*
