

AMS subject classification: 65Lxx, 65Mxx, 65Nxx

О преимуществах нестандартных конечно-разностных дискретизаций для дифференциальных задач*

Д. Конте, Н. Гуарино, Дж. Пагано, Б. Патерностер

Department of Mathematics, University of Salerno, Fisciano, 84084, Italy

E-mails: dajconte@unisa.it (Конте Д.), n.guarino8@studenti.unisa.it (Гуарино Н.), gpagano@unisa.it (Пагано Дж.), beapat@unisa.it (Патерностер Б.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 15, 2022.

Конте Д., Гуарино Н., Пагано Дж., Патерностер Б. О преимуществах нестандартных конечно-разностных дискретизаций для дифференциальных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 269–287.

Цель данной работы показать преимущества использования нестандартных конечно-разностных (НСКР) численных схем для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных (УЧП), некоторые свойства точного решения которых, например положительность, заранее известны. В качестве основного источника рассматривается работа Миккенса [14], автор которой выводит НСКР-схемы для ОДУ и УЧП, описывающие реальные явления и поэтому широко используемые в приложениях. Мы продемонстрируем, что НСКР-методы могут иметь более высокий порядок сходимости, чем соответствующие классические методы, а также сформулируем условия, гарантирующие устойчивость анализируемых схем. Кроме того, мы приводим углубленные численные тесты, сравнивая классические методы с НСКР-методами, предложенными Миккенсом, и определяя, когда последние имеют явное преимущество.

DOI: 10.15372/SJNM20220304

Ключевые слова: нестандартные конечно-разностные методы, положительные решения, точные схемы, обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных.

Conte D., Guarino N., Pagano G., Paternoster B. On the advantages of nonstandard finite differences discretizations for differential problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3.— P. 269–287.

The goal of this work is to highlight the advantages of using NonStandard Finite Differences (NSFD) numerical schemes for the resolution of Ordinary Differential Equations (ODEs) and Partial Differential Equations (PDEs) of which some properties of the exact solution are a-priori known, such as positivity. The main reference considered is Mickens' work [14], in which the author derives NSFD schemes for ODEs and PDEs that describe real phenomena, and therefore widely used in applications. We rigorously demonstrate that NSFD methods can have a higher order of convergence than the related classical ones, deriving also the conditions that guarantee the stability of the analyzed schemes. Furthermore, we carry out in-depth numerical tests comparing the classical methods with the NSFD ones proposed by Mickens, evaluating when the latter are decidedly advantageous.

Keywords: nonstandard finite difference methods, positive solutions, exact schemes, ordinary differential equations, partial differential equations.

*Работа выполнена при поддержке Национальной группы научных вычислений GNCS-INDAM (проект PRIN2017-MIUR 2017JYCLSF “Сохраняющая структура аппроксимация эволюционных задач”).

1. Введение

Численные методы на основе НСКР очень полезны для решения моделей ОДУ и УЧП, используемых во многих областях прикладной математики, химии, физики, биологии, техники и т. д. В действительности схемы НСКР целесообразно использовать вместо стандартных конечно-разностных (СКР) схем, когда заранее известны некоторые характеристики решаемой задачи и ее приложений.

Например, если рассматривать эпидемиологические модели [4, 9, 10, 24], решения которых представляют эволюцию категорий людей в популяции с течением времени (например инфицированных, вылеченных, вакцинированных и т. д.), нет смысла рассматривать для них отрицательные значения. Если мы рассматриваем динамические физические системы, точки равновесия которых удовлетворяют определенным свойствам [7] (таким как асимптотическая устойчивость), имеет смысл рассматривать численные методы, учитывающие эти характеристики. В другом случае, если мы имеем дело с химико-биологическими моделями, решения которых осциллируют [2, 3], рассмотрение численных методов, решения которых осциллируют с той же частотой, позволяет лучше проследить эту тенденцию.

При построении СКР-схем основное внимание уделяется их совместности, сходимости и абсолютной устойчивости (т. е. если точное решение не теряет устойчивость с увеличением времени, то и численное решение не теряет устойчивость при фиксированном размере шага и увеличении времени). Однако другие особенности точного решения, которые могут быть известны априори, не учитываются. По этой причине необходимо говорить об устойчивости численных методов, ссылаясь на известные свойства модели, которую мы анализируем, и которым мы хотим, чтобы наша дискретная схема соответствовала.

Рассмотрим ОДУ

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

и, фиксируя дискретную сеть точек $[t_0, t_1 = t_0 + h, \dots, T = t_0 + Nh]$, явную одношаговую численную схему для его решения

$$y_{k+1} = F_h(f, y_k), \quad y_k \approx y(t_k), \quad 0 < k < N. \quad (1.2)$$

Здесь F — форма схемы, которая, очевидно, связана с h (размером шага дискретизации по времени).

Чтобы понять, что мы понимаем под устойчивостью численных методов, рассмотрим следующее определение [1].

Определение. Предположим, что решение задачи (1.1) удовлетворяет некоторому свойству P . Разностная схема (1.2) называется (качественно) устойчивой по отношению к свойству P (или P -устойчивой), если для каждого $h > 0$ множество дискретных решений удовлетворяет свойству P .

Таким образом, цель численного решения ОДУ с помощью НСКР-схем — использование фундаментального свойства P анализируемой нами модели. Как мы увидим, не существует единой процедуры построения НСКР-методов, но если необходимые свойства установлены, они должны учитываться в численном решении. Еще одним важным моментом является то, что НСКР-схемы являются явными, и поэтому вычислительные

затраты на численные методы на основе НСКР относительно низки. В большинстве случаев изначально рассматриваются явные СКР-схемы, которые впоследствии модифицируются в соответствии с правилами НСКР, рассматриваемыми в следующем пункте.

НСКР-методы также можно использовать для численного разрешения УЧП. В этих случаях очень часто применяют технику расщепления, заключающуюся в разбиении исходного УЧП на несколько подуравнений, определяя для каждого из них соответствующую численную схему. В дальнейшем, комбинируя эти схемы, можно вывести окончательный НСКР-метод, который можно использовать для решения рассматриваемого УЧП [1]. Решение задач с использованием этого метода является актуальной темой, и некоторые из недавних работ [13, 22, 23] по НСКР-методам для эпидемиологических и других типов моделей можно найти в списке литературы.

В данной статье мы хотим расширить работу Миккенса [14], в которой автор выводит НСКР-схемы, теоретически удовлетворяющие некоторым свойствам рассматриваемых моделей. Поэтому мы анализируем некоторые модели, рассмотренные в статье Миккенса, и соответствующие НСКР-схемы, сравнивая их с СКР-схемами и проводя численное моделирование, свидетельствующее о полученных преимуществах. В частности, что касается анализа НСКР-схемы, предложенной Миккенсом для уравнения линейной диффузии, мы теоретически доказываем, что НСКР-схема имеет более высокий порядок точности в пространстве, чем классическая схема, а также более устойчива. Численные тесты подтверждают эти теоретические результаты.

Статья организована следующим образом: в пункте 2 мы напоминаем правила, на которых основаны НСКР-схемы; в п. 3 мы представляем НСКР-схемы для моделей ОДУ, выполняя численные тесты, чтобы продемонстрировать преимущества новых методов по сравнению с классическими методами на основе СКР; в п. 4 мы рассматриваем модели УЧП, делая то же, что и в предыдущем пункте, и аналитически выводим порядок и условия устойчивости НСКР-схемы, связанной с уравнением линейной диффузии; наконец, в п. 5 мы обсуждаем полученные результаты и наши идеи, связанные с будущими исследованиями.

2. Основные конструкции

Как упоминалось во введении, построение НСКР-схем связано с некоторым свойством точного решения дифференциальной задачи, которому бы удовлетворяло численное решение. Таким образом, нет точной и однозначной процедуры, которая должна быть проведена для СКР, но иногда, на основе представляющих интерес модели и свойства, должна быть получена численная схема.

Два основных правила, на которых основаны НСКР-схемы, можно описать следующим образом. Прежде всего с помощью классических стандартных схем можно аппроксимировать первую производную:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}. \quad (2.1)$$

НСКР-методы рассматривают аппроксимации вида

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - \psi(h)y_k}{\phi(h)}, \quad (2.2)$$

где для совместимости мы должны иметь

$$\psi(h) = 1 + O(h^2), \quad \phi(h) = h + O(h^2). \quad (2.3)$$

Кроме того, линейные и нелинейные члены могут быть аппроксимированы нелокальными представлениями [15], такими как

$$\begin{aligned} y &\rightarrow 2y_k - y_{k+1}, \\ y^2 &\rightarrow \frac{y_{k+1} + y_k + y_{k-1}}{3} y_k, \\ y^3 &\rightarrow 2y_k^3 - y_k^2 y_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое правило гарантирует, что порядок точности нового численного метода на основе НСКР (2.2) не меняется при изменениях в числителе и знаменателе, так как мы вносим в них возмущения того же порядка, что и исходная СКР-схема (2.1). Следовательно, для все меньших и меньших размеров шага дискретизации эти две схемы (СКР и соответствующая НСКР) дают аналогичные результаты. Кроме того, если имеются производные порядка m и знаменатель схемы СКР есть h^m , а не h , то функция $\phi(h)$ соответствующего численного НСКР-метода должна удовлетворять условию:

$$\phi(h) = h^m + O(h^{m+1}). \quad (2.5)$$

Обычно для схем первого порядка наиболее часто используемая функция $\phi(h)$ имеет вид

$$\phi(h) = \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda}. \quad (2.6)$$

Легко показать, что при заданном тестовом ОДУ $y'(t) = -\lambda y(t)$, $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, явный метод Эйлера становится точным при подстановке $h \rightarrow \phi(h)$ в (2.6):

$$y_{k+1} = y_k - h\lambda y_k, \quad h \rightarrow \phi(h), \quad \text{поэтому} \quad y_{k+1} = e^{-\lambda h} y_k. \quad (2.7)$$

Важно подчеркнуть, что такая подстановка делает явный метод Эйлера А-устойчивым, т. е. численное решение стремится к нулю по мере того, как точное решение при t стремится к бесконечности при любом выборе размера шага дискретизации h . Первое правило в основном используется, чтобы избежать потери устойчивости численного решения даже для довольно больших значений шага дискретизации.

Второе правило обычно применяется, когда численное решение должно быть положительным. Поэтому, как уже упоминалось, нет единой процедуры для применения этого свойства, она меняется от схемы к схеме в зависимости от рассматриваемой модели.

3. НСКР для ОДУ

В этом пункте мы представим НСКР-схемы, полученные Миккенсом [14] для SIR-модели эпидемий, описанной в следующем подпункте, и систему нелинейных ОДУ для процессов фотопроводимости. Покажем при помощи численных тестов преимущества НСКР-схем по сравнению с соответствующими СКР-схемами с точки зрения сохранения устойчивости численного решения при увеличении времени и сохранения положительности. Кроме того, мы покажем аналитически, что НСКР-схема имеет закон сохранения модели SIR. Напомним, что система ОДУ (1.1) является положительной, если и только если $y(t) \geq 0 \forall t \in [t_0, T]$. Аналогичным образом численный метод (1.2) сохраняет положительность точного решения стандартной задачи, если и только если $y_k \geq 0 \forall k \geq 0$.

3.1. Модель SIR

Модели SIR [19] позволяют изучать развитие эпидемий. Они были введены Кермаком и Маккендриком [12]. Модели SIR были названы так ввиду деления населения во время эпидемии на следующие категории: $S(t)$ — здоровые индивидуумы во время t , восприимчивые к инфекции; $I(t)$ — больные индивидуумы во время t , поэтому являющиеся носителями инфекции; $R(t)$ — индивидуумы, которые выздоровели или умерли во время t , следовательно, их можно удалить.

Существует множество вариаций этой модели, в данной статье мы рассмотрим базовую версию

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu(1 - S) - \beta IS, \\ \frac{dI}{dt} = -\mu I - \gamma I + \beta IS, \\ \frac{dR}{dt} = -\mu R + \gamma I. \end{cases} \quad (3.1)$$

Параметры модели μ , γ и β являются положительными. Первый параметр представляет собой скорость текучести населения (коэффициент рождаемости предполагается равным естественной смертности), второй — показатель излечения, а третий — скорость инфицирования. Очевидно, что поскольку $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$ представляют количество людей с течением времени, они являются положительными функциями.

3.1.1. НСКР-схема Миккенса

Цель построения НСКР-схемы для модели SIR — сохранение положительности. Обратите внимание, что общая численность населения $M(t)$ задается суммой рассматриваемых индивидуумов, т. е. $M(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Сложением левых и правых частей (3.1) мы получим следующее выражение для производной $M(t)$:

$$\frac{dM}{dt} = \mu(1 - M). \quad (3.2)$$

Поэтому после получения НСКР-схемы для системы ОДУ (3.1) ее совместимость с этим последним соотношением также должна быть проверена. НСКР-схема, предложенная Миккенсом, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{S_{k+1} - S_k}{\phi} = \mu(1 - S_{k+1}) - \beta I_k S_{k+1}, \\ \frac{I_{k+1} - I_k}{\phi} = -\mu I_{k+1} - \gamma I_{k+1} + \beta I_k S_{k+1}, \\ \frac{R_{k+1} - R_k}{\phi} = -\mu R_{k+1} + \gamma I_{k+1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\phi = \phi(h, \mu) = (1 - e^{-\mu h})/\mu$. Обратите внимание, что применялись оба правила, связанные с НСКР-схемами. Таким образом всегда проверяется положительность численного решения.

3.1.2. Наш вклад

Функции модели SIR (3.1) были определены таким образом, чтобы сумма индивидуумов в популяции всегда была равна единице $\forall t \geq 0$. Таким образом, если $M(t_0) = 1$, то

$M(t) = 1$ — единственное решение ОДУ (3.2). Отметим, что сложение правых и левых частей НСКР-схемы (3.3) дает соотношение

$$\frac{M_{k+1} - M_k}{\phi} = \mu(1 - M_{k+1}). \quad (3.4)$$

Поэтому НСКР-схема совместима с соотношением (3.2), полученным ранее для первой производной $M(t)$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Если $M(t_0) = 1$, то $M_k = 1$ ($\forall k \geq 0$) — численное решение НСКР-схемы (3.4), полученной для ОДУ (3.2).

Доказательство. По индукции, зная, что $M(t_0) = 1$, предположим, что $M_k = 1$ для некоторого k . Докажем, что $M_{k+1} = 1$. Поскольку $M_{k+1} - M_k = \phi\mu(1 - M_{k+1})$ (см. (3.4)) и $M_k = 1$, имеем

$$M_{k+1} - 1 = \phi\mu(1 - M_{k+1}).$$

Отсюда $(1 + \phi\mu)M_{k+1} = 1 + \phi\mu$. Поэтому $M_{k+1} = 1$. \square

Следовательно НСКР-схема может сохранить то же свойство, которому удовлетворяет точное решение системы. Это также обычно имеет место для соответствующей схемы СКР, т. е. для явного метода Эйлера.

Мы выбрали следующие значения параметров и начальных условий [20] для выполнения численных тестов:

$$\begin{aligned} \beta &= 0.86, & \gamma &= 0.6, & \mu &= 0.01; \\ S(t_0) &= 0.72, & I(t_0) &= 0.27, & R(t_0) &= 0.01. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На рисунке 1 приведены решение, полученное с помощью явного метода Эйлера (СКР-схемы), и решение, полученное с помощью соответствующей НСКР-схемы (3.3), для $h = 4$ в интервале $[0, 60]$.

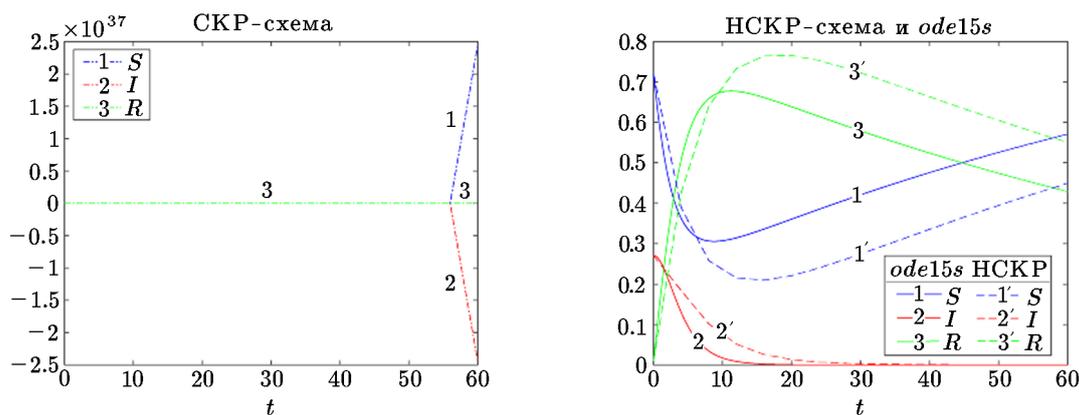


Рис. 1. Численные решения с использованием СКР-схемы (явной эйлеровой) и НСКР-схемы (3.3) при $h = 4$ и функции Matlab *ode15s*, $t \in [0, 60]$

Решение НСКР также связано со стандартным решением, рассчитанным с помощью функции *ode15s*. Отметим, что СКР-метод дает решения, которые не только нарушают положительность системы, но также становятся неустойчивыми при увеличении t .

Вместо этого НСКР-схема дает устойчивые решения по сравнению с точным решением как с точки зрения положительности, так и с точки зрения сохранения устойчивости при увеличении t . Следовательно НСКР-схема является явной, как и метод Эйлера, но гораздо более устойчивой и удобной. Для таких моделей, как SIR, описывающих развитие эпидемий за длительные периоды, важно построить устойчивые численные методы, для которых можно использовать большие размеры шага дискретизации. В противном случае численный метод был бы дорогим. Кроме того во многих приложениях интересно понять качественную тенденцию решения, не обязательно требующую большой точности.

В таблица 1 приведены относительные ошибки, полученные в конечной точке сетки ($T = 8$) при уменьшении h , и оценки порядков $p(h)$ для СКР-метода и НСКР-метода (3.3), определяемые по формуле

$$p(h) = \frac{cd(h) - cd(2h)}{\log_{10} 2}. \tag{3.6}$$

Здесь $cd(h)$ — достигнутое количество правильных цифр в конечной точке T интервала интегрирования $[t_0, T]$ с шагом, равным h . Отметим, что НСКР-метод имеет порядок точности, стремящийся к единице, так как рассматриваемая функция ϕ удовлетворяет свойству (2.3). Кроме того решение НСКР имеет такую же точность, что и решение СКР.

Таблица 1. Относительные ошибки и оценка порядка $p(h)$ с использованием СКР-схемы и НСКР-схемы (3.3) в конечной точке T , $t \in [0, 8]$.

h	СКР-ошибка	НСКР-ошибка	$p(h)$ (СКР)	$p(h)$ (НСКР)
1	0.0617	0.0310	—	—
1/2	0.0287	0.0187	1.1059	0.7294
1/2 ²	0.0138	0.0103	1.0519	0.8552
1/2 ³	0.0068	0.0055	1.0255	0.9247
1/2 ⁴	0.0034	0.0028	1.0127	0.9615
1/2 ⁵	0.0016	0.0014	1.0063	0.9806
1/2 ⁶	8.3602 · 10 ⁻⁴	7.1419 · 10 ⁻⁴	1.0031	0.9902

Отметим, что при малых шагах и более коротких интервалах СКР-схема дает хорошие решения, сравнимые с решениями, определяемыми НСКР-схемой (3.3), с точки зрения получаемой точности.

3.2. Модель фотопроводимости

Процесс фотопроводимости в собственных полупроводниках с особыми характеристиками может быть описан следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений [21]:

$$\begin{cases} c \frac{dm}{dt} = \alpha n(N^* - m) - \delta mp - \gamma m, \\ \frac{dn}{dt} = G - \alpha n(N^* - m) + \gamma m - c_1 n, \\ \frac{dp}{dt} = G - \delta mp - c_2 p, \end{cases} \tag{3.7}$$

где α , N^* , δ , γ , c_1 и c_2 — положительные параметры. Функции $n(t)$ и $m(t)$ — плотность свободных и захваченных электронов в момент времени t соответственно, а $p(t)$ — общая плотность популяции в это же время. Эти величины положительны, и поэтому снова необходимо строить НСКР-схему для сохранения этого свойства.

3.2.1. НСКР-схема Миккенса

НСКР-схема строится с использованием правил, рассмотренных в предыдущем пункте. В частности, дискретизация каждого уравнения производится с использованием разностей вперед для первых производных с соответствующими функциями ϕ_i (вместо h) в знаменателе и нелокальных представлений для других членов:

$$\begin{cases} \frac{m_{k+1} - m_k}{\phi_1} = (\alpha N^*)n_k - \alpha n_k m_{k+1} - \delta p_k m_{k+1} - \gamma m_{k+1}, \\ \frac{n_{k+1} - n_k}{\phi_2} = G - (\alpha N^*)n_k + \alpha n_k m_{k+1} + \gamma m_{k+1} - c_1 n_k, \\ \frac{p_{k+1} - p_k}{\phi_3} = G - \delta m_{k+1} p_{k+1} - c_2 p_{k+1}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Обратите внимание, что здесь в знаменателях уравнений имеются три различные функции:

$$\phi_1 = \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma}, \quad \phi_2 = \frac{1 - e^{-h(\alpha N^* + c_1)}}{(\alpha N^* + c_1)}, \quad \phi_3 = \frac{e^{c_2 h} - 1}{c_2}. \quad (3.9)$$

Согласно утверждению Миккенса [14], выбор функции в знаменателе зависит от рассматриваемой задачи и введенных нелокальных представлений. В данном конкретном случае этот выбор связан с нелокальными представлениями, введенными для второго члена. Что касается НСКР-схемы (3.3) для системы ОДУ (3.1), параметр μ умножается в каждом случае на функцию, вычисленную на следующем шаге, для всех трех уравнений. Этого не происходит для НСКР-схемы (3.8), связанной с системой ОДУ (3.7), в которой параметры, умноженные на функции, вычисляемые на каждом шаге, различны для трех уравнений. Численно мы увидим, что выбор трех различных функций в этом случае приводит к очень хорошим свойствам устойчивости НСКР-схемы (3.8).

Легко видно, что НСКР-схема дает положительные численные решения.

3.2.2. Наш вклад

Мы выполнили численное моделирование с использованием значений параметров, приведенных в табл. 2, и следующих начальных условий [21] при $t = 0$:

$$m_0 = 10^{10} (\text{см}^{-3}), \quad n_0 = 3 \cdot 10^{15} (\text{см}^{-3}), \quad p_0 = 5 \cdot 10^{13} (\text{см}^{-3}).$$

Таблица 2. Значения параметров

$G (\text{см}^3 \text{с})$	$\alpha (\text{см}^3 \text{с}^{-1})$	$N^* (\text{см}^{-3})$	$c_1 (\text{с}^{-1})$	$c_2 (\text{с}^{-1})$	$\delta (\text{см}^3 \text{с}^{-1})$	$\gamma (\text{с}^{-1})$
10^6	$4.1 \cdot 10^{-14}$	10^{14}	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	10^{-15}	0.83

Решение (3.7), которое считается стандартным, обеспечивается функцией *ode15s* пакета программ Matlab.

Рис. 2 показывает, что стандартная эйлерова схема вперед приводит к численной неустойчивости, поскольку m становится неустойчивым и n становится отрицательным. Поэтому численное СКР-решение не согласуется с точным решением, в то время как НСКР-схема дает хорошие решения при каждом выборе шага по времени h , несмотря на значительную жесткость системы.

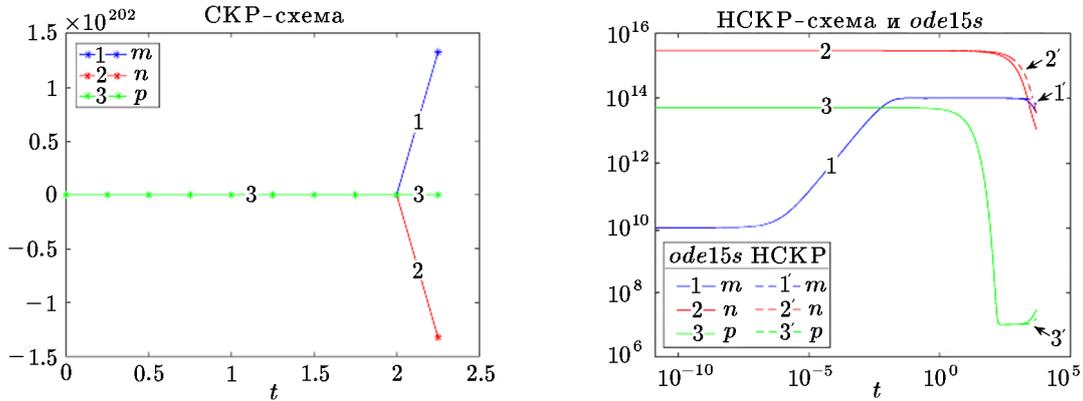


Рис. 2. Численное решение с использованием СКР-схемы (явной эйлеровой) при $h = 0.25$, $t \in [0, 2.5]$ (слева), и сравнение НСКР-схемы (3.8) и *ode15s* (в логарифмическом масштабе) при $h = 0.25$, $t \in [0, 5000]$ (справа)

Результаты, представленные в табл. 3, показывают, что СКР-схема точнее, чем НСКР-схема, но для определения приемлемых решений необходимо использовать малый размер шага h , особенно в рассматриваемом интервале интегрирования $t \in [0, 5000]$. С другой стороны, НСКР-метод дает качественно хорошее решение даже при больших размерах шага и поэтому дешевле, чем соответствующая СКР-схема. Для обоих методов оцениваемый порядок равен единице, поэтому, как и ожидалось, НСКР-схема имеет тот же порядок, что и СКР-схема.

Таблица 3. Относительные ошибки и оценка порядка $p(h)$ при использовании СКР-схемы и НСКР-схемы (3.8) в конечной точке T , $t \in [0, 5000]$

h	СКР-ошибка	НСКР-ошибка	$p(h)$ (СКР)	$p(h)$ (НСКР)
$1/2^2$	—	0.7846	—	—
$1/2^3$	—	0.3441	—	1.1891
$1/2^4$	—	0.1564	—	1.1376
$1/2^5$	—	0.0742	—	1.0739
$1/2^6$	$1.3684 \cdot 10^{-5}$	0.0362	—	1.0378
$1/2^7$	$6.8583 \cdot 10^{-6}$	0.0178	0.9966	1.0190

4. НСКР для УЧП

Численные методы на основе НСКР также можно использовать для УЧП. Рассмотрим, например, одномерное УЧП следующего вида:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{4.1}$$

В этом случае можно использовать метод расщепления, получив из исходного УЧП четыре подуравнения:

$$\begin{aligned} F\left(0, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= 0, & F\left(u, 0, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= 0, \\ F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, 0, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) &= 0, & F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, 0\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теперь можно рассматривать четыре полученных подуравнения по отдельности, получая для каждого из них численные НСКР-схемы, взяв априори известное свойство P соответствующего точного решения, которое мы хотим сохранить для наших методов. Впоследствии эти четыре НСКР-схемы необходимо объединить для получения конечного основанного на НСКР численного метода для рассматриваемого УЧП.

Как мы увидим, можно получить более простые УЧП, чем первоначальное, используя расщепление, для которого известна точная конечно-разностная схема. Вот почему часто (в отличие от ОДУ) для УЧП численные методы на основе НСКР, как правило, точнее, чем соответствующие СКР-методы.

4.1. Линейное уравнение адвекции–диффузии

Следующее одномерное УЧП часто используется в математической литературе в качестве модели уравнения Навье–Стокса [16]:

$$u_t + u_x = bu_{xx}. \quad (4.3)$$

Здесь $u(x, t)$ — решение, зависящее от времени и пространства, а b — действительная неотрицательная постоянная. Снова ищем положительные численные решения.

В этом подпункте помимо доказательства того, что численно НСКР-схема устойчивее и точнее, чем стандартная схема, мы даем теоретический вклад. То есть мы получаем условия устойчивости СКР- и НСКР-методов, и доказываем, что НСКР-схема имеет на порядок более высокую точность по пространству, чем классическая схема. Кроме того, мы также демонстрируем точность НСКР-метода, используемого для дискретизации одного из подуравнений (4.3).

4.1.1. НСКР-схема Миккенса

НСКР-схема строится с применением метода расщепления с учетом следующих трех подуравнений:

$$u_t + u_x = 0, \quad u_x = bu_{xx}, \quad u_t = bu_{xx}. \quad (4.4)$$

Поскольку известны следующие точные конечно-разностные схемы для первых двух подуравнений:

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\varphi(\Delta t)} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\varphi(\Delta x)} &= 0, \quad \varphi(h) = h + O(h^2), \\ \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} &= \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{(e^{\Delta x/b} - 1)\Delta x}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где Δx — размер шага в пространстве, Δt — размер шага во времени, окончательная НСКР-схема получается путем их соответствующей рекомбинации:

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\Delta x} = b \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\phi(\Delta x)}, \quad (4.6)$$

здесь $\phi(\Delta x) = b(e^{\Delta x/b} - 1)\Delta x = \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$. Объединение схем подуравнений должно быть выполнено таким образом, чтобы численный НСКР-метод был совместимым. Путем доказательства порядка метода (4.6) в теореме 1 (теорема 1 будет приведена ниже), мы также продемонстрируем его совместимость с УЧП (4.3).

Первая схема в (4.5) является точной, если $\Delta t = \Delta x$ [17]. СКР-схема, из которой Миккенс получил метод (4.6), и который мы будем использовать в численных тестах, получается просто путем использования Δx^2 вместо $\phi(\Delta x)$. Поэтому стандартная схема имеет первый порядок во времени и пространстве.

4.1.2. Наш вклад

Сначала докажем, что вторая схема в (4.5) для $u_x = bu_{xx}$ является точной.

Утверждение 2. Численная схема

$$\frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{(e^{\Delta x/b} - 1)\Delta x}$$

является точной для ОДУ $u_x = bu_{xx}$.

Доказательство. Точное решение рассматриваемого ОДУ имеет вид

$$u(x) = bu_0 e^{x/b}, \quad u_0 = u_x(x_0).$$

Чтобы доказать, что численная схема является точной, подставим ее точное решение и посмотрим, выполняется ли тождество:

$$\begin{aligned} & \frac{bu_0 e^{x_m/b} - bu_0 e^{x_{m-1}/b}}{\Delta x} - \frac{bu_0 e^{x_{m+1}/b} - 2bu_0 e^{x_m/b} + bu_0 e^{x_{m-1}/b}}{(e^{\Delta x/b} - 1)\Delta x} \\ &= \frac{bu_0}{\Delta x} \left((e^{x_m/b} - e^{x_m/b} e^{-\Delta x/b}) - \frac{e^{x_m/b} e^{\Delta x/b} - 2e^{x_m/b} + e^{x_m/b} e^{-\Delta x/b}}{e^{\Delta x/b} - 1} \right) \\ &= \frac{bu_0 e^{x_m/b}}{\Delta x} \left((1 - e^{-\Delta x/b}) - \frac{e^{\Delta x/b} - 2 + e^{-\Delta x/b}}{(e^{\Delta x/b} - 1)} \right) = \frac{bu_0 e^{x_m/b}}{\Delta x} 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение доказано. \square

При получении НСКР-схемы для анализируемого УЧП, Миккенс использовал точные конечно-разностные схемы для подуравнений $u_t + u_x = 0$ и $u_x = bu_{xx}$, но не для $u_t = bu_{xx}$. Поскольку порядок точности классической дискретизации последнего уравнения равен единице во времени и двум в пространстве, мы предполагаем, что порядок НСКР-схемы (4.6) такой же. Для подтверждения этой гипотезы докажем следующую теорему.

Теорема 1. Численная схема

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\Delta x} - b \frac{u_{m+1}^k - 2u_m^k + u_{m-1}^k}{\phi(\Delta x)}, \quad (4.7)$$

где $\phi(\Delta x) = b(e^{\Delta x/b} - 1)\Delta x$, используется для решения УЧП $u_t + u_x = bu_{xx}$ с порядком точности, равным единице во времени и двум в пространстве, т. е. его локальная ошибка усечения LTE = $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$, при предположении, что $\Delta t = \Delta x$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения $u_t + u_x - bu_{xx} = 0$. Следовательно, мы можем записать это решение в виде $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, где $v(x, t)$ и $w(x, t)$ — функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} v_t + v_x = 0, \\ w_x = bw_{xx}, \\ w_t = bv_{xx}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Действительно, $u_t + u_x - bu_{xx} = v_t + w_t + v_x + w_x - bv_{xx} - bw_{xx}$. Вторым член этого уравнения равен нулю, если условия (4.8) удовлетворяются для v и w . Мы имеем

$$\begin{aligned}
\text{LTE} &= \frac{u(x_m, t_{k+1}) - u(x_m, t_k)}{\Delta t} + \frac{u(x_m, t_k) - u(x_{m-1}, t_k)}{\Delta x} - \\
&\quad b \frac{u(x_{m+1}, t_k) - 2u(x_m, t_k) + u(x_{m-1}, t_k)}{\phi(\Delta x)} \\
&= \frac{v(x_m, t_{k+1}) - v(x_m, t_k)}{\Delta t} + \frac{w(x_m, t_{k+1}) - w(x_m, t_k)}{\Delta t} + \\
&\quad \frac{v(x_m, t_k) - v(x_{m-1}, t_k)}{\Delta x} + \frac{w(x_m, t_k) - w(x_{m-1}, t_k)}{\Delta x} - \\
&\quad b \frac{v(x_{m+1}, t_k) - 2v(x_m, t_k) + v(x_{m-1}, t_k)}{\phi(\Delta x)} - \\
&\quad b \frac{w(x_{m+1}, t_k) - 2w(x_m, t_k) + w(x_{m-1}, t_k)}{\phi(\Delta x)}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{v(x_m, t_{k+1}) - v(x_m, t_k)}{\Delta t} + \frac{v(x_m, t_k) - v(x_{m-1}, t_k)}{\Delta x} = 0$, так как эта схема является точной (как было показано ранее в (4.5)) для первого уравнения из (4.8) $v_t + v_x = 0$, если $\Delta t = \Delta x$. Кроме того $\frac{w(x_m, t_k) - w(x_{m-1}, t_k)}{\Delta x} - b \frac{w(x_{m+1}, t_k) - 2w(x_m, t_k) + w(x_{m-1}, t_k)}{\phi(\Delta x)} = 0$, так как мы показали, что эта численная схема является точной для второго уравнения из (4.8) $w_x - bw_{xx} = 0$. Поэтому, используя выражение (4.9) и исходя из этих соображений, мы можем записать, что

$$\begin{aligned}
\text{LTE} &= \frac{w(x_m, t_{k+1}) - w(x_m, t_k)}{\Delta t} - b \frac{v(x_{m+1}, t_k) - 2v(x_m, t_k) + v(x_{m-1}, t_k)}{\phi(\Delta x)} \\
&= w_t(x_m, t_k) + O(\Delta t) + v_{xx}(x_m, t_k) + O(\Delta x^2)
\end{aligned}$$

для третьего уравнения из (4.8) $w_t - bv_{xx} = 0$. Теорема доказана. \square

НСКР-схема (4.6) является явной во времени. Мы можем ее переписать в виде

$$u_m^{k+1} = u_{m-1}^k \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} + b \frac{\Delta t}{\phi(\Delta x)} \right) + u_m^k \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2b \frac{\Delta t}{\phi(\Delta x)} \right) + u_{m+1}^k \left(b \frac{\Delta t}{\phi(\Delta x)} \right). \tag{4.10}$$

В этот раз для получения НСКР-схемы нелокальные представления не использовались. Единственное отличие этого метода от СКР-метода заключается в подстановке $\Delta x^2 \rightarrow \phi(\Delta x)$.

Заметим, что НСКР-схема не является положительной для каждого шага дискретизации Δx и Δt . Из выражения (4.10) ясно, что достаточным условием положительности является неотрицательность коэффициента u_m^k . Это приводит к

$$\Delta t \leq \left(\frac{e^{\Delta x/b} - 1}{e^{\Delta x/b} + 1} \right) \Delta x. \tag{4.11}$$

С другой стороны, это не проблема. Действительно, условие (4.11) также гарантирует сохранение устойчивости численного решения при увеличении t (т. е. это условие очень подобно условию абсолютной устойчивости), и поэтому мы в любом случае должны были его наложить. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Рассмотрим конечно-разностную схему*

$$u_m^{k+1} = (c + d)u_{m-1}^k + (1 - c - 2d)u_m^k + du_{m+1}^k,$$

где c и d — положительные постоянные. Следовательно, если c пренебрежимо мало, эта схема является абсолютно устойчивой, т.е. численное решение сохраняет устойчивость при увеличении k , при $d \leq 1/2$. Если d пренебрежимо мало, эта схема абсолютно устойчива при $c \leq 1$.

Доказательство. Заметим, что без учета граничных условий (при предположении, что они не влияют на устойчивость) такую схему можно записать в виде

$$u^{k+1} = Au^k,$$

где A — трехдиагональная матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - c - 2d & c + d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d & 1 - c - 2d & c + d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d & 1 - c - 2d \end{pmatrix}.$$

Если каждое собственное значение A по модулю меньше или равно единице, схема является абсолютно устойчивой. Мы имеем (см. [8])

$$u_m^k = \sigma^k e^{i\alpha m},$$

где $i = \sqrt{-1}$ и α — волновое число. Заметим, что $u_m^{k+1} = \sigma u_m^k$. Следовательно, σ — собственное значение A . Подставив выражение для u_m^k в рассматриваемую конечно-разностную схему, мы можем получить σ :

$$\sigma = (c + d)e^{-i\alpha} + (1 - c - 2d) + de^{i\alpha} = (1 + (c + 2d)(\cos(\alpha) - 1)) - ic \sin(\alpha).$$

Если c пренебрежимо мало и $|\sigma| \approx \sqrt{(1 + 2d(\cos(\alpha) - 1))^2}$, то $|\sigma| \leq 1 \forall \alpha$, если $d \leq 1/2$. С другой стороны, если d пренебрежимо мало, при помощи аналогичных вычислений можно доказать, что $|\sigma| \leq 1 \forall \alpha$, если $c \leq 1$. \square

Заметим, что конечно-разностная схема, используемая в этой теореме, соответствует СКР-схеме при $c = \Delta t / \Delta x$ и $d = b \Delta t / \Delta x^2$, тогда как она соответствует НСКР-схеме (4.6) при $c = \Delta t / \Delta x$ и $d = b \Delta t / \phi(\Delta x)$. Поэтому, налагая только что доказанные условия устойчивости, мы получим следующие ограничения для СКР- и НСКР-схем:

$$\text{СКР: } \Delta t \leq \Delta x, \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2b + \Delta x}; \quad \text{НСКР: } \Delta t \leq \Delta x, \Delta t \leq \Delta x \frac{e^{\Delta x/b} - 1}{2}. \quad (4.12)$$

Заметим, что для малых значений шага условия положительности (4.11) и абсолютной устойчивости (4.12) НСКР-схемы очень похожи. Это очевидно имеет место и для СКР-схемы. Во всяком случае, условия положительности несколько более строгие, чем условия устойчивости для рассматриваемого значения b . Поэтому в случае наложения первых условий эти методы дают приемлемые численные решения. Теорема 2 дает два условия устойчивости в предельных случаях, когда c или d пренебрежимо малы. Поэтому в общем случае у нас нет условия устойчивости. Однако в [8] было показано, что наложение обоих этих условий позволяет избежать потери устойчивости численного решения при увеличении t .

Численные тесты выполняются со следующими значениями параметров модели и начальных и граничных условий [8] в прямоугольнике $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$b = 0.1, \quad u(x, 0) = 0 \quad \forall x, \quad u(0, t) = 0 \quad \forall t, \quad u(1, t) = 1 \quad \forall t.$$

Рассматриваемое стандартное решение обеспечивается программой *ode15s* пакета Matlab (наложение высокой точности во времени) после полудискретизации по пространству (оно также используется для построения НСКР-схемы) УЧП (4.3) с размером шага $\Delta x = 10^{-3}$.

На рис. 3 (слева) и рис. 4 дано сравнение численных решений, полученных с помощью СКР- и НСКР-схем при $\Delta x = 0.025$ и Δt несколько большим, чем 0.003. В этом случае СКР-схема не только дает решения, которые становятся неустойчивыми, но и нарушают положительность. На рис. 3 (справа) видно, что одни и те же значения шага Δx и Δt использовались для НСКР-схемы, тогда как $\Delta t = 0.0025$ использовалось для СКР-схемы. Теперь условия устойчивости удовлетворяются для обеих схем, но НСКР-схема дает более точное численное решение (хотя использовалось большее значение Δt), так как оно ближе к точному решению.

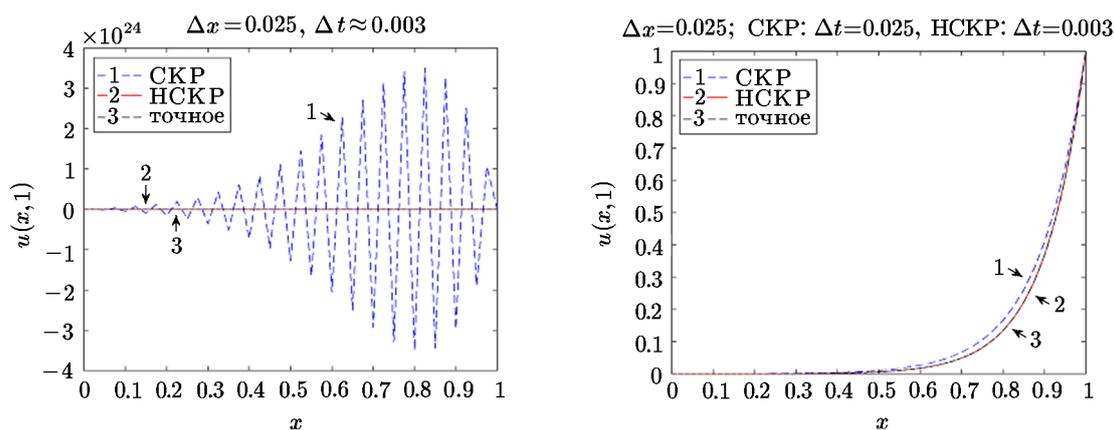


Рис. 3. Численные решения с СКР-схемы и НСКР-схемы (4.6) при $t = 1$ для $\Delta x = 0.025$ и различных значений Δt

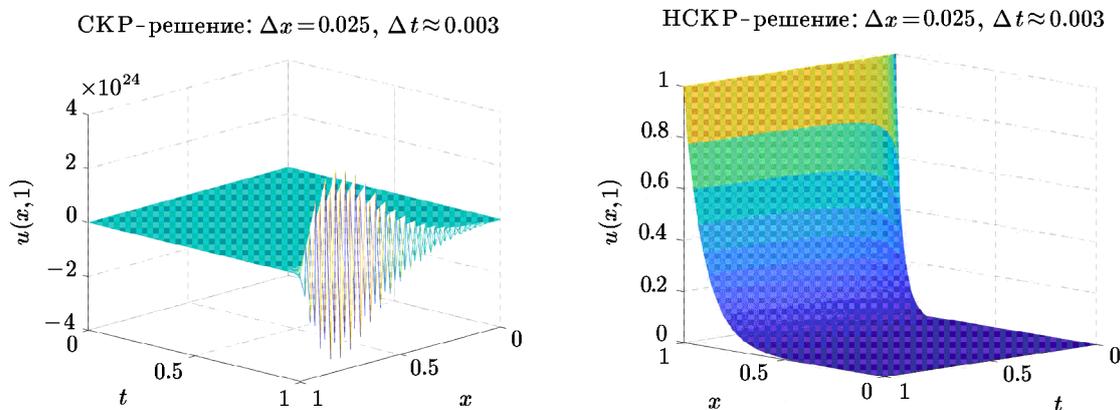


Рис. 4. Численные решения с СКР-схемы и НСКР-схемы (4.6) для $\Delta x = 0.025$ и $\Delta t \approx 0.003$

В табл. 4 приведены абсолютные ошибки, полученные с использованием СКР- и НСКР-схем в конечной временной точке $t = 1$ (с использованием равномерной нормы для сравнения численных решений в пространственных дискретных точках) при уменьшении Δx и Δt . Заметим, что Δx было уменьшено вдвое при каждом оценивании ошибки, в то время как Δt было поделено на четыре. Это было сделано для того, чтобы условия устойчивости двух методов всегда соблюдались в соответствии с рассматриваемыми значениями Δx . Из этой таблицы ясно не только то, что НСКР-схема точнее СКР-схемы, но и то, что НСКР-ошибка всегда меньше в четыре раза, а СКР-ошибка — в два раза. Этот результат — численная демонстрация того, что порядок точности НСКР-схемы равен единице по времени (как и для СКР-схемы), но двум по пространству, т. е. $u(x_m, t_k) = u_m^k + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$. Действительно, если мы предположим для простоты, что постоянная ошибки в пространстве и времени одна и та же, главный член НСКР-ошибки можно записать в виде $C(\Delta t + \Delta x^2)$. Поэтому, поделив Δx на два и Δt на четыре, мы получим $C((\Delta t/4) + (\Delta x/2)^2) = (C/4)(\Delta t + \Delta x)$. Следовательно, ошибка уменьшается в четыре раза, что имеет место и для НСКР-схемы.

Таблица 4. Абсолютные ошибки при использовании СКР-схемы и НСКР-схемы (4.6) при $t = 1$, при делении каждый раз Δx на два и Δt на четыре

Δx	Δt	СКР-ошибка	НСКР-ошибка
0.25	0.125	$1.9673 \cdot 10^{-1}$	$4.1037 \cdot 10^{-4}$
0.25/2	0.125/2 ²	$1.5528 \cdot 10^{-1}$	$1.1003 \cdot 10^{-4}$
0.25/2 ²	0.125/2 ⁴	$9.0795 \cdot 10^{-2}$	$2.8594 \cdot 10^{-5}$
0.25/2 ³	0.125/2 ⁶	$5.0098 \cdot 10^{-2}$	$7.1813 \cdot 10^{-6}$
0.25/2 ⁴	0.125/2 ⁸	$2.6664 \cdot 10^{-2}$	$1.8090 \cdot 10^{-6}$
0.25/2 ⁵	0.125/2 ¹⁰	$1.3771 \cdot 10^{-2}$	$4.6090 \cdot 10^{-7}$

Мы также провели другие численные тесты, установив сначала значение шага дискретизации по времени Δt , таким образом уменьшив Δx вдвое при каждом оценивании ошибки, а затем сделали обратное. Полученные результаты представлены в табл. 5 и табл. 6. Графики поведения ошибок представлены на рис. 5. Графики и таблицы наглядно показывают, что НСКР-схема имеет порядок точности, равный 2 по пространству. Однако в проведенных численных тестах не было задано $\Delta t = \Delta x$, что является условием, которое, как было показано, теоретически обеспечивает порядок сходимости метода НСКР, равный 2 по пространству. Следовательно, можно сделать вывод, что даже при незначительном нарушении этого условия численный порядок НСКР-схемы продолжает приближаться к 2 в пространстве.

Таблица 5. Абсолютные ошибки и оценки порядка $p(h)$ при использовании СКР-схемы и НСКР-схемы (4.6) при $t = 1$ и фиксированном $\Delta t = 10^{-6}$

Δx	СКР-ошибка	НСКР-ошибка	$p(h)$ (СКР)	$p(h)$ (НСКР)
0.25	$1.9306 \cdot 10^{-1}$	$7.4231 \cdot 10^{-4}$	—	—
0.25/2	$1.5471 \cdot 10^{-1}$	$1.9066 \cdot 10^{-4}$	0.3195	1.9610
0.25/2 ²	$9.0681 \cdot 10^{-2}$	$4.7353 \cdot 10^{-5}$	0.7707	2.0095
0.25/2 ³	$5.0077 \cdot 10^{-2}$	$1.1849 \cdot 10^{-5}$	0.8567	1.9987
0.25/2 ⁴	$2.6659 \cdot 10^{-2}$	$2.9409 \cdot 10^{-6}$	0.9095	2.0104
0.25/2 ⁵	$1.3770 \cdot 10^{-2}$	$7.1977 \cdot 10^{-7}$	0.9531	2.0306

Таблица 6. Абсолютные ошибки и оценки порядка $p(h)$ при использовании СКР-схемы и НСКР-схемы (4.6) при $t = 1$ и фиксированном $\Delta x = 0.125$

Δt	СКР-ошибка	НСКР-ошибка	$p(h)$ (СКР)	$p(h)$ (НСКР)
0.05	$2.7497 \cdot 10^{-3}$	$4.6101 \cdot 10^{-4}$	—	—
0.05/2	$5.5281 \cdot 10^{-4}$	$2.4397 \cdot 10^{-4}$	2.3144	0.9181
0.05/2 ²	$2.7993 \cdot 10^{-4}$	$1.2542 \cdot 10^{-4}$	0.9817	0.9599
0.05/2 ³	$1.4085 \cdot 10^{-4}$	$6.3581 \cdot 10^{-5}$	0.9909	0.9801
0.05/2 ⁴	$7.0647 \cdot 10^{-5}$	$3.2009 \cdot 10^{-5}$	0.9955	0.9901
0.05/2 ⁵	$3.5379 \cdot 10^{-5}$	$1.6059 \cdot 10^{-5}$	0.9977	0.9951

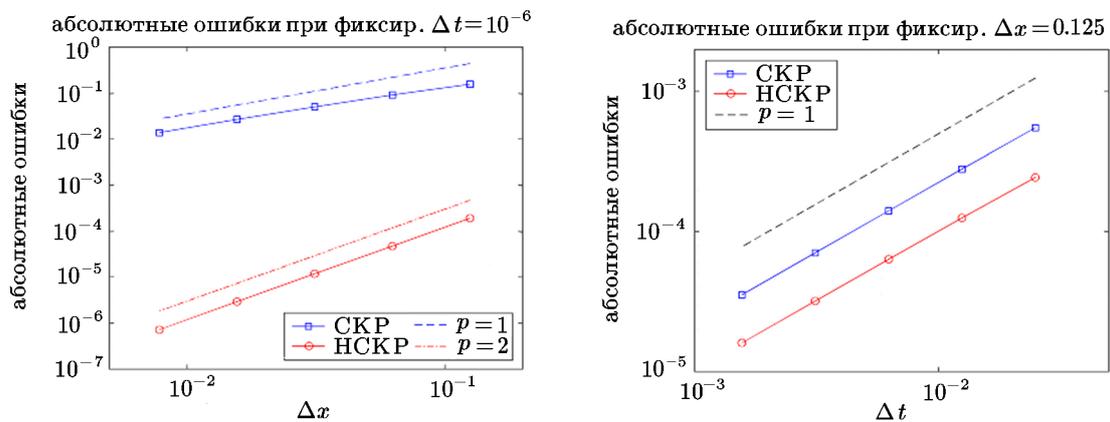


Рис. 5. Изменение абсолютных ошибок, представленных в табл. 5 и табл. 6, при фиксированном $\Delta t = 10^{-6}$ и изменяющемся Δx (слева), фиксированном $\Delta x = 0.125$ и изменяющемся Δt (справа)

4.2. Линейная адвекция–нелинейная реакция

Уравнения линейной адвекции–нелинейной реакции играют очень важную роль в некоторых областях прикладной математики. Объектом нашего анализа является, в частности, следующее одномерное в пространстве УЧП первого порядка по пространству и времени [18]:

$$u_t + u_x = u(1 - u). \quad (4.13)$$

4.2.1. НСКР-схема Миккенса

Численный метод на основе НСКР, рассматривавшийся Миккенсом, может быть получен путем соответствующей рекомбинации нестандартных схем следующих подуравнений исходного УЧП (4.13), т. е. снова путем применения метода расщепления:

$$u_t + u_x = 0, \quad u_t = u(1 - u), \quad u_x = u(1 - u). \quad (4.14)$$

Точная схема первого подуравнения представлена в предыдущем пункте. Что касается двух последних уравнений (единственное отличие которых — переменная, относительно которой получается производная), то их точные численные схемы имеют, соответственно, следующий вид:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{e^{\Delta t} - 1} = u^k - u^{k+1}u^k, \quad \frac{u_m - u_{m-1}}{e^{\Delta x} - 1} = u_{m-1} - u_m u_{m-1}. \quad (4.15)$$

Следовательно, окончательная явная во времени НСКР-схема, рассматривавшаяся Миккенсом, для которой должно выполняться соотношение $\Delta t = \Delta x = h$, имеет вид

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{e^{\Delta t} - 1} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{e^{\Delta x} - 1} = u_{m-1}^k - u_m^{k+1} u_{m-1}^k. \quad (4.16)$$

Легко заметить, что полученная численная схема дает положительные решения для каждого значения шага дискретизации $h > 0$. СКР-схема, которую мы рассматриваем в данном случае, имеет вид

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t} + \frac{u_m^k - u_{m-1}^k}{\Delta x} = u_m^k (1 - u_m^k). \quad (4.17)$$

4.2.2. Наш вклад

Для выполнения численных тестов и оценивания точности (т. е. определения ошибок) СКР- и НСКР-схем рассмотрим точное решение дифференциального уравнения (4.13). При фиксированном условии $u(x, 0) = f(x)$ (f — общая функция, зависящая от пространственной переменной x) аналитическое выражение для его точного решения следующее [18]:

$$u(x, t) = \frac{f(x - t)}{e^{-t} + (1 - e^{-t})f(x - t)}. \quad (4.18)$$

Поэтому мы определили численные решения в прямоугольной сетке $[0, 1] \times [0, 1]$, взяв $u(x, 0) = f(x) = \cos(x)$ в качестве начального условия. Граничные условия получаются из начального условия. Используя СКР- и НСКР-схемы, $\Delta x = \Delta t = 0.1$ и оценивая относительные ошибки при $t = 1$, получим

$$\text{СКР-ошибка} = 7.8611 \cdot 10^{-4}, \quad \text{НСКР-ошибка} = 8.8460 \cdot 10^{-17}.$$

Поэтому представляется, что НСКР-схема, полученная путем рекомбинации точных конечно-разностных схем для рассматриваемых подуровней, также является точной. Эта гипотеза находит подтверждение в книге Миккенса [17].

5. Выводы

В данной статье мы проанализировали построение НСКР-схем для ОДУ и УЧП различных типов, представив численные результаты и некоторые теоремы, показывающие преимущества схем на основе НСКР над схемами СКР.

Для проанализированных систем ОДУ было показано, что численные схемы на основе НСКР дают устойчивые решения, в отличие от СКР. С другой стороны, если нам нужны точные численные решения, удобно использовать схемы на основе СКР, даже если в этом случае необходим малый размер шага дискретизации и, следовательно, большое время расчета. Наконец, можно сделать вывод, что если нас интересует понимание качественного анализа поведения решения на больших интервалах, рекомендуется использовать численные методы на основе НСКР, так как они являются явными и не требуют малых шагов дискретизации, а поэтому дешевле, чем соответствующие стандартные схемы.

НСКР-схемы, представленные для проанализированных УЧП, являются более точными, чем соответствующие стандартные схемы. В этом случае с помощью метода расщепления можно определить точные схемы для подуровней, полученных из исходного УЧП. Это приводит к более точным НСКР-схемам, чем соответствующие стандартные

методы. Кроме того, мы продемонстрировали, что НСКР может повысить порядок соответствующих СКР-методов.

В данной работе показано, что помимо сохранения устойчивости численного решения с увеличением времени, другим качественным свойством точного решения, сохраняемым в НСКР-схемах, является положительность. Однако, как упоминалось во введении, существуют и другие качественные свойства модели, которые можно воспроизвести с помощью построенной НСКР-схемы. Если точное решение осциллирует с известной частотой, было бы интересно и полезно проследить его отклонение от численного решения, например с помощью экспоненциальной подгонки [5, 6, 11].

Литература

1. **Anguelov R., Lubuma J.M.S.** Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications // *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* — 2001. — Vol. 17, iss. 5. — P. 518–543.
2. **Budroni M.A., Pagano G., Paternoster B. et al.** Synchronization scenarios induced by delayed communication in arrays of diffusively coupled autonomous chemical oscillators // *Physical Chemistry Chemical Physics.* — 2021. — Vol. 23, № 32. — P. 17606–17615.
3. **Budroni M.A., Pagano G., Paternoster B. et al.** A model for coupled Belousov–Zhabotinsky oscillators with delay // *Proc. 14th WCCM-ECCOMAS Congress 2020.* — 2021. — DOI: 10.23967/wccm-eccomas.2020.026.
4. **Bulai I.M., Cavoretto R., Chialva B., Duma D., Venturino E.** Comparing disease-control policies for interacting wild populations // *Nonlinear Dyn.* — 2015. — Vol. 79, № 3. — P. 1881–1900.
5. **Conte D., D’Ambrosio R., Moccaldi M., Paternoster B.** Adapted explicit two-step peer methods // *J. Numer. Math.* — 2018. — Vol. 27, № 2. — P. 69–83.
6. **Conte D., Mohammadi F., Moradi L., Paternoster B.** Exponentially fitted two-step peer methods for oscillatory problems // *Comput. Appl. Math.* — 2020. — Vol. 39, № 3. — DOI: 10.1007/s40314-020-01202-x.
7. **Eigentler L., Sherratt J.A.** Metastability as a coexistence mechanism in a model for dryland vegetation patterns // *Bull. Math. Biol.* — 2019. — Vol. 81. — P. 2290–2322.
8. **Ferziger J.H., Peric M.** *Computational Methods for Fluid Dynamics.* — Springer, 1996.
9. **Ganegoda N., Götz T., Putra Wijaya K.** An age-dependent model for dengue transmission: Analysis and comparison to field data // *Appl. Math. Comput.* — 2021. — Vol. 388. — DOI: 10.1016/j.amc.2020.125538.
10. **Giamberardino P.D., Iacoviello D., Papa F., Sinisgalli C.** Dynamical evolution of COVID-19 in Italy with an evaluation of the size of the asymptomatic infective population // *IEEE J. Biomed.* — 2021. — Vol. 25, № 4. — P. 1326–1332.
11. **Ixaru L., Berghe G.** *Exponential Fitting.* — Springer, 2004. — DOI: 10.1007/978-1-4020-2100-8.
12. **Kermack W.O., McKendrick A.G.** Contributions to the mathematical theory of epidemics—I // *Bull. Math. Biol.* — 1991. — Vol. 53. — P. 33–55.
13. **Koroglu C.** Exact and nonstandard finite difference schemes for the generalized KdV–Burgers equation // *Adv. Differ. Equ.* — 2020. — URL: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02584-2>.
14. **Mickens R.E.** Calculation of denominator functions for nonstandard finite difference schemes for differential equations satisfying a positivity condition // *Numer. Methods Partial Differ. Equ.* — 2007. — Vol. 23. — P. 672–691.
15. **Mickens R.E.** Dynamic consistency: a fundamental principle for constructing nonstandard finite difference schemes for differential equations // *J. Differ. Equ. Appl.* — 2005. — Vol. 11. — P. 645–653.

16. **Mickens R.E.** Analysis of a new finite-difference scheme for the linear advection-diffusion equation // J. Sound Vib. — 1991. — Vol. 146, iss. 2. — P. 342–344.
17. **Mickens R.E.** Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations. — World Scientific Publishing, 1993.
18. **Mickens R.E.** Exact solutions to a finite-difference model of a nonlinear reaction-advection equation: implications for numerical analysis // Numer. Methods Partial Differ. Equ. — 1989. — Vol. 5. — P. 313–325.
19. **Murray J.D.** Mathematical Biology. — Springer, 1993.
20. **Previdi F.** Esempio. Modelli compartimentali epidemiologici per la descrizione della diffusione delle infezioni // University Lecture Notes. — 2020. — P. 1–35.
21. **Markus A., Mickens R.E.** Suppression of numerically induced chaos with nonstandard finite difference schemes // J. Comput. Appl. Math. — 1999. — Vol. 106. — P. 317–324.
22. **Shaikh T.S., Fayyaz N., Ahmed N. et al.** Numerical study for epidemic model of hepatitis-B virus // Eur. Phys. J. Plus. — 2021. — Vol. 136. — Article № 367.
23. **Ud Din R., Shah K., Ahmad I., Abdeljawad T.** Study of transmission dynamics of novel COVID-19 by using mathematical model // Adv. Differ. Equ. — 2020. — Article № 323. — URL: <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02783-x>.
24. **Viguerie A., Veneziani A., Lorenzo G. et al.** Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study // Comput. Mech. — 2020. — Vol. 66. — P. 1131–1152. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00466-020-01888-0>.

Поступила в редакцию 19 ноября 2021 г.

После исправления 16 декабря 2021 г.

Принята к печати 24 апреля 2022 г.

