УДК 519.63

Линейные квазимонотонные и гибридные сеточно-характеристические схемы для численного решения задач линейной акустики*†

Е.К. Гусева, В.И. Голубев, И.Б. Петров

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), пер. Институтский, 9, Долгопрудный, 141701

E-mails: guseva.ek@phystech.edu (Гусева Е.К.), golubev.vi@mipt.ru (Голубев В.И.), petrov@mipt.ru (Петров И.Б.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 2, Vol. 16, 2023.

Гусева Е.К., Голубев В.И., Петров И.Б. Линейные квазимонотонные и гибридные сеточно-характеристические схемы для численного решения задач линейной акустики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 135–147.

Система уравнений линейной акустики является гиперболической и описывает процесс распространения акустических волн в деформируемой среде. Важным свойством используемых для её численного решения схем является высокий порядок аппроксимации. Оно позволяет проводить моделирование процесса распространения возмущений на достаточно большие расстояния. Не менее важным является свойство монотонности используемых схем, предотвращающее появление нефизических осцилляций решения. В настоящей работе представлены линейные квазимонотонные и гибридные сеточно-характеристические схемы для линейного уравнения переноса и одномерной акустической системы. Для их построения использован метод анализа в пространстве неопределённых коэффициентов, предложенный Холодовым А.С., и сеточно-характеристический критерий монотонности. Рассматривались широкие пространственные шаблоны, включающие от пяти до семи узлов расчётной сетки. На задаче об отражении продольной волны с резким фронтом от границы раздела сред с различающимися параметрами проведено сравнение полученных численных решений.

DOI: 10.15372/SJNM20230202

Ключевые слова: *сеточно-характеристический метод, критерий монотонности, гибридные схемы, акустические волны.*

Guseva E.K., Golubev V.I., Petrov I.B. Linear quasi-monotonous and hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of linear acoustic problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 135–147.

The system of linear acoustic equations is hyperbolic. It describes the process of the acoustic wave propagation in deformable media. An important property of the schemes used for the numerical solution is their high approximation order. This property allows one to simulate the perturbation propagation process over sufficiently large distances. Another important property is monotonicity of the schemes used, which prevents the appearance of non-physical solution oscillations. In this paper, we present linear quasi-monotone and hybrid grid-characteristic schemes for a linear transport equation and a one-dimensional acoustic system. They are constructed by a method of analysis in the space of unknown coefficients proposed by A.S. Kholodov and a grid-characteristic monotonicity criterion. Wide spatial stencils with five to seven nodes of the computational

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-10015).

†Работа была представлена на международной конференции "Марчуковские научные чтения – 2022".

grid are considered. Reflection of a longitudinal wave with a sharp front from the interface between media with different parameters is used to compare the numerical solutions.

Keywords: *grid-characteristic method, monotonicity criterion, hybrid schemes, acoustic waves.*

1. Введение

Системы уравнений гиперболического типа встречаются в различных областях науки и техники, например, в задачах моделирования плазмы, задачах неразрушающего контроля композитных материалов, прямых и обратных задачах сейсмической разведки. Одним из хорошо зарекомендовавших себя численных методов их решения является сеточно-характеристический метод [1], основанный на переходе в характеристические переменные задачи и сведении её к задаче интерполяции на заданном пространственном шаблоне. Он был успешно использован при решении ряда практических задач [2–4].

Необходимо отметить, что волновые задачи предъявляют значительные требования к свойствам используемых численных схем. В частности, повышенный порядок аппроксимации гарантирует точное разрешение волн и слабое их затухание из-за численной диссипации [5], а монотонность [6–10] — отсутствие нефизических осцилляций решения. Простейшим примером гиперболического уравнения является одномерное линейное уравнение переноса с постоянным коэффициентом. Согласно теореме Годунова, даже для него невозможно построить линейную монотонную схему с порядком аппроксимации выше первого. Одним из используемых подходов является процедура гибридизации. При этом фактически строится нелинейная схема, коэффициенты которой зависят от самого решения.

В настоящей работе рассматривается широкий класс сеточно-характеристических схем для численного решения одномерного линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Используются широкие пространственные шаблоны (от пятиточечного до семиточечного), что позволяет построить схемы до пятого порядка аппроксимации включительно. Рассмотрение множества линейных схем в пространстве неопределённых коэффициентов (согласно идеям Холодова [11]) позволило построить квазимонотонные, а также гибридные схемы повышенного порядка аппроксимации. Их поведение было сопоставлено на одномерной задаче линейной акустики [12]. Данная работа является развитием идей, опубликованных в статьях [13, 14].

2. Сеточно-характеристические схемы

2.1. Квазимонотонные линейные сеточно-характеристические схемы

Рассмотрим одномерное линейное уравнение переноса с постоянным коэффициентом

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda = \mathrm{const},\ u(0,x) = u^0(x),\ u(t,0) = u^1(t). \tag{1}$$

Его аналитическое решение имеет вид

$$u(t,x) = u^* = \begin{cases} u^0(x-\lambda t) & \text{для } x-\lambda t > 0, \\ u^1\Big(t - \dfrac{x}{\lambda}\Big) & \text{для } x - \lambda t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

и u^* сохраняется вдоль характеристики, задаваемой уравнением $\dfrac{dx}{dt} = \lambda$.

Рассмотрим семейство линейных схем на регулярных расчётных сетках, имеющее общий вид: $u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\tau,h) u_{m+\mu}^{n+\nu}$, $\mu,\nu = 0, \pm1, \pm2$. Используя разложение в ряд Тейлора, возможно получить систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты α_μ^ν, обеспечивающую требуемый порядок аппроксимации. Для первого порядка аппроксимации получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\tau,h) = 1, \\ \sum\limits_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma)\alpha_\mu^\nu(\tau,h) = -\sigma, \end{cases} \tag{3}$$

где $\sigma = \dfrac{c\tau}{h}$. Для получения k-го порядка к системе выше добавляются следующие уравнения:

$$\sum_{\mu,\nu} (\mu - \nu\sigma) k \alpha_\mu^\nu(\tau,h) = (-\sigma)^k, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

В настоящей работе рассматривались схемы на следующих шаблонах:
семиточечном $(t_{n+1}, x_m), (t_n, x_{m-3}), (t_n, x_{m-2}), (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_n, x_{m+1}), (t_n, x_{m+2})$,
пятиточечном $(t_{n+1}, x_m), (t_n, x_{m-2}), (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_n, x_{m+1})$,
шеститочечном $(t_{n+1}, x_m), (t_n, x_{m-2}), (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_n, x_{m+1}), (t_n, x_{m+2})$.

Известно, что не существует монотонных линейных схем с порядком аппроксимации выше первого. Однако из всего множества линейных схем отдельно стоит выделить квазимонотонные схемы или схемы с минимальными осцилляциями. Данные схемы наиболее близки к области монотонных по Фридрихсу [15] схем $\left(\alpha_\mu^\nu \geq 0\right)$ в пространстве коэффициентов $\alpha_\mu^\nu(\tau,h)$ по норме $D = \sqrt{\sum_{\mu,\nu} (\alpha_\mu^\nu - {\alpha_A}_\mu^\nu)^2}$ среди всех линейных схем повышенного порядка аппроксимации. Благодаря этому, следует ожидать, что они будут порождать меньше осцилляций. В рассматриваемый в настоящей работе набор линейных схем также вошли сеточно-характеристическая схема 3-го порядка аппроксимации Русанова [16], которая в дальнейшем будет сокращаться до РУС на графиках, схемы Лакса–Вендроффа [17] (ЛВ) и Бима–Уорминга [18] (БУ) 2-го порядка и схема Куранта–Изаксона–Рис [19] (КИР) 1-го порядка, построенные на пятиточечном шаблоне:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{РУС}} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) - \\ \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n), \end{aligned} \tag{5}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{ЛВ}} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n), \tag{6}$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma(u_m^u - u_{m-1}^n) + \frac{\sigma}{2}(\sigma - 1)(u_m^n - 2u_{m-1}^n + u_{m-2}^n), \tag{7}$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma(u_{m-1}^n - u_m^n). \tag{8}$$

К тому же, на пятиточечном шаблоне были выбраны ещё три схемы второго порядка, одна из которых является квазимонотонной (км5ш2п)[1], а две другие (5ш2п1 и 5ш2п2) не имеют именного названия:

[1]Здесь и далее в названиях “км” означает квазимонотонность схемы, “<число>ш” говорит о числе точек в шаблоне, “<число>п” показывает порядок аппроксимации схемы.

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{ЛВ}} + 0.3\sigma(\sigma - 1)(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n), \tag{9}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{ЛВ}} + \frac{\sigma^2}{4}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n), \tag{10}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{ЛВ}} - \frac{1-\sigma^2}{4}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + 3u_m^n - u_{m+1}^n). \tag{11}$$

Дополнительное число в конце названия может ставиться для того, чтобы отличить схемы, у которых совпадают все предыдущие параметры. Для сокращения записи формул в месте, где можно вставить формулу из схемы Лакса–Вендроффа, используется сокращение $[u_m^n]_{\text{ЛВ}}$, а для формулы из схемы Русанова — $[u_m^n]_{\text{РУС}}$. На шеститочечном шаблоне рассматривались схема четвёртого порядка (6ш4п) сокращение $[u_m^n]_{\text{6S4O}}$, квазимонотононные схемы третьего (км6ш3п) и второго (км6ш2п) порядков, а также ещё одна схема третьего порядка (6ш3п):

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{6S4O}} = u_m^n + {} & \frac{\sigma}{12}(u_{m+2}^n - 8u_{m+1}^n + 8u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) - \\ & \frac{\sigma^2}{24}(u_{m+2}^n - 16u_{m+1}^n + 30u_m^n - 16u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) - \\ & \frac{\sigma^3}{12}(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) + \\ & \frac{\sigma^4}{24}(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n), \end{aligned} \tag{12}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{РУС}} + \frac{\sigma(\sigma-1)(17-19\,\sigma)(3-2\,\sigma)}{228}(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n), \tag{13}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{РУС}} + \frac{3\sigma(\sigma - 1)}{19}(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n), \tag{14}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{РУС}} + \frac{(3 - 2\sigma)(\sigma^2 - 1)}{24}(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n). \tag{15}$$

На семиточечном шаблоне рассматривались схема пятого порядка (7ш5п), квазимонотонные схемы четвёртого (км7ш4п), третьего (км7ш3п) и второго (км7ш2п) порядков:

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} = u_m^n + {} & \frac{\sigma}{60}(2u_{m-3}^n - 15u_{m-2}^n + 60u_{m-1}^n - 20u_m^n - 30u_{m+1}^n + 3u_{m+2}^n) - \\ & \frac{\sigma^2}{24}(u_{m-2}^n - 16u_{m-1}^n + 30u_m^n - 16u_{m+1}^n + u_{m+2}^n) - \\ & \frac{\sigma^3}{24}(u_{m-3}^n - 7u_{m-2}^n + 14u_{m-1}^n - 10u_m^n + u_{m+1}^n + u_{m+2}^n) + \\ & \frac{\sigma^4}{24}(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n) + \\ & \frac{\sigma^5}{120}(u_{m-3}^n - 5u_{m-2}^n + 10u_{m-1}^n - 10u_m^n + 5u_{m+1}^n - u_{m+2}^n), \end{aligned} \tag{16}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{6S4O}} + \frac{80\sigma(\sigma^3 - 1)}{6851}(u_{m-3}^n - 5u_{m-2}^n + 10u_{m-1}^n - 10u_m^n + 5u_{m+1}^n - u_{m+2}^n), \tag{17}$$

$$u_m^{n+1} = [u_m^n]_{\text{РУС}} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{5}\left(\frac{43}{47} - \frac{179(\sigma+1)}{564}\right)(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n) +$$

$$\frac{\sigma(\sigma-1)}{5}\left(\frac{8}{47}+\frac{19(\sigma+1)}{141}\right)(u^n_{m-3}-4u^n_{m-2}+6u^n_{m-1}-4u^n_m+u^n_{m+1}), \quad (18)$$

$$u^{n+1}_m = [u^n_m]_{\text{лв}} + \frac{\sigma(\sigma-1)}{83}\Big(8(u^n_{m-3}-6u^n_{m-1}+8u^n_m-3u^n_{m+1}) + 3(u^n_{m-2}-4u^n_{m-1}+6u^n_m-4u^n_{m+1}+u^n_{m+2})\Big). \quad (19)$$

2.2. Монотонные гибридные сеточно-характеристические схемы

Для построения монотонной расчётной схемы может быть применена процедура гибридизации. Она заключается в следующем:

1) расчёт u^{n+1}_m по схеме наивысшего порядка аппроксимации из рассмотренного множества линейных схем;
2) проверка критерия монотонности. Если он выполнен, то используется рассчитанное значение. Если он не выполнен, то процедура повторяется для схемы такого же порядка или на порядок ниже.

В работе использовался сеточно-характеристический критерий монотонности

$$\min\{u^n_1, u^n_2\} \le u^{n+1}_m \le \max\{u^n_1, u^n_2\}, \quad (20)$$

где u^n_1, u^n_2 — значения сеточной функции на слое $t = t^n$ в ближайших к характеристике, исходящей из точки (t^{n+1}, x_m), точках шаблона.

В работе было построено 19 различных гибридных схем. Их названия составлены как комбинации линейных схем из пункта 2.1 в порядке использования в алгоритме гибридизации, разделённые нижним подчёркиванием.

Две схемы были построены на пятиточечном шаблоне:

1. рус_бу_лв_5ш_2п1_5ш2п2_км5ш2п;
2. рус_бу_лв_кир.

Четыре схемы были построены на шеститочечном шаблоне:

3. 6ш4п_рус;
4. 6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п;
5. 6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км6ш2п;
6. 6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км6ш2п_кир.

Остальные схемы были построены на семиточечном шаблоне. Во-первых, гибридные схемы, комбинирующие схемы 4-го и 5-го порядков:

7. 7ш5п_6ш4п;
8. 7ш5п_км7ш4п;
9. 7ш5п_6ш4п_км7ш4п.

Во-вторых, комбинации схем 3–5-го порядков:

10. 7ш5п_рус;
11. 7ш5п_км7ш3п;
12. 7ш5п_км6ш3п_кв7ш3п;

13. 7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п_кв6ш3п_кв7ш3п;
14. 7ш5п_км7ш4п_кв6ш3п_кв7ш3п.

В-третьих, комбинации схем 2–5-го порядков:

15. 7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км7ш3п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п;
16. 7ш5п_км7ш4п_км6м3п_км7ш3п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п;
17. 7ш5п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п.

В-четвёртых, схемы, комбинирующие схемы 1–5-го порядков:

18. 7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км7ш3п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п_кир;
19. 7ш5п_км7ш4п_км6м3п_км7ш3п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п_кир.

3. Вычислительный эксперимент

3.1. Постановка задачи

Динамическое поведение акустической среды в одномерной постановке описывается следующей системой уравнений: $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$, $\dfrac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2\dfrac{\partial v}{\partial x}$. В ней использованы неизвестные v — скорость, p — давление и параметры среды ρ — плотность, c — скорость волны. Для построения расчётного алгоритма запишем уравнения в канонической форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad \text{где } \mathbf{u} = (v, p)^\top, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A равны $\lambda_{1,2} = \pm c$. Матрица левых собственных векторов $L = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\rho c} \\ 1 & -\dfrac{1}{\rho c} \end{pmatrix}$, матрица правых собственных векторов $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho c & -\rho c \end{pmatrix}$. Использование замены переменных вида $\mathbf{w} = L\mathbf{u} = \begin{pmatrix} v + \dfrac{p}{\rho c} \\ v - \dfrac{p}{\rho c} \end{pmatrix}$ сводит начальную систему уравнений к системе независимых линейных одномерных уравнений переноса: $\dfrac{\partial w_1}{\partial t} + c\dfrac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0$, $\dfrac{\partial w_2}{\partial t} - c\dfrac{\partial w_2}{\partial \xi}$. Именно на данном этапе для построения решения использовались схемы, перечисленные в пункте 2. Обратное преобразование возвращало реконструированное решение в изначальные переменные: $\mathbf{u} = R\mathbf{w} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ \rho c(w_1 - w_2) \end{pmatrix}$.

Описанный выше подход справедлив для случая, когда параметры среды не зависят от координаты. Сеточно-характеристический подход позволяет получить решение задачи о контакте двух тел с различающимися параметрами. В работе считалось, что тела находятся в постоянном контакте, т. е. использовалось условие “полного слипания” (равенство давлений и скоростей в общей точке двух тел). В контактных узлах значения рассчитываются по формулам:

$$P = \frac{c_L\rho_L p_R + c_R\rho_R p_L + c_L\rho_L c_R\rho_R(v_L - v_R)}{c_L\rho_L + c_R\rho_R},$$

$$p_L^* = p_R^* = P, \qquad v_L^* = v_L + \frac{p_L - P}{c_L \rho_L}, \qquad v_R^* = v_R + \frac{p_R - P}{c_R \rho_R}.$$

Здесь звёздочкой помечены новые значения неизвестных после коррекции.

В качестве расчётной области рассматривался отрезок $[-1\,\text{м}, 1\,\text{м}]$, который разбивался на две области с границей в точке 0. Параметры сред: $c_L = 2842\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\rho_L = 19250\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $c_R = 3130\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\rho_L = 2760\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Шаг по пространству был выбран $h = 1\,\text{мм}$, а по времени $\tau = 2 \cdot 10^{-7}\text{с}$. Общее время моделирования составляло $0.6\,\text{мс}$, число Куранта $\frac{\max\{c_L, c_R\}\tau}{h} \approx 0.626$. В качестве начального условия задавалась прямоугольная продольная волна с амплитудой скорости, равной 100 условным единицам, шириной в 200 ячеек, находящаяся в левой области и сдвинутая вправо на 50 ячеек от левой границы области.

3.2. Результаты расчётов

Результаты проведённых вычислительных экспериментов представлены на рисунках 1–3. По вертикальной оси на всех рисунках отложена амплитуда сигнала в процентах от величины начального возмущения. На рис. 1 представлен волновой фронт в моменты времени до и после прохождения через границу раздела сред. Представлены результаты расчётов по линейной схеме пятого порядка и одной из рассматриваемых гибридных схем. Подтверждено, что все схемы восстанавливают аналитически рассчитанные амплитуды прошедших и отражённых волн. Дальнейшее сравнение схем производилось на прошедшей волне (область вблизи её правой границы). В таблице представлены количественные оценки нормы разности между реконструированным и аналитическим решениями.

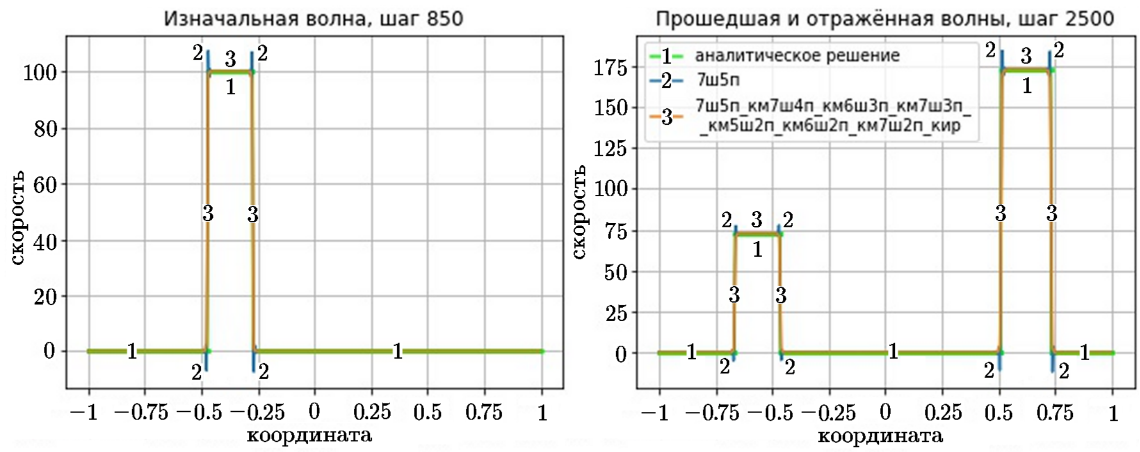

Рис. 1. Пространственное распределение скорости точек среды до и после прохождения волны через границу раздела сред

На рис. 2 (слева) представлены результаты, полученные с использованием линейных схем второго и первого порядков аппроксимации. Схема первого порядка Куранта–Изаксона–Риса, являясь монотонной, не порождает осцилляций и довольно плохо разрешает разрыв, что подтверждается тем фактом, что данная схема имеет наивысшие нормы L_1, L_2 среди всех схем, согласно таблице. Схемы чётных порядков показывают несимметричный результат. Квазимонотонные схемы производят наименьшее число осцилляций. Среди них именно схема на пятиточечном шаблоне демонстрирует их наименьшую амплитуду и лучше остальных воспроизводит разрыв. По качеству восстановления решения за ней следуют подобные схемы на семиточечном и шеститочечном шаблонах, что также подтверждается в таблице.

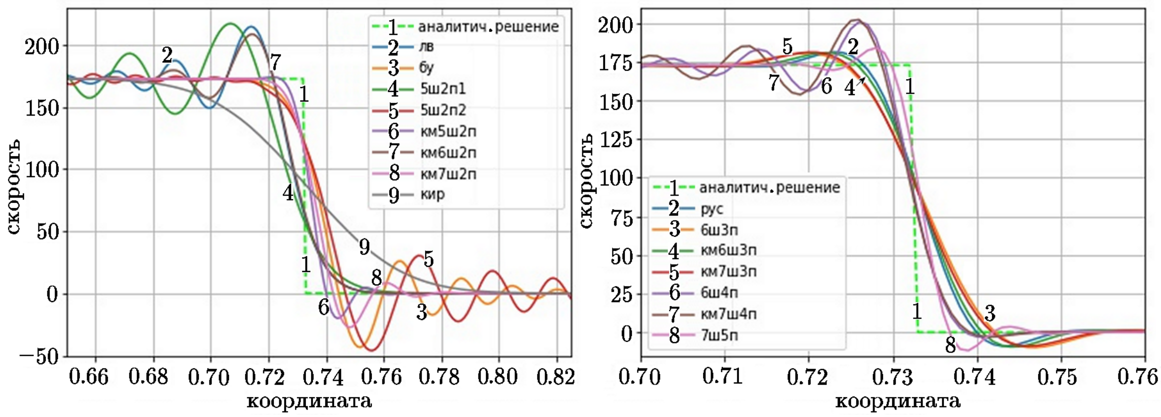

Рис. 2. Пространственное распределение скорости точек среды в прошедшей волне. Результаты, полученные по линейным схемам

На рис. 2 (справа) показано сравнение результатов, полученных с помощью схем третьего–пятого порядков аппроксимации. У схем третьего порядка амплитуды осцилляций почти одинаковы, однако ближе всего к разрыву восстанавливает решение схема Русанова. Немного хуже ведёт себя квазимонотонная схема на шеститочечном шаблоне. Следующей по качеству восстановления решения идёт квазимонотонная схема на семиточечном шаблоне, поведение которой почти совпадает с неназванной схемой на шеститочечном шаблоне, аналогичная последовательность прослеживается в таблице. Согласно графику и таблице, среди схем четвёртого порядка лучше всех ведёт себя схема на шеститочечном шаблоне. Схема пятого порядка лучше всех восстанавливает разрыв, и амплитуда её осцилляций лишь немного превышает амплитуду осцилляций схем третьего порядка, что подтверждается наименьшими значениями норм данной схемы в таблице. С повышением порядка аппроксимации схемы решение реконструируется ближе к разрыву. По-видимому, расширение шаблона приводит к повышению численной ошибки, которая увеличивает амплитуду осцилляций схемы и ухудшает воспроизведение решения вблизи разрыва. Благодаря этому неквазимонотонные схемы могут демонстрировать немного лучшее поведение, чем квазимонотонные на разных шаблонах.

На рис. 3 представлены результаты, полученные с использованием гибридных схем. На левом верхнем рисунке показано, что численные решения, полученные с использованием гибридных схем, комбинирующих линейные схемы 4-го и 5-го порядков, мало отличаются. В случае отсутствия монотонности решения используется последняя схема в наборе линейных схем, используемом для гибридизации. Таким образом, именно она определяет поведение численного решения. Аналогично, результаты расчётов по гибридным схемам, комбинирующим линейные схемы 3–5-го порядков, практически полностью совпадают.

На правом верхнем рисунке сравниваются комбинации схем 2-го и 3-го, 2–4-го, 2–5-го порядков. Не обнаружены значительные отличия при комбинировании схем 2–5-го порядков. Осцилляции схем коррелируют с осцилляциями последней схемы в наборе линейных схем, используемом при гибридизации. Комбинация схем 2-го и 3-го порядков не демонстрирует осцилляции и практически совпадает с комбинацией схем 1–3-го порядков. Таким образом, можно избежать использования схемы первого порядка для сглаживания осцилляций. Можно предположить, что данный эффект связан с выбором схем второго порядка, зеркально отражающих результаты друг друга, тогда как в областях отсутствия монотонности используются схемы второго порядка, которые не имеют осцилляций в данной области. Отметим, что схемы на более широких шаблонах лучше восстанавливают решение вблизи разрыва. Важно, что наличие в наборе линейных схем для гибридизации схем промежуточных порядков между схемами наивысшего и наименьшего порядков аппроксимации не повлияло на результаты расчёта. Нормы вышеописанных гибридных схем также отличаются малозначительно, согласно таблице.

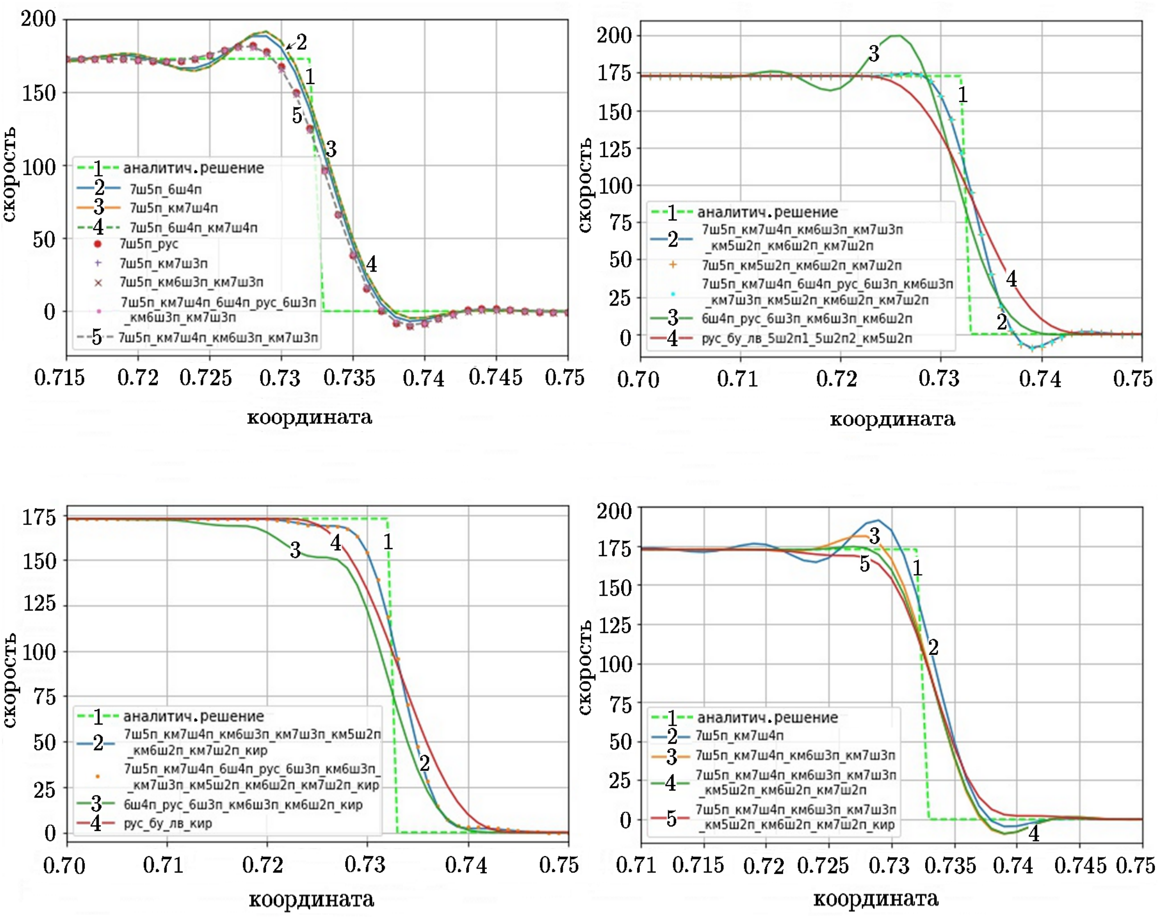

Рис. 3. Пространственное распределение скорости точек среды в прошедшей волне. Результаты, полученные по гибридным схемам

На левом нижнем рисунке рис. 3 представлены результаты расчёта гибридными схемами, комбинирующими линейные схемы 1–3-го, 1–4-го, 1–5-го порядков аппроксимации. Использование схем первого порядка сглаживает все осцилляции, однако возникают области переключения схем повышенного порядка на схемы более низких порядков, что является значительным недостатком данных схем. Например, из-за данного эффекта схема на шеститочечном шаблоне немного хуже восстанавливает разрыв, чем схема на пятиточечном шаблоне, которая, в свою очередь, уступает схемам на семиточечном шаблоне. Среди схем на самом широком шаблоне схема, использующая только квазимонотонные схемы 2–4-го порядков, ведёт себя немного лучше справа от разрыва. В остальном результаты, получаемые по данным схемам, совпадают. Данный тренд также прослеживается в таблице.

Таблица. Нормы разности между реконструированным и аналитическим решениями на шаге 2500, структурированные по порядку аппроксимации схем и по убыванию норм для схем с одинаковым порядком

Название схемы	Норма L_1	Норма L_2	Норма L_∞
кир	10046.18	651.54	87.16
5ш2п1	8896.84	556.95	130.57
5ш2п2	8154.77	524.33	117.94
бу	5617.85	455.77	117.90
лв	5446.57	450.04	116.21
км6ш2п	4537.18	419.99	113.38
км7ш2п	3155.54	355.88	111.23
км5ш2п	2057.25	287.53	106.39
6ш3п	2300.88	298.01	93.38
км7ш3п	2187.22	290.45	90.62
км6ш3п	1901.45	271.48	92.50
рус	1714.44	258.46	91.80
км7ш4п	2133.58	255.79	106.01
6ш4п	1798.41	240.80	104.45
7ш5п	1044.35	199.21	96.72
7ш5п_6ш4п_км7ш4п	1127.83	214.56	113.65
7ш5п_км7ш4п	1126.58	214.58	113.67
7ш5п_6ш4п	1085.80	207.67	108.28
7ш5п_рус	1014.15	201.80	96.94
7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п _км6ш3п_км7ш3п	1013.64	203.61	95.90
7ш5п_км7ш4п_км6ш3п_км7ш3п	1013.57	203.52	97.00
7ш5п_км7ш3п	1012.65	203.14	96.44
7ш5п_км6ш3п_км7ш3п	1012.55	203.21	96.53
7ш5п_км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п	989.61	207.04	94.99
7ш5п_км7ш4п_км6ш3п_км7ш3п _км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п	986.96	207.62	95.33
7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п _км6ш3п_км7ш3п_км5ш2п_км6ш2п _км7ш2п	986.93	207.45	94.87
7ш5п_км7ш4п_6ш4п_рус_6ш3п _км6ш3п_км7ш3п_км5ш2п _км6ш2п _км7ш2п_кир	1175.59	220.65	95.40
7ш5п_км7ш4п_км6ш3п_км7ш3п _км5ш2п_км6ш2п_км7ш2п_кир	1152.82	219.72	95.21
6ш4п_рус	1369.50	238.94	112.14
6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п	1292.32	248.32	117.51
6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км6ш2п	1581.89	248.54	109.14
6ш4п_рус_6ш3п_км6ш3п_км6ш2п_кир	1884.08	279.89	112.22
рус_бу_лв_5ш2п1_5ш2п2_км5ш2п	1687.39	274.85	91.90
рус_бу_лв_кир	1687.29	274.72	91.89

На правом нижнем рисунке рис. 3 показано сравнение комбинаций схем 1–5-го, 2–5-го, 3–5-го, 4-го и 5-го порядков. Заметна следующая закономерность: при добавлении новых схем более низкого порядка аппроксимации в набор линейных схем для гибридизации итоговые осцилляции решения сильнее уменьшаются. Они полностью сглаживаются при использовании схемы первого порядка. При этом падает точность решения вблизи разрыва, что согласуется с увеличением норм в таблице по сравнению с другими гибридными схемами на данном шаблоне. Из результатов эксперимента следует, что лучше всего ведёт себя комбинация схем 1–5-го порядков, которая использует только квазимонотонные схемы 2–4-го порядков. Она демонстрирует отсутствие осцилляций и приемлемую точность реконструкции решения вблизи разрыва.

4. Заключение

В работе рассмотрен широкий класс линейных, в том числе квазимонотонных, и гибридных сеточно-характеристических схем для решения линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом. Проведена серия вычислительных экспериментов на примере численного решения волновой задачи в акустической среде. Рассмотрены процессы формирования проходящей и отражённой волн в случае зависимости параметров среды от координаты.

На основе серии численных расчётов выявлены основные свойства схем, описаны их преимущества и недостатки. Линейная схема пятого порядка аппроксимации и гибридная схема на семиточечном шаблоне, комбинирующая линейные схемы 1–5-го порядков и использующая только квазимонотонные схемы 2–4-го порядков, показали себя наиболее перспективными для дальнейшего практического использования. Одним из важных дальнейших направлений исследований представляется тестирование сеточно-характеристических схем повышенного порядка аппроксимации на более сложных линейных гиперболических системах уравнений.

Литература

1. **Магомедов К.М., Холодов А.С.** Сеточно-характеристические численные методы. — М.: Изд-во “Юрайт”, 2018.
2. **Golubev V.I., Muratov M.V., Guseva E.K., Konov D.S., Petrov I.B.** Thermodynamic and mechanical problems of ice formations: numerical simulation results // Lobachevskii J. Math. — 2022. — Vol. 43, № 4. — P. 970–979.
3. **Beklemysheva K.A., Vasyukov A.V., Kazakov A.O., Petrov I.B.** Grid-characteristic numerical method for low-velocity impact testing of fiber-metal laminates // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, № 7. — P. 874–883.
4. **Nikitin I.S., Golubev V.I.** Higher order schemes for problems of dynamics of layered media with nonlinear contact conditions // Smart Innovation, Systems and Technologies. — 2022. — Vol. 274. — P. 273–287.
5. **Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B.** Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, № 4. — P. 899–910.
6. **Холодов А.С., Холодов Я.А.** О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1638–1667. Перевод: Kholodov A.S., Kholodov Y.A. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Physics. — 2006. — Vol. 46, № 9. — P. 1560–1588.
7. **Колган В.** Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1978. — Т. 18, № 5. — С. 1340–1345.

Перевод: Kolgan V.P. The use of smoothing operators in difference schemes of a high order of accuracy // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1978. — Vol. 18, № 5. — P. 267–273.

8. **Годунов С.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник. — 1959. — Т. 47, № 89. — С. 271–306.
9. **Lax P.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Selected Papers. — 2005. — Vol. 1. — C. 198–232.
10. **Федоренко Р.П.** Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1962. — Т. 2, № 6. — С. 1122–1128. Перевод: Fedorenko R.P. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1963. — Vol. 2, № 6. — P. 1355–1365.
11. **Холодов А.С.** О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1601–1620. Перевод: Kholodov A.S. The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1980. — Vol. 20, № 6. — P. 234–253.
12. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
13. **Петров И.Б., Голубев В.И., Гусева Е.К.** Гибридные сеточно-характеристические схемы для задач арктической сейсморазведки // Докл. РАН. Матем., информ., проц. управления. — 2021. — Т. 501, № 3. — С. 67–73. Перевод: Petrov I.B., Golubev V.I., Guseva E.K. Hybrid grid-characteristic schemes for arctic seismic problems. // Dokl. Math. — 2021. — Vol. 501, № 3. — P. 374–379.
14. **Golubev V.I., Guseva E.K., Petrov I.B.** Application of quasi-monotonic schemes in seismic arctic problems // Smart Innovations, Systems and Technologies. — 2022. — Vol. 274. — P. 289–307.
15. **Friedrichs K.** Symmetric positive linear differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1958. — Vol. 11, № 3. — P. 333–418.
16. **Rusanov V.V.** Difference schemes of the third order of accuracy for the forward calculation of discontinuous solutions // Doklady Akademii Nauk. — 1968. — Vol. 180. — P. 1303–1305.
17. **Lax P., Wendroff B.** Systems of conservation laws // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1960. — Vol. 13, № 2. — P. 217–237.
18. **Warming R.F., Beam R.M.** Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flow // Proc. AIAA 2nd Comput. Fluid Dyn. Conference. — Hartford, Connecticut, 1975.
19. **Courant R., Isaacson E., Rees M.** On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1952. — Vol. 5, № 3. — P. 243–255.

Поступила в редакцию 10 октября 2022 г.
После исправления 02 ноября 2022 г.
Принята к печати 30 января 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Magomedov K.M., Kholodov A.S.** Setochno-kharakteristicheskie chislennye metody. — M.: Izd-vo “Yurait”, 2018.
2. **Golubev V.I., Muratov M.V., Guseva E.K., Konov D.S., Petrov I.B.** Thermodynamic and mechanical problems of ice formations: numerical simulation results // Lobachevskii J. Math. — 2022. — Vol. 43, № 4. — P. 970–979.

3. **Beklemysheva K.A., Vasyukov A.V., Kazakov A.O., Petrov I.B.** Grid-characteristic numerical method for low-velocity impact testing of fiber-metal laminates // Lobachevskii J. Math. — 2018. — Vol. 39, № 7. — P. 874–883.
4. **Nikitin I.S., Golubev V.I.** Higher order schemes for problems of dynamics of layered media with nonlinear contact conditions // Smart Innovation, Systems and Technologies. — 2022. — Vol. 274. — P. 273–287.
5. **Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B.** Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. — 2022. — Vol. 14, № 4. — P. 899–910.
6. **Kholodov A.S., Kholodov YA.A.** O kriteriyakh monotonnosti raznostnykh skhem dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 46, № 9. — S. 1638–1667. Perevod: Kholodov A.S., Kholodov Y.A. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Physics. — 2006. — Vol. 46, № 9. — P. 1560–1588.
7. **Kolgan V.** Primenenie operatorov sglazhivaniya v raznostnykh skhemakh vysokogo poryadka tochnosti // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1978. — T. 18, № 5. — S. 1340–1345. Perevod: Kolgan V.P. The use of smoothing operators in difference schemes of a high order of accuracy // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1978. — Vol. 18, № 5. — P. 267–273.
8. **Godunov S.** Raznostnyi metod chislennogo rascheta razryvnykh reshenii uravnenii gidrodinamiki // Mat. sbornik. — 1959. — T. 47, № 89. — S. 271–306.
9. **Lax P.** Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Selected Papers. — 2005. — Vol. 1. — S. 198–232.
10. **Fedorenko R.P.** Primenenie raznostnykh skhem vysokoi tochnosti dlya chislennogo resheniya giperbolicheskikh uravnenii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1962. — T. 2, № 6. — S. 1122–1128. Perevod: Fedorenko R.P. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1963. — Vol. 2, № 6. — P. 1355–1365.
11. **Kholodov A.S.** O postroenii raznostnykh skhem povyshennogo poryadka tochnosti dlya uravnenii giperbolicheskogo tipa // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1980. — T. 20, № 6. — S. 1601–1620. Perevod: Kholodov A.S. The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type // USSR: Comput. Math. and Math. Physics. — 1980. — Vol. 20, № 6. — P. 234–253.
12. **Godunov S.K.** Uravneniya matematicheskoi fiziki. — M.: Nauka, 1971.
13. **Petrov I.B., Golubev V.I., Guseva E.K.** Gibridnye setochno-kharakteristicheskie skhemy dlya zadach arkticheskoi seismorazvedki // Dokl. RAN. Matem., inform., prots. upravleniya. — 2021. — T. 501, № 3. — S. 67–73. Perevod: Petrov I.B., Golubev V.I., Guseva E.K. Hybrid grid-characteristic schemes for arctic seismic problems. // Dokl. Math. — 2021. — Vol. 501, № 3. — P. 374–379.
14. **Golubev V.I., Guseva E.K., Petrov I.B.** Application of quasi-monotonic schemes in seismic arctic problems // Smart Innovations, Systems and Technologies. — 2022. — Vol. 274. — P. 289–307.
15. **Friedrichs K.** Symmetric positive linear differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1958. — Vol. 11, № 3. — P. 333–418.
16. **Rusanov V.V.** Difference schemes of the third order of accuracy for the forward calculation of discontinuous solutions // Doklady Akademii Nauk. — 1968. — Vol. 180. — P. 1303–1305.
17. **Lax P., Wendroff B.** Systems of conservation laws // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1960. — Vol. 13, № 2. — P. 217–237.
18. **Warming R.F., Beam R.M.** Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flow // Proc. AIAA 2nd Comput. Fluid Dyn. Conference. — Hartford, Connecticut, 1975.
19. **Courant R., Isaacson E., Rees M.** On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1952. — Vol. 5, № 3. — P. 243–255.