

УДК 627.157

О РАЗВИТИИ ДОННЫХ ФОРМ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ НАБЕГАНИИ ОСВЕТЛЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НА НЕСВЯЗНОЕ ДНО

К. С. Королева, И. И. Потапов

Вычислительный центр ДВО РАН, 680000 Хабаровск, Россия

E-mails: snigur.ks@ccfebras.ru, potapov2i@gmail.com

Рассмотрена задача о набегании осветленного турбулентного потока на размываемое дно. Для решения задачи предложена математическая модель, включающая уравнения Рейнольдса, уравнения переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности. Изменения донной поверхности описаны с использованием оригинального уравнения донных деформаций, построенного на основе аналитической модели движения влекомых наносов. Предложен алгоритм решения задачи с помощью метода контрольных объемов. С использованием численного моделирования показано, что при размыве дна осветленным потоком формируется волновой пакет донных волн малой крутизны. Также показано, что скорость движения донных волн, полученная в ходе численного расчета, хорошо согласуется со скоростью движения донных волн, вычисленной по асимптотической аналитической формуле.

Ключевые слова: русловые процессы, донные деформации, влекомые наносы, эрозия дна, донные волны, волновой пакет.

DOI: 10.15372/PMTF20220111

Введение. Исследованию русловых процессов, происходящих в нижних бьефах гидроузлов (гидроэлектростанций, переливных запруд и т. д.), посвящено достаточно большое количество работ [1–7]. В верхнем бьефе гидроузла речной поток замедляется в ковше гидроузла, что приводит к осветлению потока. Затем в нижнем бьефе гидроузла осветленный поток попадает на несвязное дно русла, вследствие чего изменяется донный рельеф. Нерасчетные изменения рельефа русла могут приводить к технологическим катастрофам (разрушениям речных и береговых сооружений), поэтому данная проблема является предметом активных исследований [3].

Для моделирования деформаций речного дна при набегании на него осветленного потока применяются русловые модели, включающие различные модели движения влекомых [4, 5] и взвешенных наносов [6, 7]. Результаты исследований с использованием данных моделей показывают, что в процессе размыва донной поверхности осветленным потоком происходит потеря устойчивости дна, приводящая к появлению на нем донных волн [6, 8]. В настоящее время для описания процесса возникновения и развития донных волн существует большое количество математических моделей различной степени сложности и это

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 21-57-53019). Для выполнения расчетов использовались вычислительные ресурсы центра коллективного пользования “Центр данных ДВО РАН” [9].

© Королева К. С., Потапов И. И., 2022

количество продолжает увеличиваться [10], что свидетельствует об отсутствии общепризнанной концепции построения таких моделей.

В настоящей работе предложена математическая модель процесса размыва несвязного дна канала при набегании на него осветленного турбулентного потока. Для описания донных деформаций используется уравнение, построенное на основе аналитической модели движения влекомых наносов [8, 11], для описания турбулентного потока — классическая $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности. Выполнено численное исследование процесса формирования каверны размыва и донных волн, образующихся под действием осветленного турбулентного гидродинамического потока.

1. Математическая постановка задачи. Рассмотрим турбулентный гидродинамический поток в напорном канале длиной L и максимальной глубиной H , движущийся слева направо вдоль оси x . Дно канала имеет геометрически сложную форму, которая задается функцией ζ , изменяющейся во времени. На рис. 1 показана расчетная область задачи Ω , где Γ_{in} , Γ_{out} , Γ_{top} , Γ_{bed} — входная, выходная, верхняя и нижняя границы расчетной области соответственно.

Для описания движения осредненного гидродинамического потока используются уравнения Рейнольдса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$T_{xx} = -\frac{P}{\rho_w} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad T_{xy} = T_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad T_{yy} = -\frac{P}{\rho_w} + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y},$$

x , y — пространственные горизонтальная и вертикальная координаты соответственно; u , v — горизонтальная и вертикальная осредненные скорости потока; t — временная координата; P , ρ_w — давление и плотность воды; $\eta = \eta_t + \eta_w$ — приведенная кинематическая вязкость потока, представляющая собой сумму турбулентной η_t и кинематической $\eta_w = 10^{-6}$ м²/с вязкости потока. Для замыкания уравнений (1) и определения турбулентной вязкости потока η_t используется стандартная $(k-\varepsilon)$ -модель турбулентности [8]

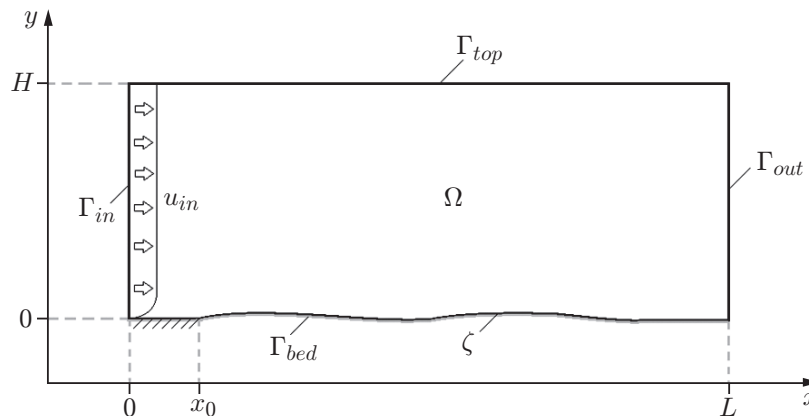


Рис. 1. Расчетная область

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial ku}{\partial x} + \frac{\partial kv}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_w \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_w \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \varepsilon, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_w \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_w \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon),\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\eta_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_k = \sqrt{2} \eta_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (3)$$

k — кинетическая энергия турбулентности; ε — диссипация турбулентности; $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$, $C_\mu = 0,09$ — константы модели.

Расчетная область Ω снизу ограничена подвижной донной поверхностью $\zeta = \zeta(t, x)$, эволюция которой описывается уравнением [8, 12]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(G_0 B \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G_0 \left(C \frac{\partial p}{\partial x} - G_0 A \right) \right), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}A &= \max(0, 1 - \Xi), \quad B = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\frac{\Xi}{2} + A \frac{1+s}{s} \right), \quad C = \frac{A}{s \operatorname{tg} \varphi}; \\ \Xi &= \sqrt{\frac{T_*}{|T|}}, \quad G_0 = \frac{4}{3} \frac{T_*^{3/2}}{(1 - \varepsilon_s)(\rho_s - \rho_w)g \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\rho_w} \kappa}, \quad T_* = T_0 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{d\zeta}{dx} \right), \\ T_0 &= \frac{\alpha_0 \kappa^2 \operatorname{tg} \varphi}{c_x} (\rho_s - \rho_w)gd, \quad s = f\rho_b, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}, \quad p = \frac{P_b}{\rho_w g},\end{aligned}\quad (5)$$

p — гидравлический напор; φ — угол внутреннего трения донных частиц под водой; T — придонное касательное напряжение; ε_s — пористость донного материала; ρ_s — плотность песка; g — ускорение свободного падения; κ — параметр Кармана; T_0 — напряжение, определяющее начало движения донных частиц на ровном дне; $\alpha_0 = 9/8$ — параметр формы частиц [12]; c_x — коэффициент лобового сопротивления донных частиц; d — диаметр частиц; $f = 0,1$ — концентрация донных частиц в активном придонном слое [8]; P_b — придонное давление.

Уравнения (1)–(4) замыкаются начальными условиями

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad k = k_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \zeta = \zeta_0, \quad x \in \Gamma_{bed} \quad (6)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}u &= u_{in}, \quad v = 0, \quad k = k_{in}(u), \quad \varepsilon = \varepsilon_{in}(k), \quad (x, y) \in \Gamma_{in}, \\ u &= 0, \quad v = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{bed}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{top}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{out}, \\ \zeta &= \zeta_0, \quad x < x_0 \in \Gamma_{bed}, \\ B \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= A - C \frac{\partial p}{\partial x}, \quad x \in \Gamma_{in}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad x \in \Gamma_{out},\end{aligned}\quad (7)$$

где u_0 , k_0 , ε_0 , ζ_0 — поля начальных значений для искомых функций; u_{in} , k_{in} , ε_{in} — профили функций на входе в область; x_0 — координата границы между неразмываемым и размываемым участками дна.

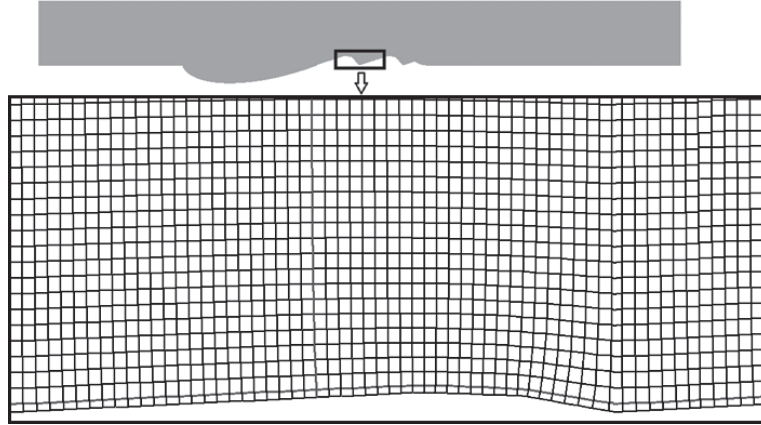


Рис. 2. Фрагмент расчетной локально-ортогональной сетки

Профили кинетической энергии и диссипации турбулентности на входе в область определяются следующим образом [13]:

$$k_{in} = 0,005u_{in}^2, \quad \varepsilon_{in} = 0,1k_{in}^2.$$

2. Дискретизация расчетной области. Для численного решения задачи (1)–(7) используется локально-ортогональная расчетная сетка, фрагмент которой приведен на рис. 2.

Для построения локально-ортогональной сетки применяются однородные эллиптические уравнения [14]

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \psi} + \omega \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \psi} + \omega \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0,$$

где $0 \leq \xi, \psi \leq 1$ — пространственные горизонтальная и вертикальная локальная координаты соответственно. В данных координатах строится вспомогательная расчетная сетка ξ_i, ψ_i для определения координат узлов x_i, y_i локально-ортогональной расчетной сетки. Коэффициенты α, β, ω определяются следующим образом:

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \omega = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2.$$

3. Алгоритм решения и его особенности. Для решения уравнений (1), (2) используется метод контрольных объемов [15].

Контрольно-объемный дискретный аналог для уравнения (4) в обозначениях Патанкара [15] имеет вид

$$\begin{aligned} a_P \zeta_P &= a_0 \zeta_P^n + (a_E \zeta_E + a_W \zeta_W) + S_P, \\ a_E &= \frac{(G_0)_e B_e}{\Delta x_e}, \quad a_W = \frac{(G_0)_w B_w}{\Delta x_w}, \quad a_{P0} = \frac{\Delta x_P}{\Delta t}, \quad a_P = a_{P0} + a_E + a_W, \\ S_P &= c_E p_E - c_P p_P + c_W p_W - ((q_0 A)_e - (q_0 A)_w) + \Delta x_P Q_P, \\ c_E &= \frac{(G_0)_e C_e}{\Delta x_e}, \quad c_W = \frac{(G_0)_w C_w}{\Delta x_w}, \quad c_P = c_E + c_W, \\ \Delta x_e &= x_{i+1} - x_i, \quad \Delta x_w = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x_P = 0,5(x_{i+1} - x_{i-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(G_0)_e &= G_* \frac{(\tau_{i+1})^{3/2}}{(\cos \gamma)_e}, & (G_0)_w &= G_* \frac{(\tau_i)^{3/2}}{(\cos \gamma)_w}, \\
(\cos \gamma)_e &= \frac{1}{\sqrt{1 + ((\zeta_{i+1} - \zeta_i)/\Delta x)^2}}, & (\cos \gamma)_w &= \frac{1}{\sqrt{1 + ((\zeta_i - \zeta_{i-1})/\Delta x)^2}}, \\
A_e &= \max(0, 1 - \Xi_e), & B_e &= \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\frac{\Xi_e}{2} + A_e \frac{1+s}{s} \right), & C_e &= \frac{A_e}{s \operatorname{tg} \varphi}, \\
G_* &= \frac{4}{3} \frac{(1 - \varepsilon)^{-1}}{(\rho_s - \rho_w) g \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\rho_w} \varkappa}, & \Xi_e &= \sqrt{\frac{T_{*e}}{T_e}}, & \Xi_w &= \sqrt{\frac{T_{*w}}{T_w}}, \\
T_{*e} &= T_0 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{x_{i+1} - x_i} \right).
\end{aligned}$$

Здесь x_i ($i = 0, \dots, N$) — координаты узлов расчетной области; ζ_i ($i = 0, \dots, N$) — узлы донной поверхности; N — количество узлов расчетной области; индекс P соответствует значению функции в центральной точке рассматриваемого контрольного объема, индексы W, E — в центральных точках контрольного объема, находящегося соответственно слева и справа от рассматриваемого, индексы w, e — на левой и правой гранях рассматриваемого контрольного объема соответственно.

Придонные касательные напряжения в канале определяются с использованием метода пристенных функций [13]. Для этого рассматривается течение в прилегающей ко дну ячейке с вертикальным сечением h . В данной ячейке средняя касательная скорость потока U_z известна из решения задачи (1). Таким образом, динамическую скорость в придонной ячейке $u_\tau = \eta h^+ / h$ можно вычислить с помощью итерационной схемы [13], где шаг h^+ определяется с использованием метода Ньютона:

$$\begin{aligned}
h_{n+1}^+ &= h_n^+ + \frac{F_* - F_n}{u_n^+}, & F_* &= \frac{U_z h}{\eta}, & u_n^+ &= \frac{1}{\varkappa} \ln \left(\frac{h_n^+}{0,13} \right), \\
F_n &= \frac{h_n^+}{\varkappa} \left(\ln \left(\frac{h_n^+}{0,13} \right) - 1 \right) - 73,50481
\end{aligned}$$

(n — номер временной итерации). С помощью динамической скорости в придонной ячейке можно вычислить придонное касательное напряжение [13]

$$T = \rho_w u_\tau^2.$$

4. Результаты численного моделирования. Задача (1)–(7) о набегании осветленного турбулентного потока на размываемое дно решалась при следующих значениях параметров, взятых из работы [2]: $d = 0,00069$ м, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $c_x = 0,45$, $\varepsilon_s = 0,375$, расход потока $Q = 0,12$ м³/с, основной уклон дна $J = 0,00416$, $T_0 = 1,677$ Па, $H = 0,0411$ м, $U = 0,45$ м/с. Параметры $\varkappa$ и $\operatorname{tg} \varphi$ в расчетах определены по формулам [8]

$$\operatorname{tg} \varphi = 1,15d^{1/7}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{c_x \theta_*}{\alpha_0 \operatorname{tg} \varphi}}, \quad \theta_* = 0,047,$$

где θ_* — критическое значение числа Шильдса.

На рис. 3 представлены результаты моделирования деформации дна при набегании осветленного турбулентного потока на размываемое дно и возникновения вследствие этого процесса длинных донных волн, для которых отношение длины волны к высоте равно $\lambda/H_0 \gg 1$ (макрошероховатость). На рис. 3 показаны профили придонных касательных

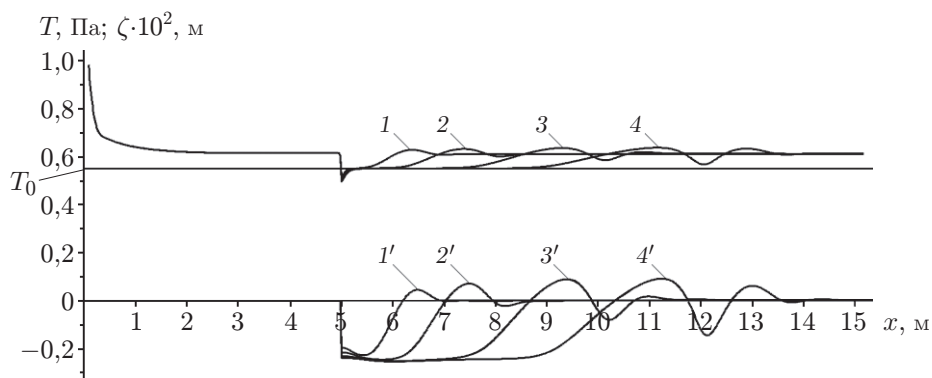


Рис. 3. Профили придонного касательного напряжения (1–4) и донной поверхности (1'–4') в различные моменты времени после начала размыва:

1, 1' — $t = 0,5$ ч, 2, 2' — $t = 1$ ч, 3, 3' — $t = 2$ ч, 4, 4' — $t = 3$ ч

напряжений T (кривые 1–4) и профили дна ζ (кривые 1'–4') в моменты времени после начала размыва $t = 0,5; 1,0; 2,0; 3,0$ ч соответственно.

Результаты анализа эволюции профиля донной поверхности показывают, что вследствие образования каверны размыва осветленным потоком развивается донная макрошероховатость, определяемая вторичными донными волнами. Рассмотрим процесс деформации донной поверхности более подробно.

В начальный момент времени на донной поверхности реализуются придонное транзитное касательное напряжение T_{tr} и давление, которые определяют величину транзитного расхода наносов G_{tr} . Поскольку при $0 \leq x \leq x_0$ транзитный расход наносов G_{tr} равен нулю, в окрестности точки x_0 вниз по потоку происходит размыв дна с образованием каверны. При развитии каверны ее глубина увеличивается и достигает критического значения, что обусловлено уменьшением придонного касательного напряжения T до критической величины T_0 . При углублении и расширении каверны гидродинамический поток искажается, ниже по потоку за каверной образуется первичная донная волна (кривая 1' на рис. 3). В процессе эволюции дна амплитуда первичной донной волны увеличивается, при этом форма волны меняется от синусоидальной к асимметричной. Когда подветренный склон первичной донной волны становится достаточно крутым, в подвалье подветренного склона придонное касательное напряжение уменьшается (кривая 2 на рис. 3) до значений, меньших транзитного напряжения T_{tr} . Вследствие этого локальный расход наносов также становится меньше транзитного, что приводит к размыву (кривая 2' на рис. 3), который, развиваясь, формирует вторую донную волну (кривые 3', 4' на рис. 3). Эволюция второй донной волны приводит к образованию третьей волны, и такое развитие длинноволновой донной макрошероховатости продолжается вместе с развитием каверны размыва.

На рис. 4 представлены профили придонных сдвиговых напряжений (кривая 1) и донной поверхности (кривая 2) через 10 ч после начала размыва. Видно, что с момента начала размыва количество волн, образовавшихся за основной каверной размыва, достигло восьми. Поскольку касательные напряжения T в подвалье волн, образовавшихся первыми, достигает критического значения T_0 , обмен наносами между волнами прекращается, и такие донные волны можно характеризовать как изолированные. В тот момент, когда донная волна становится изолированной, рост ее амплитуды прекращается. Дальнейшая эволюция таких волн заключается в их движении вниз по потоку с последующей деформацией волны, что приводит к увеличению длины волны λ и уменьшению ее высоты. Следует отметить, что для волн, образовавшихся первыми, длина волны λ незначительно увели-

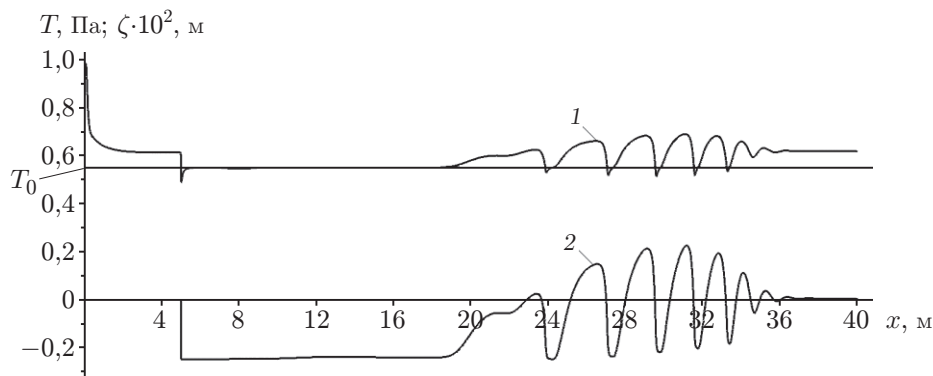


Рис. 4. Профили придонного касательного напряжения (1) и донной поверхности (2) через 10 ч после начала размыва

чивается в процессе деформации (перекашивания) волн в силу их малой крутизны. Также установлено, что на поверхности первой волны, имеющей наибольшую длину, образуется вторичная донная волна. Изучение данного процесса в настоящей работе не проводилось.

Для оценки возможности описания движения волнового пакета с помощью предложенной математической модели скорости движения донных волн, полученные в расчете, сравниваются со скоростью движения донных волн, вычисленной по асимптотической аналитической формуле [16], которая найдена в результате анализа линейной устойчивости донной поверхности в напорном канале:

$$W = \frac{A_*(C_* - \nu_*)K^2 + B_*}{1 + A_*^2 K^2}; \quad (8)$$

$$A_* = CS \text{Fr}^2 H_1, \quad B_* = 3S \text{Fr} (A + C \text{Fr} \lambda_g)U, \quad C_* = S \text{Fr} (B - C(1 + \text{Fr}))U H_1,$$

$$S = \frac{4}{3} \frac{\lambda_g^{3/2}}{\kappa(1 - \varepsilon) \text{tg} \varphi \rho_b}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gH_1}, \quad \lambda_g = 0,0899 \left(\frac{d}{H_1} \right)^{1/3}, \quad H_1 = 2H_0, \quad \rho_b = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w}.$$

Здесь K — безразмерное волновое число; выражения для A , B , C определяются по формулам (5) при $\Xi = 0,95$, $\nu_* = 0,015 \text{ м}^2/\text{с}$.

Скорость движения донных волн, полученная в расчете с использованием рассматриваемой модели, составляет $0,000514 \text{ м/с}$ (см. рис. 4), что согласуется со скоростью движения донных волн $W = 0,0005748 \text{ м/с}$, вычисленной по формуле (8) при волновом числе $K \sim 1$. Таким образом, различие скоростей движения донных волн на интервале времени 10 ч с момента начала размыва не превышает 17 %, т. е. расчетные и аналитические результаты хорошо согласуются. Это подтверждает способность предложенной модели корректно описывать процесс возникновения и развития донных волн.

Закключение. В работе для решения задачи о размыве осветленным турбулентным потоком несвязного дна канала предложена математическая модель, включающая уравнения Рейнольдса, уравнения переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности и оригинальное уравнение русловых деформаций.

Разработан алгоритм решения задачи, в котором используется метод контрольных объемов для локально-ортогональных сеток и который позволяет определять поля осредненных скоростей, кинетической энергии и диссипации турбулентности в деформируемой области. Для решения уравнения русловых деформаций предложен контрольно-объемный дискретный аналог этого уравнения.

Найдено численное решение задачи о размыве несвязного дна при набегании на него осветленного турбулентного потока. При исследовании размыва донной поверхности обнаружено, что в результате образования каверны размыва происходит формирование вниз по потоку макрошероховатости в виде волнового пакета. Возникающие донные волны представляют собой длинные волны малой крутизны. Результаты анализа расчетных данных показали, что в процессе развития донных волн их амплитуда увеличивается до момента изоляции, т. е. до момента прекращения обмена наносами между соседними волнами. После этого форма изолированных волн становится все более несимметричной, что приводит к уменьшению их амплитуды и увеличению длины.

Сравнение скорости движения донных волн, полученной в расчете с помощью предложенной модели, со скоростью движения донных волн, вычисленной по асимптотической аналитической формуле, показало, что они хорошо согласуются. Это косвенно подтверждает способность предложенной модели корректно описывать процесс возникновения и развития донных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Veksler A. B., Petrov O. A.** Calculated relationship between flow rates and water levels in the downstream pools of hydroelectric power plants as a result of river-bed transformation // *Power Technol. Engng.* 2020. V. 53. P. 695–702.
2. **Потапов И. И., Снигур К. С.** Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла // *Вычисл. технологии.* 2011. Т. 16, № 4. С. 114–119.
3. **Ларченко О. В.** Применение гидроморфологического подхода к расчету русловых деформаций в нижнем бьефе Камского гидроузла // *Геогр. вестн. Науки о Земле и смежные экол. науки.* 2010. № 2. С. 1–5.
4. **Li T., Gao X., Chen L., Ding L.** Mathematical model of sediment diffusion during construction period of extension project in Tianwan nuclear power station, China // *Proc. of the Intern. conf. on estuaries and coasts, Caen (France), 20–23 Aug. 2018.* Singapore: Springer, 2020. P. 539–553. DOI: 10.1007/978-981-15-2081-5_31.
5. **An C., Moodie A. J., Ma H., et al.** Morphodynamic model of the lower Yellow River: flux or entrainment form for sediment mass conservation? // *Earth Surface Dynamics.* 2018. V. 6. P. 989–1010. DOI: 10.5194/esurf-6-989-2018.
6. **Naito K., Ma H., Nittrouer J. A., et al.** Extended Engelund — Hansen type sediment transport relation for mixtures based on the sandsilt-bed Lower Yellow River, China // *J. Hydraul. Res.* 2019. V. 57, iss. 6. P. 770–785. DOI: 10.1080/00221686.2018.1555554.
7. **Yang C. T., Molinas A., Wu B.** Sediment transport in the Yellow River // *J. Hydraul. Engng.* 1996. V. 122, iss. 5. P. 237–244.
8. **Петров А. Г.** Избранные разделы русловой динамики / А. Г. Петров, И. И. Потапов. М.: Ленанд, 2019.
9. **Сорокин А. А., Макогонов С. В., Королев С. П.** Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // *Науч.-техн. информ. Сер. 1. Орг. и методика информ. работы.* 2017. № 12. С. 14–16.
10. **Гришанин К. В.** Гидравлическое сопротивление естественных русел. СПб.: Гидрометеиздат, 1992.
11. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // *ПМТФ.* 2014. Т. 55, № 5. С. 100–105.
12. **Петров А. Г., Потапов И. И.** Анализ причин возникновения донной неустойчивости // *ПМТФ.* 2014. Т. 55, № 6. С. 114–119.

13. **Луцкий А. Е., Северин А. В.** Простейшая реализация метода пристеночных функций. М., 2013. (Препр. / Ин-т прикл. математики им. М. В. Келдыша; № 38).
14. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. Т. 2. Методы расчета различных течений. М.: Мир, 1991.
15. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
16. **Крат Ю. Г., Потапов И. И.** Влияние размера частиц донных наносов на длину волны донных возмущений в напорных каналах // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 60–64.

*Поступила в редакцию 6/XI 2020 г.,
после доработки — 18/XI 2020 г.
Принята к публикации 30/XI 2020 г.*
