

## ЛИТЕРАТУРА

1. Whitaker S. The transport equations for multi-phase systems.— «Chem. Engng Sci.», 1973, vol. 28, N 1.
2. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде.— ПМТФ, 1974, № 4.
3. Gray W. G. A derivation of the equations for multi-phase transport.— «Chem. Engng Sci.», 1975, vol. 30, N 2.
4. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А., Щелчкова И. Н. О переносе тепла или массы в дисперсном потоке.— «Инж.-физ. журн.», 1976, т. 30, № 6.
5. Горелник А. Г., Бесков В. С., Радкевич Н. П., Любарский А. Г. Процессы теплопереноса в неподвижном слое катализатора.— «Теор. основы хим. технол.», 1974, т. 8, № 3.
6. Vormeyer D., Schaefer R. J. Equivalence of one- and two-phase models for heat transfer processes in packed beds: one-dimensional theory.— «Chem. Engng Sci.», 1974, vol. 29, N 3.
7. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А. Эффективная теплопроводность дисперсной среды при малых числах Пекле.— «Инж.-физ. журн.», 1976, т. 31, № 4.
8. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л., «Энергия», 1974.
9. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
10. Saffman P. G. A theory of dispersion in a porous medium.— «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 6, N 3.
11. Buyevich Yu. A. On the fluctuations of concentration in disperse systems. Spectral description of the random concentration field and application to solute dispersion in packed beds.— «Chem. Engng Sci.», 1972, vol. 27, N 10.
12. Бувич Ю. А., Казенин Д. А. О переносе тепла или массы к телам разной формы, погруженным в неподвижный или слабоожигенный зернистый слой.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 6. Минск, 1976.
13. Hayashi Y. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary.— «J. Math. Analysis and Appl.», 1973, vol. 44, N 2.
14. King L. V. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluids: determination of the convection constants of small platinum wires with application to hot-wire anemometry.— «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1914, vol. 214, ser. A, N 520.
15. Черпаков П. В. О теплоотдаче цилиндра в потенциальном потоке.— «Докл. АН СССР», 1946, т. 52, № 5.
16. Срегенский Л. Н. О нагревании потока жидкости твердыми стенками.— ПММ, 1935, т. 2, вып. 2.
17. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N. Y.— London, Academic Press, 1964. Рус. пер. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
18. Grosh R. J., Cess R. D. Heat transfer to fluids with low Prandtl numbers for flows across plates and cylinders.— «Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3.
19. Hsu Chia-Jung. Analytical study of heat transfer to liquid metals flowing past a row of spheres.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1967, vol. 10, N 2.
20. Grosh R. J., Cess R. D. Heat transmission to fluids with low Prandtl numbers for flows through tube banks.— «Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3.

УДК 669—147

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ  
ОСЕВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОТОКА ТЕПЛА  
НА ЗАТВЕРДЕВАНИЕ МЕТАЛЛА  
ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ЛИТЬЕ**

*А. Н. Черепанов*

(Новосибирск)

Во многих работах, посвященных теории затвердевания металла при непрерывном литье, как правило, пренебрегается осевой составляющей потока тепла и рассматривается приближенное уравнение теплопроводности при постоянных теплофизических параметрах металла [1—5]. В данной работе на основе точного уравнения теплопроводности рассматрива-

ется процесс затвердевания непрерывного слитка при произвольной зависимости теплофизических параметров металла от температуры. Из анализа найденного автомодельного решения получено условие, при котором справедливо приближенное рассмотрение задачи без учета осевой составляющей потока тепла. В качестве примера рассмотрен процесс затвердевания плоского алюминиевого слитка.

Будем полагать, что плоский слиток толщиной  $2x_0$  движется вдоль оси  $Z$  с постоянной скоростью  $v$ . При этом считаем, что температура расплава (жидкой фазы) равна температуре кристаллизации  $T_K$ .

Уравнение, определяющее распределение температуры  $T$  в твердой фазе в установившемся режиме, имеет вид

$$(1) \quad v c_V \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

где объемная теплоемкость  $c_V$  и теплопроводность  $\lambda$  зависят от температуры  $T$ .

Граничное условие на охлаждаемой поверхности слитка запишем в виде

$$(2) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = q(z),$$

где  $q(z)$  — закон теплоотвода, вид которого определим ниже. В частности, если теплоотвод осуществляется по закону Ньютона — Рихмана, то будем полагать

$$(3) \quad q(z) = k(z) [T|_{x=x_0} - T_c(z)],$$

где  $k(z)$  — коэффициент теплопередачи от слитка к охлаждающей среде, величина которого определяется из решения задачи при данном законе изменения температуры охлаждающей среды  $T_c(z)$ .

На поверхности кристаллизации  $\xi(z)$  должны выполняться следующие условия:

$$(4) \quad \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \xi'(z) \right]_{x=\xi(z)} = \alpha_0 v \xi'(z);$$

$$(5) \quad T|_{x=\xi(z)} = T_K;$$

$$(6) \quad \xi(0) = x_0, \quad \xi(h) = 0.$$

Штрих в (4) означает дифференцирование по  $z$ . Решение задачи будем искать в области  $0 \leq x \leq x_0$ ,  $0 \leq z \leq h$ , где  $h$  — глубина жидкой лунки.

Уравнения (1)–(6) приведем к безразмерному виду, приняв в качестве характерных величин температуру кристаллизации  $T_K$ , полутолщину слитка  $x_0$ , теплопроводность  $\lambda_K$  и теплоемкость  $c_{VK}$  при  $T = T_K$ . После перехода к новым независимым переменным

$$(7) \quad y_1 = 1 - x/x_0, \quad u_1 = z/h$$

безразмерная система уравнений примет вид

$$(8) \quad h_1 \text{Pe} c_{V1} \frac{\partial T_1}{\partial u_1} = h_1^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial u_1} \right) \quad (0 \leq y_1, \quad u_1 \leq 1);$$

$$(9) \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0} = \text{Bi}(u_1) (T_1|_{y_1=0} - T_c) = q_1(u_1);$$

$$(10) \quad \left[ h_1^2 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} + \frac{\partial T_1}{\partial u_1} \xi_1'(u_1) \right]_{y_1=1-\xi_1(u_1)} = -\alpha_1 h_1 \text{Pe} \xi_1'(u_1);$$

$$(11) \quad T_1|_{y_1=1-\xi_1(u_1)} = 1;$$

$$(12) \quad \xi_1(0) = 1, \quad \xi_1(h_1) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= T/T_K; \quad c_{V1} = c_V/c_{VK}; \quad \lambda_1 = \lambda/\lambda_K; \\ q_1 &= q(\lambda_K T_K/x_0)^{-1}; \quad \xi_1 = \xi/x_0; \quad h_1 = h/x_0; \\ \alpha_1 &= \alpha_0/c_{VK} T_K; \quad Bi = hx_0/\lambda_K; \quad Pe = c_{VK} v x_0/\lambda_K. \end{aligned}$$

Далее индекс 1 у безразмерных величин будем опускать.  
Решение задачи (8)–(12) ищем в виде

$$(13) \quad T = T(\eta), \quad \eta = y - u.$$

Из (8) с учетом (13) получим уравнение для определения функции  $T(\eta)$

$$(14) \quad c_V \frac{dT}{d\eta} - \frac{1+h^2}{h Pe} \frac{d}{d\eta} \left( \lambda \frac{dT}{d\eta} \right).$$

Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$(15) \quad \int_1^T \frac{\lambda(t) dt}{\int_1^t c_V(\tau) d\tau + C_1} = - \frac{h Pe}{1+h^2} \eta + C_2.$$

Удовлетворяя условиям (11), (12), найдем постоянную интегрирования

$$(16) \quad C_2 = 0$$

и форму жидкой лунки

$$(17) \quad \xi(u) = 1 - u.$$

Постоянную  $C_1$  определим из условия (9), задав значения температуры охлаждающей среды  $T_c$  и коэффициента теплопередачи  $k$  в точке  $u=0$ , что эквивалентно заданию потока тепла вдоль оси  $X$  в точке  $y = u = 0$ .

Введем обозначение

$$(18) \quad \lambda \partial T / \partial y|_{y=u=0} = Bi(0)[1 - T_c(0)] = q_0.$$

Из (15) с учетом (16), (18) найдем

$$(19) \quad C_1 = \frac{1+h^2}{h Pe} q_0.$$

Заметим, что величина потока тепла  $q = \lambda \partial T / \partial y|_{y=1-\xi(u)}$  в рассматриваемом решении остается постоянной вдоль всей поверхности кристаллизации. Это непосредственно следует из условия (10) и решения (17), так как  $\xi'(u) \equiv -1$ .

Подставив значения констант  $C_1$  из (19) и  $C_2$  из (16) в формулу (15), найдем распределение температуры в корочке слитка

$$(20) \quad \int_1^T \frac{\lambda(t) dt}{\int_1^t c_V(\tau) d\tau - \frac{1+h^2}{h Pe} q_0} = - \frac{h Pe}{1+h^2} \eta.$$

Из условия (10) с учетом (13), (17), (20) получим уравнение, определяющее глубину жидкой лунки,

$$(21) \quad h^2 - \frac{\alpha Pe}{q_0} h + 1 = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание, что при  $Pe \rightarrow \infty$   $h \rightarrow \infty$ , найдем выражение для глубины жидкой лунки

$$(22) \quad h = \frac{\kappa Pe}{2q_0} + \sqrt{\left(\frac{\kappa Pe}{2q_0}\right)^2 - 1}.$$

Полученное стационарное решение существует при

$$(23) \quad \kappa Pe/2q_0 \geq 1.$$

Из (8), (14), (20) следует, что осевым потоком тепла за счет теплопроводности в уравнениях (1), (4) и (8), (10) можно пренебречь при  $h^2 \gg 1$ . Это условие с учетом выражения для  $h$  из (22) примет вид

$$(24) \quad (\kappa Pe/2q_0)^2 \gg 1.$$

При этом условие (23) автоматически выполняется, а глубина жидкой лунки

$$(25) \quad h = \kappa Pe/q_0.$$

Для характеристики процесса структурообразования непрерывного слитка важное значение имеет знание величин скорости кристаллизации и скорости охлаждения на фронте кристаллизации. Скорость кристаллизации  $v_K$  определяется выражением

$$v_K = v \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между направлением касательной к поверхности  $\xi$  и осью  $Z$ .

Так как  $\sin \varphi = -\xi'(z)/\sqrt{1 + [\xi'(z)]^2}$ , а  $\xi'(z) = 1/h$ ,  $\xi'(u) = -1/h$ , то

$$(26) \quad v_K = v/\sqrt{1 + h^2},$$

где  $h$  определяется соотношением (22), а при выполнении условия (24) — соотношением (25).

Подставив в (26) выражение для  $h$  из (22) и возвращаясь к размерным физическим величинам, запишем

$$(27) \quad v_K = \sqrt{2}k_0\Delta T/\kappa\rho_K [1 + \sqrt{1 - (2k_0\Delta T/\kappa\rho_K v)^2}]^{-1/2},$$

где  $k_0 = k(0)$ ;  $\Delta T = T_K - T_c(0)$ .

Из (27) следует, что с увеличением скорости литья скорость кристаллизации растет и при  $v \rightarrow \infty$   $v_K \rightarrow k_0\Delta T/\kappa\rho_K$ .

Безразмерная скорость охлаждения  $v_T$  на фронте кристаллизации определяется выражением [5]

$$(28) \quad v_T = |\partial T/\partial z|_{x=\xi(z)}.$$

В рассматриваемом решении  $\partial/\partial z = -(1/h)d/d\eta$ , следовательно, из (28) с учетом (20) имеем

$$(29) \quad v_T = q_0/h.$$

Из (26), (29) получим соотношение, связывающее скорость кристаллизации со скоростью охлаждения,

$$v_K = v v_T / q_0 \sqrt{1/h^2 + 1}.$$

Для конкретных расчетов примем, что безразмерные величины теплопроводности и теплоемкости являются линейными функциями температуры

$$(30) \quad \lambda(T) = \mu + \omega T, \quad c_V = v + \varepsilon T.$$

Подставив (30) в (20) и проведя интегрирование, найдем

$$(31) \quad \frac{\varepsilon T + \nu - m}{(\varepsilon T + \nu + m)^n} = \frac{\varepsilon + \nu - m}{(\varepsilon + \nu + m)^n} \exp \left[ - \frac{m\varepsilon}{\mu\varepsilon - \omega(\nu - m)} \frac{q_0}{\kappa} \eta \right],$$

$$\text{где} \quad m = \sqrt{(\nu + \varepsilon)^2 + 2\kappa\varepsilon}; \quad n = \frac{\mu\varepsilon - \omega(\nu + m)}{\mu\varepsilon - \omega(\nu - m)}.$$

Выражение (31) описывает закон изменения температуры в корочке слитка, если теплосъем осуществляется по закону

$$q(z) = q_0 \left\{ 1 - \frac{T_f - 1}{\kappa} \left[ \nu - \frac{\varepsilon}{2} (T_f + 1) \right] \right\},$$

где  $T_f = T_f(z)$  — температура поверхности слитка, определяемая формулой (31) при  $\eta = -z/h$ .

Для некоторых металлов (например, алюминий, медь) теплопроводность и объемная теплоемкость слабо зависят от температуры, меняясь в пределах  $\pm 15\%$  в довольно широком интервале изменения температуры, поэтому с достаточной точностью можно считать указанные параметры постоянными, приняв для расчета их средние значения. Положив в (20)  $\lambda = c_V = 1$  и интегрируя с учетом (22), найдем

$$(32) \quad T(\eta) = 1 + \kappa \left[ 1 - \exp \left( - \frac{q_0}{\kappa} \eta \right) \right].$$

Форма жидкой лунки и ее глубина, как и в нелинейном случае, будет определяться формулами (17), (22) соответственно. При этом следует иметь в виду, что в качестве характерных величин для теплопроводности и теплоемкости в линейном приближении принимаются их средние значения, откуда и следует  $\lambda = c_V = 1$ . Решение (32) справедливо, если тепло отводится по закону

$$(33) \quad q(z) = q_0 \exp \left( \frac{q_0}{\kappa h} z \right).$$

Из условия (9) с учетом (7) и (33) находим закон изменения  $Bi(z)$  (или коэффициента теплопередачи  $k(z)$ ) при заданной температуре  $T_c(z)$  охлаждающей среды

$$Bi(z) = \frac{q_0}{T_f(z) - T_c(z)} \exp \left( \frac{q_0}{\kappa h} z \right),$$

где  $T_f(z)$  определяется из (32) и (7) при  $x = 1$ . Поскольку в рассматриваемой задаче температура поверхности слитка не может быть ниже температуры охлаждающей среды, должно соблюдаться условие

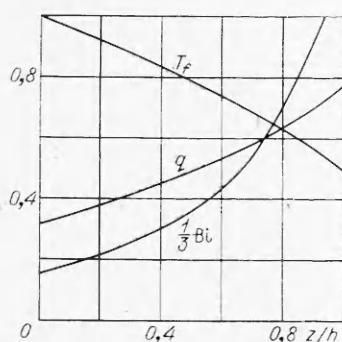
$$T_c(z) \leq T_f(z) = 1 + \kappa \left[ 1 - \exp \left( \frac{q_0}{\kappa h} z \right) \right].$$

Отсюда, полагая  $z = h$ , найдем ограничение на величину потока тепла  $q_0$ , при котором существует полученное решение. Имеем

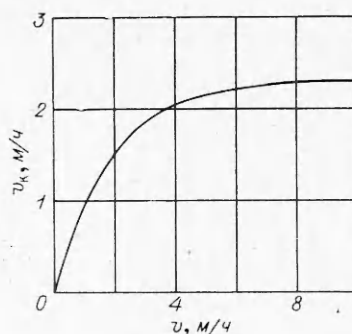
$$q_0 \leq \kappa \ln \left[ 1 + \frac{1 - T_c(h)}{\kappa} \right].$$

В качестве примера приведем результаты расчета процесса затвердевания алюминиевого слитка толщиной 0,2 м при  $c_V = 2715$  кДж/(м<sup>3</sup>·К),  $\lambda = 222$  Вт/(м·К),  $\rho = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\kappa = 402$  кДж/кг,  $T_K = 933$  К,  $\nu = 2,78 \cdot 10^{-3}$  м/с ( $Pe = 3,4$ ),  $k(0) = 936$  Вт/м<sup>2</sup> К ( $Bi(0) = 0,422$ ). Для безразмерной температуры охлаждающей среды примем следующий закон изменения:

$$T_c(z) = 0,336 - 0,024z/h.$$



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1. представлены зависимости безразмерных величин температуры поверхности слитка  $T_f$ , потока тепла  $q$ , отводимого от слитка, и числа  $Bi$  от переменной  $z$ .

Фиг. 2 иллюстрирует зависимость скорости кристаллизации от скорости вытяжки слитка. При этом глубина жидкой лунки  $h$ , согласно формуле (22), равна 0,481 м, тогда как без учета осевого потока тепла (формула (25))  $h = 0,503$  м, т. е. различие составляет 4,5%.

Заметим, что полученное решение, кроме самостоятельного значения, может быть использовано также в качестве теста для проверки численных алгоритмов расчета задачи затвердевания непрерывного слитка плоской геометрии с учетом зависимости теплофизических параметров металла от температуры.

Поступила 12 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В. А., Китаев Е. М. Теплофизика формирования непрерывного слитка. М., «Металлургия», 1974.
2. Манохин А. И., Соколов Л. А., Глазков А. Я., Борисов В. Т., Виноградов В. В. Кинетика затвердевания слитка при непрерывной разливке.— «Изв. АН СССР. Металлы», 1973, № 6, с. 122.
3. Тихонов А. Н., Швидковский Е. Г. Теория непрерывного слитка.— ЖТФ, 1947, т. 17, вып. 2.
4. Рубинштейн А. Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.
5. Максимов Л. Н., Черепанов А. Н. Аналитическое исследование процесса затвердевания жидкого металла в установках непрерывного литья.— ПМТФ, 1977, № 3.