УДК 530.1

Метод описания процессов теплопроводности во фрактальных системах с использованием масштабной переменной

О.Н. Хатунцева[1,2]

[1]Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С.П. Королева, ул. Ленина, 4а, Королев, Московская область, 141070

[2]Московский физико-технический институт, Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская область, 141700
E-mail: ol-khatun@yandex.ru

Хатунцева О.Н. Метод описания процессов теплопроводности во фрактальных системах с использованием масштабной переменной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 95–105.

В работе предложен метод описания процессов теплопроводности (диффузии), протекающих во фрактальных системах, с использованием в уравнении теплопроводности дополнительной переменной, характеризующей масштаб рассмотрения фрактала.

Ключевые слова: *фрактал, дробная размерность, скейлинг, теплопроводность, диффузия.*

Khatuntseva O.N. Method for description of heat transfer processes in fractal systems using scale variable // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 95–105.

A method is offered for the description of heat transfer (diffusion) processes in fractal systems based on the heat conductivity equation enhanced by an additional variable specifying a scale of the consideration of the fractal.

Key words: *fractal, fractional dimension, scaling, heat conduction, diffusion.*

В последние десятилетия описанию процессов, протекающих во фрактальных (с дробной размерностью) пространствах и, в частности процессов теплопроводности и диффузии, посвящено большое количество работ (см., напр., [1, 2]). В основном, методы, применяемые в них, связаны с заменой производных по времени и производных по пространственным переменным на производные в дробной степени, соответствующие производным Римана–Лиувилля.

Главными недостатками такой процедуры видятся, во-первых, невозможность учета влияния масштаба структурного элемента фрактала на скорость протекания процесса, хотя в задачах подобного рода такая зависимость явно прослеживается; во-вторых, отсутствие четкой обоснованности перехода к дифференцированию с дробными производными.

Поясним сказанное. Начнем с обоснованности использования дифференциалов дробной степени на примере уравнения теплопроводности (диффузии).

Напомним, что при описании евклидовых (с целым числом измерений) пространств увеличение числа пространственных переменных в этом уравнении не влечет принципиального изменения вида самого уравнения и его решений. А именно, производная по времени всегда остается дифференциалом первой степени вне зависимости от числа пространственных переменных; “пространственная” часть уравнения представляет собой сумму производных второй степени по соответствующим пространственным переменным:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\chi(T)\,\frac{\partial T}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Здесь x_i, t — пространственные переменные и время, T — искомая функция, χ — коэффициент теплопроводности.

В результате при переходе от задачи в одномерной пространственной постановки к двух- и трехмерной решения уравнения теплопроводности (диффузии) не приобретают принципиальных различий.

Совсем иное дело — переход к дробным степеням α и γ производных в уравнении теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}\left(\chi(T)\,\frac{\partial^\gamma T}{\partial x^\gamma}\right), \quad 0 < \alpha < 2. \tag{2}$$

В этом случае решение для $1 < \alpha < 2$, $\gamma < 1$ характеризуется волновыми свойствами, что обычно трактуется как влияние “памяти” и “нелокальности” на рассматриваемый процесс во фрактальной структуре.

Проверка решений таких уравнений, в основном, сводится к переходу к пределу $\alpha = 1$ и $\gamma = 1$.

Алгоритм поиска степеней производных α и γ, как правило, не приводится, хотя всегда говорится, что их значения должны быть связаны с размерностью фрактального пространства.

Таким образом, можно констатировать отсутствие строгого математического вывода уравнения (2) и соотношений, связывающих величины α и γ с размерностью фрактального пространства, достаточной доказательной базы для сравнения полученных решений с экспериментальными данными, а также несоответствие изменения производной по времени в уравнении теплопроводности при переходе к пространству с большей (меньшей) размерностью для евклидовых и фрактальных пространств.

Вернемся теперь к невозможности учета влияния масштаба структурного элемента фрактала на скорость протекания процесса при использовании уравнения с дробными производными.

Масштабом структурного элемента фрактала здесь и далее условимся называть характерный размер ограниченной области протекания физического процесса (например, размер сосуда в кровеносной системе или трещины в горной породе), в которой находится точка с заданными координатами. Задав координату точки в теле человека, можно с разной вероятностью оказаться либо в области артерии, либо в области капилляра. Причем координаты артерии и капилляра (например, расстояние от сердца и направление) могут отличаться очень незначительно, но при этом скорость течения крови в сосудах с разными диаметрами может быть несоизмеримой. То же самое можно сказать и о других процессах: распространении волн, процессах диффузии и теплопроводности во фрактальных структурах и многом другом. Здесь напрашивается вывод о необходимости учета масштаба структурного элемента фрактала при описании физических процессов в такого рода задачах. А поскольку в уравнения с дробными производными не входят параметры, описывающие такой масштаб, и, соответственно, решения также не будут зависеть от него, то возникает желание исправить эту ситуацию и записать уравнения для описания физических процессов (в частности теплопроводности и диффузии), протекающих во фрактальных структурах, в иной форме [3]. Остановимся на этом подробнее.

Предположим, что на фиксированном масштабе фрактальной структуры мы исследуем изменение какого-либо параметра рассматриваемого физического процесса на интервале времени $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ $(\Delta t_1 \neq 0)$. При переходе к другому масштабу (при сохранении всех прочих характеристик геометрии пространства) можно будет обнаружить, что для точно такого же изменения параметра физического процесса потребуется другой интервал времени $\Delta t_2 = t_2 - t_0$. Проделав такую процедуру много раз, можно каждому масштабу δ_k поставить в соответствие свой интервал времени $\Delta t_k = \Delta t_k\left(\delta_k\right)$.

Обычно в реальности масштаб меняется скачком (например, в точках ветвления дендритов и в структурах с вязкими "пальцами" [4–7]), но в качестве модели можно рассмотреть фазовое пространство с непрерывным изменением масштаба. То есть считать, что обезразмеренные на единицу масштабы фрактальной структуры плавно изменяются от начального единичного масштаба $\delta = 1$ до $\delta = \delta_0$, где $0 < \delta_0 \leq 1$. В этом случае изменение интервалов времени также будет непрерывным $\Delta t = \Delta t\left(\delta\right)$ $(\Delta t \neq 0)$. Следовательно, можно найти производную

$$\frac{d\left(\Delta t\right)}{d\delta} = \frac{d\left(t\left(\delta\right) - t_0\right)}{d\delta} = \frac{dt}{d\delta} = \frac{1}{\dot{\delta}}.$$

Необходимо отметить, что вышеприведенные рассуждения верны в том случае, если в рассматриваемом физическом процессе мы исследуем изменение либо только одного параметра, либо нескольких, но таких, для которых изменение интервалов времени на разных масштабах происходит согласовано для всех параметров. Безусловно, существуют случаи, когда все происходит не так. Например, если одновременно исследуются разномасштабные по времени процессы, то некоторые параметры могут "не замечать" изменение пространственных масштабов вообще, а другие сильно зависеть от их вариации. В этом случае для каждого j-го класса согласованных параметров будут существовать свои зависимости $\Delta t^j = \Delta t^j\left(\delta\right)$ и свои производные $\dot{\delta}^j$. Таких случаев в данной работе мы касаться не будем. Здесь будут рассмотрены только задачи, в которых исследуются процессы с согласованными изменениями интервалов времени.

Если диапазон масштабов δ ограничен значениями $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, где $0 < \delta_0 \leq 1$, то объем, занимаемый фрактальной структуры $V(R)$, в приближении непрерывности изменения масштаба можно представить в виде $V(R) = \int_{\delta_0}^{1} G\left(R, \delta\right) d\delta$, где $G\left(R, \delta\right)$ — плотность распределения объема, занимаемого фрактальной структурой, по масштабам δ.

В силу того, что мы рассматриваем ограниченный диапазон масштабов δ, величина $V(R)$ это именно объем, занимаемый фрактальной структурой, вложенной в евклидовое пространство R^n, а не мера множества дробной размерности. У такой структуры может быть измерен объем в евклидовом пространстве R^n (например, так, как это сделал Пифагор с короной сложной формы). Можно это сделать и с помощью измерительных приборов. При этом полученное значение $V\left(R\right)$ будет ограничено, если в качестве единицы измерения линейных размеров брать самый маленький масштаб δ_0.

Выражение для объема можно переписать в виде

$$\int\limits_{\delta_0}^{1} \phi\left(\delta\right) d\delta = 1, \tag{3}$$

где $\phi(\delta) = G(R, \delta)/V(R)$ — удельная плотность распределения фрактальной структуры.

Будем рассматривать только самоподобные (идеальные с математической точки зрения) фракталы. Размерность подобия такого фрактала будет совпадать с фрактальной размерностью в выражении $V(R) = aR^D + b$ и может быть записана в виде соотношения [7]:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}} = \frac{\ln\bigl(G(R,\delta)/G(R,r\delta)\bigr)}{\ln r^{-1}},$$

где $r = \mathrm{const}$ — коэффициент подобия. В нашем случае для диапазона масштабов $\delta_0 \le \delta \le 1$, где $0 < \delta_0 \le 1$, $0 < r < 1$. Диапазон для коэффициента r, выбранный таким образом, обеспечивает положительное значение размерности D. Однако реальный диапазон значений коэффициента r для самоподобного фрактала должен быть у́же, т. е. $0 < r \le 1/2$, поскольку минимальное количество элементов, получающихся из одного начального, не может быть меньше двух.

Значение размерности D для односвязной фрактальной области, вложенной в трехмерное пространство, должно быть больше единицы, поэтому $1 < D < 3$.

Выражение для размерности задает скейлинговое соотношение $G(R,r\delta) = r^D G(R,\delta)$. Используя эту зависимость, можно найти приближенное выражение для производной $\partial G/\partial\delta$ при переходе к рассмотрению фазового пространства с непрерывным изменением масштаба. В самом деле,

$$\frac{\partial G(R,\delta)}{\partial\delta} = \lim_{\Delta\delta\to 0}\frac{\Delta G}{\Delta\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{G(R,\delta) - G(R,r\delta)}{\delta - r\delta} = \frac{1-r^D}{1-r}\lim_{\delta\to 0}\frac{G(R,\delta)}{\delta}.$$

Таким образом, мы получили производную $\partial G/\partial\delta$ для малых значений δ (когда $\delta \to \delta_0 \to 0$). Но поскольку фрактал является самоподобным объектом, то следует экстраполировать это выражение и на диапазон значений $\delta_0 \le \delta \le 1$, где $0 < \delta_0 \le 1$. Поэтому окончательно можно записать

$$\frac{\partial G(R,\delta)}{\partial\delta} = \frac{1-r^D}{1-r}\frac{G(R,\delta)}{\delta} = \beta\frac{G(R,\delta)}{\delta}, \quad \beta = \frac{1-r^D}{1-r}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\frac{d\phi(\delta)}{d\delta} = \beta\frac{\phi}{\delta}.$$

Величина β является константой для каждого конкретного фрактала и принимает значения из диапазона $1 < \beta < 2$ для любых значений $1 < D < 3$ и $0 < r \le 1/2$.

Из последнего уравнения находим, что $\phi(\delta) = \phi_0\delta^\beta$, где $\phi_0 = \mathrm{const}$. Значение ϕ_0 можно найти, решив уравнение $\int_{\delta_0}^1 \phi(\delta)\,d\delta = \phi_0\int_{\delta_0}^1 \delta^\beta d\delta = 1$. Из него получаем $\phi_0 = (\beta+1)/\bigl(1-\delta_0^{\beta+1}\bigr)$. И, следовательно,

$$\phi(\delta) = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\delta^\beta. \tag{5}$$

Найдем среднее значение величины t/δ для $t > 0$, определяемое заданной функцией распределения $\phi(\delta)$:

$$\left\langle\frac{t}{\delta}\right\rangle = \int\limits_{\delta_0}^{1}\frac{t(\delta)}{\delta}\phi(\delta)\,d\delta = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\int\limits_{\delta_0}^{1}\frac{t(\delta)}{\delta}\delta^\beta d\delta = \frac{\beta+1}{\beta\Bigl(1-\delta_0^{\beta+1}\Bigr)}\int\limits_{\delta_0}^{1} t(\delta)\,d\delta^\beta.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\left\langle \frac{t}{\delta} \right\rangle = \frac{\beta+1}{\beta\left(1-\delta_0^{\beta+1}\right)}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta}\right) - \frac{\beta+1}{\beta\left(1-\delta_0^{\beta+1}\right)}\int\limits_{\delta_0}^{1}\frac{dt}{d\delta}\delta^{\beta}d\delta$$
$$= \frac{\beta+1}{\beta\left(1-\delta_0^{\beta+1}\right)}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta}\right) - \frac{1}{\beta}\left\langle \frac{dt}{d\delta} \right\rangle, \tag{6}$$

где $t_1 = t(\delta)|_{\delta=1}$, $t_0 = t(\delta)|_{\delta=\delta_0}$ — времена, соответствующие рассматриваемому процессу на масштабах $\delta = 1$ и $\delta = \delta_0$, если $\delta_0 \le \delta \le 1$.

Полученное выражение можно переписать в виде

$$\left\langle \frac{dt}{d\delta} \right\rangle = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta+1}\right) - \beta\left\langle \frac{t}{\delta} \right\rangle$$

или

$$\left\langle \frac{dt}{d\delta} \right\rangle = \left\langle \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta}\right) - \beta\frac{t}{\delta} \right\rangle.$$

С учетом выражений (3) и (5) это соотношение примет вид

$$\int\limits_{\delta_0}^{1}\frac{dt}{d\delta}\frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\delta^{\beta}d\delta = \int\limits_{\delta_0}^{1}\left(\frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta}\right) - \beta\frac{t}{\delta}\right)\frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\delta^{\beta}d\delta.$$

Так как фрактальное множество является самоподобным для различных значений δ, то выражение, которое выполняется для величин, осредненных по всем значениям δ, должно выполняться при осреднении по отдельным интервалам δ, а в предположении непрерывности δ (устремляя эти интервалы к нулю) и для самих этих величин, измеренных в локальных областях этого пространства. Поэтому от полученного интегрального уравнения можно перейти к соотношению, связывающему подынтегральные выражения:

$$\frac{dt}{d\delta} = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}\left(t_1 - t_0\delta_0^{\beta}\right) - \beta\frac{t}{\delta}, \quad \text{где } t > 0. \tag{7}$$

Решением уравнения (7) является выражение

$$t(\delta) = t_0\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{\beta} + \frac{t_1 - t_0\delta_0^{\beta}}{1-\delta_0^{\beta+1}}\delta, \quad \text{где } t(\delta) > 0.$$

Если в полученную зависимость подставить соотношения (6), то найдем выражение, связывающее t_1 и t_0: $t_1 = t_0\delta_0^{\beta}$. С учетом этого выражения можно записать

$$t(\delta) = t_0\left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{\beta} = \frac{t_1}{\delta^{\beta}}.$$

А поскольку $\dot{\delta} = \frac{1}{dt/d\delta}$, то

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta^{\beta+1}}{\beta t_1}, \quad \text{где } t_1 > 0. \tag{8}$$

Совместное использование выражения (8) и уравнений, полученных для описания физических процессов в евклидовом пространстве, позволит описывать аналогичные процессы в пространстве с фрактальной геометрией.

Остановимся на этом подробнее. Введем дополнительную переменную δ, характеризующую масштаб фрактальной структуры, в фазовое пространство переменных, используемых в уравнениях в частных производных, $(t, \vec{x}) \to (t, \vec{x}; \delta)$.

Предположим, что в евклидовом пространстве функция $f\,(t, \vec{x})$ описывает исследуемый физический процесс, удовлетворяя при этом уравнению $df/dt = \widehat{A}\,f$, $\widehat{A}$ — произвольный дифференциальный оператор, вид которого зависит от конкретной задачи.

Для того, чтобы описать аналогичный процесс в пространстве с дробной размерностью с учетом влияния масштаба структурного элемента фрактала, будем рассматривать функцию $f\,(t, \vec{x}; \delta)$.

При описании такого процесса полную производную $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ следует заменить новой полной производной, имеющей вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{d\delta}{dt}\frac{\partial f}{\partial \delta}.$$

Производная $d\delta/dt$ в этом соотношении задана выражением (8). Причем время протекания физического процесса t_1 на единичном масштабе $\delta_1 = 1$ в выражении (8) является просто временем t $(t > 0)$ при описании этого процесса с помощью дифференциальных уравнений.

Таким образом, можно записать уравнение, описывающее физический процесс во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной β (см. (4)), в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta t}\frac{\partial f}{\partial \delta} = \widehat{A}\,f, \qquad \text{где } t > 0,$$

или для $f = f\,(t, \vec{x}; \mu\,(\delta))$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial \mu} + \sum_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \widehat{A}\,f, \qquad \text{где } \mu = \mu\,(\delta) = \delta^{-\beta},\ t > 0.$$

Дополнительная переменная δ (или $\mu\,(\delta)$) в дифференциальных уравнениях обеспечит учет влияния масштаба элемента фрактального множества на протекание физического процесса. Переменная δ в уравнениях находится для каждой рассматриваемой точки из построения конкретных фракталов.

Сделаем попытку на основе разработанного метода расширения фазового пространства за счет дополнительной масштабной переменной $\mu\,(\delta)$ решить задачу распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, "вложенной" в непроводящее (плохо проводящее) тепло трехмерное пространство, при условии независимости коэффициента теплопроводности χ от искомой функции T.

Для этого перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial T}{\partial \mu} = \chi \Delta T, \tag{9}$$

где $T = T\big(t, \vec{R}; \mu\big)$, $\chi = \chi\,(\mu)$, $\mu = \mu\,(\delta) = \delta^{-\beta}$, $t > 0$.

Задачу будем решать в постановке независимости начальной температуры от масштаба рассмотрения фрактальной структуры, т. е. с начальным условием

$$T\big(t,\vec{R};\mu\big)\Big|_{t=0} = T_0\big(\vec{R}\big) \text{ или } T\big(t,\vec{R};\delta\big)\Big|_{t=0} = T_0\big(\vec{R}\big). \tag{10}$$

Решение задачи (9), (10) осложнено наличием параметра (коэффициента теплопроводности), зависящего от масштаба исследуемого структурного элемента фрактального пространства.

Для того чтобы найти коэффициент теплопроводности (диффузии), запишем его среднее значение на интервале $\delta_0 \le \delta \le 1$ в виде $\langle\chi\rangle = \int_{\delta_0}^{1} \chi(\delta)\,\phi(\delta)\,d\delta$. Интегрируя правую часть этого соотношения по частям, с учетом выражения (5), получаем выражение

$$\langle\chi\rangle = \frac{\chi_1 - \chi_0\delta_0^{1+\beta}}{1-\delta_0^{1+\beta}} - \frac{1}{1+\beta}\left\langle \delta\frac{d\chi}{d\delta}\right\rangle. \tag{11}$$

Здесь $\left\langle \delta\frac{d\chi}{d\delta}\right\rangle = \int_{\delta_0}^{1} \delta\frac{d\chi(\delta)}{d\delta}\phi(\delta)\,d\delta$,

$$\chi_0 = \chi(\delta)|_{\delta=\delta_0}, \quad \chi_1 = \chi(\delta)|_{\delta=1}, \tag{12}$$

χ_0 и χ_1 — значения коэффициента теплопроводности соответственно на минимальном и максимальном масштабах рассмотрения фрактальной структуры.

Поскольку первое слагаемое в правой части выражения (11) является константой, это выражение можно переписать в виде

$$\langle\chi\rangle = \left\langle \frac{\chi_1 - \chi_0\delta_0^{1+\beta}}{1-\delta_0^{1+\beta}} - \frac{1}{1+\beta}\delta\frac{d\chi}{d\delta}\right\rangle.$$

Учитывая свойство самоподобия фрактальной структуры на разных масштабах, можно “отбросить” в левой и правой частях этого соотношения скобки, обозначающие усреднение по масштабам, и перейти к дифференциальному уравнению

$$\delta\frac{d\chi}{d\delta} + (1+\beta)\,\chi - (1+\beta)\,\frac{\chi_1 - \chi_0\delta_0^{1+\beta}}{1-\delta_0^{1+\beta}} = 0$$

с граничными условиями (12).

Решением этого уравнения является соотношение

$$\chi(\delta) = -\frac{\chi_1-\chi_0}{1-\delta_0^{1+\beta}}\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{-1-\beta} + \frac{\chi_1 - \chi_0\delta_0^{1+\beta}}{1-\delta_0^{1+\beta}}.$$

Переходя к зависимости $\chi = \chi(\mu)$ $(\mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta})$, записываем

$$\chi(\mu) = \chi_1\left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta}-1}\mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta}-1}\right), \quad \text{где } \mu_0 = \delta_0^{-\beta}.$$

Подставив полученное соотношение в уравнение (9), перепишем уравнение теплопроводности во фрактальной структуре в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial T}{\partial \mu} = \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\right)\chi_1 \Delta T \tag{13}$$

с начальным условием (10).

Разложим функцию $T\big(t, \vec{R}; \mu(\delta)\big)$ в ряд Фурье:

$$T\big(t, \vec{R}; \mu\big) = \int T_k(t;\mu)\, e^{i\vec{k}\vec{R}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{14}$$

где

$$T_k(t;\mu) = \int T\big(t, \vec{R}; \mu\big) e^{-i\vec{k}\vec{R}} d^3x. \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) в уравнение (13), получаем соотношение

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} + \frac{1}{t}\frac{\partial T_k}{\partial \mu} + \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\right) k^2 \chi_1 T_k = 0 \tag{16}$$

или

$$t\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mu} + t\left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\right) k^2 \chi_1 = 0, \tag{17}$$

где $f = f(t;\mu) = \ln(T_k/T_{0k})$, $T_{0k} = \mathrm{const}$.

Делая в выражении (17) замену $f = tM(\mu)$, получаем уравнение

$$\frac{dM}{d\mu} + M + \left(\frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\mu^{1+1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\right) k^2 \chi_1 = 0, \quad 1 \le \mu < \infty. \tag{18}$$

Для $\mu > 1$ $(\delta < 1)$ найдем решение уравнения (18) в виде

$$M(\mu) = -k^2\chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\left(\mu^{1+1/\beta} - (1+1/\beta)\,\mu^{1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\chi_0/\chi_1 - 1}\right) + O\left(\mu^{-1+1/\beta}\right).$$

Следовательно,

$$T_k(t;\mu) \approx T_{0k} \exp\left(-k^2 t \chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\mu_0^{1+1/\beta} - 1}\left(\mu^{1+1/\beta} - (1+1/\beta)\,\mu^{1/\beta} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \mu_0^{1+1/\beta}}{\chi_0/\chi_1 - 1}\right)\right)$$

или, учитывая, что $\mu = \mu(\delta) = \delta^{-\beta}$,

$$T_k(t;\delta) \approx T_{0k} \exp\left(-k^2 t \chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z\right), \tag{19}$$

где $Z = \left(\delta^{-1-\beta} - \big(1 + 1/\beta\big)\delta^{-1} - \frac{\chi_0/\chi_1 - \delta_0^{-1-\beta}}{\chi_0/\chi_1 - 1}\right)$.

Учитывая начальные условия (10) в виде $T\big(t, \vec{R}; \delta\big)\big|_{t=0} = T_0\big(\vec{R}\big)$, записываем $T_{0k} = \int T_0\big(\vec{R}\big) e^{-i\vec{k}\vec{R}} d^3x$. Подставляя это соотношение, а также выражение (19) в уравнение (14), находим

$$T \approx \int T_0\left(\vec{R}'\right) \exp\left(-k^2 t \chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z\right) \exp\left(i\vec{k}\left(\vec{R} - \vec{R}'\right)\right) d^3x \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ . \tag{20}$$

Интеграл по d^3k разбивается на произведение трех одинаковых интегралов (см. [7]) вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha\xi^2\right) \cos\left(\gamma\xi\right) d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\gamma^2/4\alpha\right)$, где ξ — одна из компонент вектора $\vec{k}$. Аналогичный интеграл с функцией синус вместо косинуса в выражении (20) исчезает в силу нечетности функции синус. В результате получаем окончательное выражение

$$T\left(t, \vec{R}; \delta\right) \approx \frac{1}{8\left(\pi t \chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z\right)^{3/2}} \int T_0\left(\vec{R}'\right) \exp\left(-\frac{\left(\vec{R} - \vec{R}'\right)^2}{4t\chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z}\right) d^3x'. \tag{21}$$

Точность решение уравнения (13) в виде (21) будет улучшаться при стремлении масштаба рассмотрения фрактальной структуры δ к значению δ_0 (если при этом $\delta_0 \ll 1$).

Если $\delta \to \delta_0 \to 0$, то $\chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z \underset{\delta \to \delta_0 \to 0}{\longrightarrow} \chi_0$, и выражение (20) перейдет в соотношение

$$T\left(t, \vec{R}; \delta\right)\Big|_{\delta = \delta_0} \approx \frac{1}{8\left(\pi t \chi_0\right)^{3/2}} \int T_0\left(\vec{R}'\right) e^{-\frac{\left(\vec{R} - \vec{R}'\right)^2}{4t\chi_0}} d^3x', \quad \delta_0 \to 0. \tag{22}$$

При $\delta \to 1$ погрешность решения уравнения (16) в виде соотношения (19) становится слишком велика, и выражение (21) перестает быть решением уравнения (13). В этом случае решение уравнения (18) стремится к значению $M = -k^2\chi_1$, а решение уравнения (13) — к выражению

$$T\left(t, \vec{R}; \delta\right)\Big|_{\delta = 1} \approx \frac{1}{8\left(\pi t \chi_1\right)^{3/2}} \int T_0\left(\vec{R}'\right) e^{-\frac{\left(\vec{R} - \vec{R}'\right)^2}{4t\chi_1}} d^3x'. \tag{23}$$

Отличие выражений (21) и (23) от соотношения для зависимости температуры от времени и пространственной координаты, полученной для процесса теплопроводности в неограниченном евклидовом пространстве [8]:

$$T\left(t, \vec{R}\right) \approx \frac{1}{8\left(\pi t \chi\right)^{3/2}} \int T_0\left(\vec{R}'\right) e^{-\frac{\left(\vec{R} - \vec{R}'\right)^2}{4t\chi}} d^3x', \tag{24}$$

состоит в замене коэффициента теплопроводности χ соответственно на произведение $\chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z$ и величину χ_1:

$$\chi|_{\delta \to \delta_0 \to 0} \to \chi_1 \frac{\chi_0/\chi_1 - 1}{\delta_0^{-1-\beta} - 1} Z \underset{\delta \to \delta_0 \to 0}{\longrightarrow} \chi_0$$

и

$$\chi|_{\delta \to 1} \to \chi_1.$$

Таким образом, при стремлении $\delta \to \delta_0 \to 0$ и $\delta \to 1$ выражения (21)–(23), являющиеся решениями поставленной задачи во фрактальном пространстве, имеют тот же вид, что и соотношение (24), полученное для процесса теплопроводности в неограниченном евклидовом пространстве.

Коэффициенты χ_0 и χ_1 являются характеристиками процесса теплопроводности соответственно на самом маленьком и самом большом масштабах рассмотрения фрактальной структуры. Они могут быть определены экспериментально, если известно начальное пространственное распределение температуры $T_0(\vec{R}')$. Для этого достаточно измерить температуру в окрестности заданной точки $\vec{R}$ в момент времени t (отсчитываемого от начала процесса нагрева образца) на самом маленьком и самом большом масштабах рассмотрения фрактальной структуры и из соотношений (22) и (23) найти значения коэффициентов χ_0 и χ_1 соответственно.

Значения этих коэффициентов можно использовать для нахождения температуры с помощью соотношений (20) или (23) в любой точке пространства в произвольный момент времени на масштабах рассмотрения фрактальной структуры из интервалов $\delta_0 \le \delta \ll 1$ и $\delta_0 \ll \delta \le 1$ соответственно для произвольного начального пространственного распределения температуры $T_0(\vec{R}')$.

В случае необходимости определения динамики изменения температуры во всем диапазоне масштабов $\delta_0 \le \delta \le 1$ можно воспользоваться численными методами нахождения решения уравнения (16) (или (18)) с заданными пространственными граничными условиями. В данной работе этот случай рассматриваться не будет.

Рассмотренная в данной работе задача определения изменения температуры во фрактальном пространстве так же, как и задача распространения возмущений [3], может служить примером использования разработанной математической модели описания физических процессов, протекающих во фрактальных пространствах с использованием дифференциальных уравнений, описывающих аналогичные процессы в структурах с евклидовой геометрией с помощью введения дополнительной координаты, характеризующей масштаб разбиения фрактала в каждой точке.

Ее решение на масштабах: $\delta_0 \le \delta \ll 1$ и $\delta_0 \ll \delta \le 1$ не теряет диффузионного вида при изменении размерности фрактального пространства так же, как этого не происходит при переходе в евклидовом пространстве от задачи в одномерной пространственной постановки к двух- и трехмерной.

Кроме того, найденное решение позволяет описывать зависимость температуры фрактальной среды от времени, пространственных координат (заданных в евклидовом пространстве) и масштабов рассмотрения фрактального пространства.

Литература

1. **Hentschel H.G.E., Procaccia I.** Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion // Phys. Rev. — 1983. — A27. — P. 1266–1269.

2. **Hentschel H.G.E., Procaccia I.** Relative diffusion in turbulent media: The fractal dimension of clouds // Phys. Rev. — 1984. — A29. — P. 1461–1470.

3. **Хатунцева О.Н.** Особенности описания физических процессов во фрактальных системах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 1. — С. 101–109.

4. **Хатунцева О.Н.** Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 2. — С. 231–241.

5. **Саттаров Р.М., Нагиев Ф.Б., Мамедов Р.М.** Процессы теплопереноса в реологически сложных жидкостях с фрактальной структурой // Минский Междунар. форум, ММФ–96 “Тепломассообмен”. — Минск, 1996. — Т. VI. — С. 198–205.

6. **Олемской А.И., Флат А.Я.** Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физических наук. — 1993. — Т. 163, № 12. — С. 1–48.
7. **Федер Е.** Фракталы. — М.: Мир, 1991.
8. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 25 ноября 2013 г.