

УДК 532.51

Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа*

И.С. Вожаков, Д.Г. Архипов, О.Ю. Цвелодуб

Новосибирский государственный университет

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: vozhakov@gmail.com

Выведена новая система уравнений для моделирования динамики длинноволновых возмущений на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости и обдуваемой турбулентным спутным потоком газа. Проведен анализ линейной устойчивости невозмущенного течения. Обнаружено, что при умеренных числах Рейнольдса жидкости линейные модели Бенджамина и переноса граничных условий на невозмущенный уровень для возмущенного течения газа дают качественно похожие результаты. При уменьшении числа Рейнольдса отличия между результатами, полученными по разным моделями турбулентности, становятся более выраженными. В случае малых чисел Рейнольдса жидкости из представленной системы уравнений получается одно эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня. Рассмотрены некоторые решения этого уравнения.

Ключевые слова: стекающая пленка, газовый поток, модельная система, устойчивость, эволюция возмущений.

Введение и постановка задачи

Совместное течение жидкости и газа — классическая задача гидродинамики. Применительно к задачам теплофизики и химической технологии часто имеет место турбулентное течение газа над тонким, покрытым волнами слоем жидкости. Решение этой проблемы в полной сопряженной постановке связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому зачастую выделяют два этапа моделирования: определение напряжений газа на поверхности пленки и последующий расчет эволюции волн в жидкости. Скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, поэтому поверхность раздела полагают жесткой и неподвижной. Кроме того, вследствие малости толщины пленки влияние возмущений границы раздела на скорости в газе можно считать линейным. В силу этого задача вычисления нормальных и касательных напряжений газа на поверхности сводится к рассмотрению влияния на них отдельных пространственных гармоник. На втором этапе исследования совместного течения исследуется динамика нелинейных волн на поверхности пленки жидкости.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (грант № 11.G34.31.0035, ведущий ученый — В.Е. Захаров, ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и Президента РФ для господдержки молодых ученых (грант № МК-5997.2014.1).

В настоящей работе рассматривается второй этап исследования — моделирование динамики нелинейных волн на пленке жидкости, стекающей под действием силы тяжести и градиента давления, в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Течение газа является турбулентным и происходит в вертикальном канале. Полная постановка задачи для жидкости включает уравнения Навье–Стокса и неразрывности с соответствующими кинематическими и динамическими граничными условиями. Серьезной проблемой является неопределенность положения подвижной границы, которое определяется в процессе решения. Целью работы является получение и исследование модельной системы уравнений, описывающей эволюцию длинноволновых возмущений границы раздела при умеренных числах Рейнольдса жидкости, в которой проблема свободной границы в определенном смысле решена. Кроме того, представляется возможным показать, как из этой системы в случае малых чисел Рейнольдса жидкости получается одно эволюционное уравнение на отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня.

Если исключить из рассмотрения эффекты уноса капель и осушения твердой поверхности, то область течения жидкости является односвязной. Наличие поверхностного натяжения обеспечивает отсутствие острых кромок на поверхности пленки. В этих условиях функция $y = h(x, t)$, определяющая положение точек границы области, часто является однозначной. Тогда существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, отображающее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = y/h(x, t), \quad t = t. \quad (1)$$

Новые переменные (1) не ортогональны, поэтому обычная формулировка уравнений движения в векторной форме неприменима. По этой причине часто ограничиваются простой заменой переменных в исходных уравнениях без преобразования векторов и тензоров (см., например, [1]). В результате получаются системы уравнений для декартовых компонент скорости жидкости. Эти компоненты, разумеется, не образуют вектор в новой криволинейной системе координат (1).

Другой способ выполнить преобразование (1) предполагает использование новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме. Используя такую запись для случая пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости в поле тяжести в приближении длинноволновости возмущений, в работе [2] была получена система:

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho h} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial \eta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad (4)$$

здесь h — толщина пленки, p — давление, u и v — контравариантные компоненты продольной и поперечной скорости соответственно, ρ — плотность, μ — динамическая вязкость жидкости.

Из граничных условий прилипания жидкости на гиперповерхности $\eta = 0$ следует:

$$u(x, 0, t) = 0, \quad v(x, 0, t) = 0. \quad (5)$$

На гиперповерхности $\eta = 1$ условия непротекания принимают вид:

$$v \equiv d\eta/dt = 0, \quad v(x, 1, t) = 0. \quad (6)$$

Одно из преимуществ системы (2)–(4) состоит в простоте ее обобщений на случаи сложных граничных условий. Так, в работе [3] рассматривалось совместное течение тонкой пленки жидкости и турбулентного потока газа в условиях микрогравитации. Было

показано, что, проектируя тензор вязких напряжений на вектор нормали к этой гиперповерхности, в длинноволновом приближении получаем:

$$\tau^{1j} n_j(x, 1, t) \equiv \frac{\mu}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = T_g(x, t) \equiv T_0 \left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(k) k h_k(k, t) e^{ikx} dk \right), \quad (7)$$

здесь $T_g(x, t)$ и T_0 — соответственно распределение касательных напряжений газа на поверхности пленки и его невозмущенная составляющая, $\tau(k)$ — Фурье-компоненты касательных напряжений газа, обусловленные криволинейностью границы раздела, $h_k(k, t)$ — Фурье-компоненты разложения формы поверхности, имеющие вид:

$$h_k(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (8)$$

Учитывая наличие скачка нормального напряжения на поверхности, в этом же приближении имеем:

$$p = P_g(x, t) - 2\sigma H \equiv P_0(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} p(k) k h_k(k, t) e^{ikx} dk - 2\sigma H, \quad (9)$$

здесь $P_g(x, t)$ — распределение пульсаций давления газа на поверхности пленки, $P_0(x)$ — давление газа в отсутствие возмущений поверхности пленки жидкости, $H = a^{ij} b_{ij}$ — средняя кривизна поверхности, определяемая как свёртка первой a_{ij} и второй b_{ij} квадратичных форм свободной поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Так как средняя кривизна является скаляром, вычислим ее в декартовых координатах. В приближении длинноволновости получим:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (10)$$

Используя уравнения (9), (10), приводим систему (2)–(4) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial \eta} &= \frac{\sigma}{\rho} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\mu}{\rho h} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + gh - \\ &- \frac{\chi}{\rho} h - \frac{h}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} ik^2 p(k) h_k(k, t) e^{ikx} dk, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь $\chi \equiv dP_0/dx$. Часто $\chi = \text{const}$, поэтому, практически без ограничения общности, в дальнейшем четвертое слагаемое в правой части уравнения (11) будем опускать, считая, что оно включено в состав третьего, т.е. в (11) вместо g имеем $g_{\text{eff}} = g - \chi/\rho$. В дальнейшем индекс u параметра g_{eff} будем опускать. Кроме того, заметим, что для случаев течения газа в широких каналах обычно справедливо соотношение $\chi \ll \rho g$, поэтому слагаемым, содержащим этот коэффициент, можно пренебречь.

Выберем характерные масштабы скорости — u_0 , длины — l_0 , толщины — h_0 , времени — l_0/u_0 , напряжений P_g, T_g — ρu_0^2 , и перепишем систему уравнений (11) в безразмерных переменных (поемим их знаком $\tilde{}$):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u/u_0, \quad \tilde{v} = l_0 v/u_0, \quad \tilde{x} = x/l_0, \quad \tilde{t} = u_0 t/l_0, \quad \tilde{h} = h/h_0, \\ \tilde{h}_k &= h_k(k, t)/(h_0 l_0), \quad \tilde{k} = kl_0, \quad \tilde{\tau}_0 = T_0/(\rho u_0^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{h})}{\partial\tilde{t}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial(\tilde{u}^2\tilde{h})}{\partial\tilde{x}} + \frac{u_0^2 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v}\tilde{h})}{\partial\eta} = \frac{h_0^2}{l_0^3} \cdot \frac{\sigma}{\rho} \tilde{h} \cdot \frac{\partial^3\tilde{h}}{\partial\tilde{x}^3} - \\ & - \frac{\rho u_0^2 h_0^2}{l_0^2} \cdot \frac{\tilde{h}}{\rho} \int h_k i k^2 \tilde{p}(\tilde{k}) e^{i k \tilde{x}} d\tilde{k} + \frac{u_0}{h_0} \cdot \frac{\mu}{\rho \tilde{h}} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + g h_0 \tilde{h}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{u_0 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{h})}{\partial \tilde{x}} + \frac{u_0 h_0}{l_0} \cdot \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{h})}{\partial \eta} = 0. \quad (13)$$

Введем безразмерные параметры: число Рейнольдса — $Re = \rho h_0 u_0 / \mu$, число Вебера — $W = \sigma / (\rho l_0 u_0^2)$, число Фруда — $Fr = u_0^2 / (g h_0)$ и отношение толщины пленки к характерной длине волны — $\varepsilon = h_0 / l_0$.

Система (12), (13) принимает вид (знак обезразмеривания $\tilde{}$ опускаем):

$$\begin{aligned} \varepsilon Re \left(\partial(uh) / \partial t + \partial(u^2 h) / \partial x + \partial(uvh) / \partial \eta \right) &= \varepsilon^2 Re W h h_{xxx} - \\ - \varepsilon^2 Re h \int i h_k k^2 p(k) e^{i k x} dk &+ u_{\eta\eta} / h + (Re / Fr) h, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\partial h / \partial t + \partial(uh) / \partial x + \partial(vh) / \partial \eta = 0. \quad (15)$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$u(x, 0, t) = 0, \quad (16)$$

$$v(x, 0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 1, t) = h Re \tau_0 \left(1 + \varepsilon \int h_k k \tau(k) e^{i k x} dk \right), \quad (17)$$

$$v(x, 1, t) = 0.$$

В настоящей работе ограничимся случаем спутного течения газа, поэтому $\tau_0 > 0$.

Выберем h_0 и u_0 так, чтобы для безволнового течения безразмерная толщина пленки $\tilde{h} = 1$ и безразмерный расход пленки $\tilde{Q} = 1$. Тогда невозмущенный профиль скорости течения имеет вид:

$$u^0 = \frac{Re}{Fr} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + Re \tau_0 \eta, \quad (18)$$

а из условия $\tilde{Q} = 1$ следует связь между числами Рейнольдса и Фруда:

$$Q^0 = \int_0^1 u^0 d\eta = 1 \Rightarrow Fr = 2Re / (3(2 - Re \tau_0)).$$

Отметим здесь, что при таком выборе характерных масштабов безразмерное значение касательного напряжения τ_0 на невозмущенной границе раздела фаз ограничено сверху: $\tau_0 < \tau_* = 2 / Re$. Критическое значение параметра τ_* достигается в условиях неустойчивости ($Fr = \infty$), когда профиль скорости (18) вырождается в линейный (течение Куэтта).

Исследование линейной устойчивости

Для исследования линейной устойчивости профиля (18) рассмотрим возмущенное течение:

$$u = u_0 + (u_1 e^{ikx - ikt} + \text{К.С.}), \quad v = (v_1 e^{ikx - ikt} + \text{К.С.}), \quad h = 1 + (h_1 e^{ikx - ikt} + \text{К.С.}),$$

здесь К.С. — комплексно сопряженное выражение.

Линеаризуя систему (14)–(15) относительно возмущений, для комплексных амплитуд получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{Re} \left(-ikcu_1 - ikcu_0 h_1 + 2iku_0 u_1 + iku_0^2 h_1 + u_{0\eta} v_1 + u_0 v_{1\eta} \right) = \\ = -ik^3 \varepsilon^2 \operatorname{Re} W h_1 + u_{1\eta\eta} - u_{0\eta\eta} h_1 + (\operatorname{Re}/\operatorname{Fr}) h_1, \\ -ikc + iku_1 + iku_0 h_1 + v_{1\eta} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из граничных условий (16)–(17) имеем:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0, t) = 0, \\ v_1(x, 0, t) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta}(x, 1, t) = h_1 \operatorname{Re} \tau_0 (1 + \varepsilon \tau(k)k), \\ v_1(x, 1, t) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения линейного отклика касательного ($\tau(k)$) и нормального ($p(k)$) напряжений на возмущения границы раздела фаз рассмотрим течение газа над волнистой поверхностью пленки жидкости. В работах [4, 5] приведены наиболее популярные из используемых для этой цели линейные модели турбулентного течения над волнистой стенкой.

Первая модель, основанная на переносе граничных условий на невозмущенный уровень (МПУ), приводит к уравнению Орра–Зоммерфельда:

$$\left(v_g U'' - U(v_g'' - v_g) \right) = i \delta k_g \left(v_g'''' - 2v_g'' + v_g \right), \quad (21)$$

здесь $\delta = \nu / u^*$ — толщина пограничного слоя, ν — коэффициент кинематической вязкости газа, $u^* = \sqrt{T_0 / \rho_g}$ — динамическая скорость, $k_g = 2\pi / \lambda_{ct}$, λ_{ct} — период волнистости стенки.

Модель Бенджамина (МБ) для вычисления тензора напряжений газового потока, предложенная в работе [6], сводится к рассмотрению уравнения

$$v_g U'' - U(v_g'' - v_g) = i \delta k \left(v_g'''' - 2v_g'' + v_g + (U'''' - 2U''') e^{-y} \right). \quad (22)$$

При решении уравнений (21), (22) использовался профиль осредненной скорости течения газа из работы [7]. Он имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U(y/\delta) / u^* = 4,33 \ln(1 + 0,091y/\delta) - 0,915 \ln(1 - 0,092y/\delta + 0,0108y^2/\delta^2) + \\ + 5,59 \arctan(0,116y/\delta - 0,492) + 2,56. \end{aligned}$$

Решив предложенные дифференциальные уравнения, находим соответствующие значения $\tau(\delta k_g)$ и $p(\delta k_g)$.

Результаты расчетов касательных напряжений по этим моделям приведены на рис. 1. Здесь представлены значения вещественной (кривые 1, 3) и мнимой (кривые 2, 4) частей амплитуды пульсаций трения на волнистой твердой стенке в зависимости от безразмерного волнового числа стенки $\tilde{k}_g \equiv \delta k_g = kv / u^*$, полученные соответственно

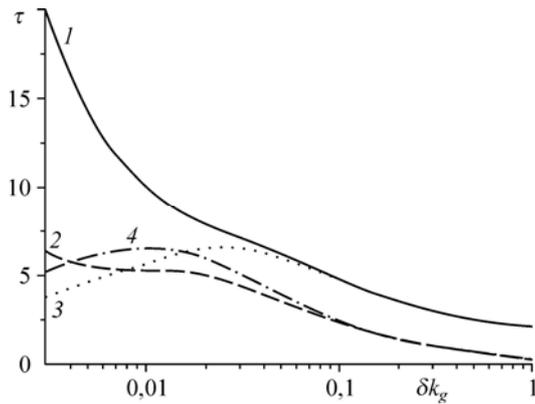


Рис. 1. Зависимости возмущений касательных напряжений, полученных по моделям ПГУ и Бенджамина, от безразмерного волнового числа.

Модели: ПГУ — вещественная (1) и мнимая (2) части, Бенджамина — вещественная (3), мнимая (4) части.

по моделям МПГУ и МБ. Эти данные использовались для решения краевой задачи (19)–(20). В результате были получены зависимости $c \equiv c_r + ic_i = c(k)$.

Возмущения, для которых мнимая часть комплексной скорости $c_i > 0$ ($c_i < 0$), неустойчивы (устойчивы) и экспоненциально нарастают (затухают) со временем.

На рис. 2, 3 представлены графики размерных инкрементов $\beta_i \equiv kc_i$ в зависимости от размерного волнового числа для двух характерных значений $Re = 1$ и $Re = 20$ пленки воды, обдуваемой потоком воздуха со среднерасходными скоростями $U_{cp} = 5$ м/с и $U_{cp} = 10$ м/с соответственно, в канале с гидравлическим диаметром $d = 1$ см. Также на рисунках отражены результаты для свободно стекающей пленки (кривые 1), для пленки с учетом только стационарного касательного напряжения со стороны газовой фазы (кривые 2), результаты расчетов по МПГУ (кривые 3) и по МБ (кривые 4). Видно, что учет влияния стационарной составляющей трения газового потока стабилизирует пленку (кривые 1, 2), тогда как учет пульсаций касательного напряжения приводит к обратному эффекту (кривые 3, 4). Как можно заметить, графики функций, полученные с помощью модели переноса граничных условий и по модели Бенджамина, качественно похожи. Области неустойчивых возмущений отличаются друг от друга всего на несколько процентов, причем для модели Бенджамина она немного шире. С увеличением числа Рейнольдса пленки различия в данных, полученных по МПГУ и МБ, уменьшаются, что видно при сравнении кривых 3, 4 на рис. 2 и 3.

Полученные данные согласуются с данными работ [8, 9], где с помощью результатов работы [5] исследовалась устойчивость пленочных течений как на основе интегральной модели, так и на основе уравнения Орра–Зоммерфельда.

Вывод эволюционного модельного уравнения

Известно, что для пленки, свободно стекающей по вертикальной плоскости, в случае малых расходов ($Re \sim 1$) задача сводится к одному эволюционному уравнению

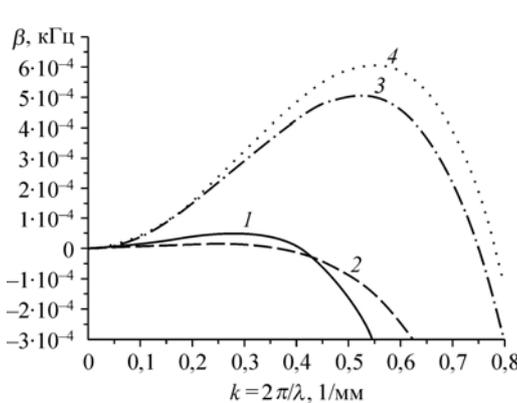


Рис. 2. Зависимости инкремента возмущений от волнового числа для $Re = 1$.

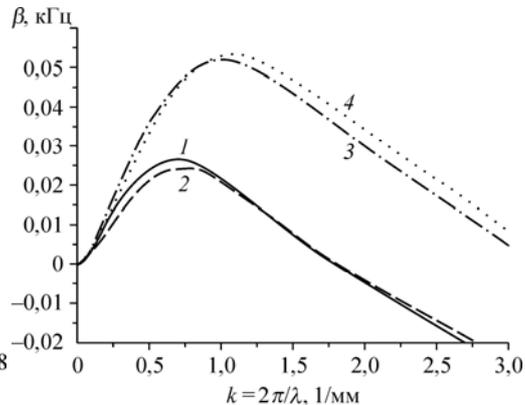


Рис. 3. Зависимости инкремента возмущений от волнового числа для $Re = 20$.

на возмущение толщины пленки. Для пленки, увлекаемой газом, аналогичный результат можно получить из системы (14)–(17). Вследствие малости толщины пленки по сравнению с длиной волны решение системы представляется в виде рядов по малому параметру ε : $u = u^0 + \varepsilon u^1 + \dots$, $v = v^0 + \varepsilon v^1 + \dots$. Кроме этого, введем в рассмотрение медленное и быстрое времена: $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$.

В нулевом порядке по ε приходим к задаче:

$$u_{\eta\eta}^0 + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(h)^2 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t_0} + \frac{\partial(u^0 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v^0 h)}{\partial \eta} = 0;$$

$$u^0(x, 0, t_0) = 0, \quad (24)$$

$$v^0(x, 0, t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial \eta}(x, 1, t_0) = h \text{Re} \tau_0,$$

$$v^0(x, 1, t_0) = 0.$$

Решение системы (23), удовлетворяющие граничным условиям (24), имеет вид:

$$u^0 = \frac{\text{Re} h^2}{\text{Fr}} \left(\eta - \frac{\eta^2}{2} \right) + \text{Re} \tau_0 h \eta, \quad (25)$$

$$v^0 = -\frac{\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial t_0} - \frac{3h \text{Re}}{2\text{Fr}} \left(\eta^2 - \frac{\eta^3}{3} \right) \frac{\partial h}{\partial x} - \text{Re} \tau_0 \eta^2 \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (26)$$

Из (26) и граничного условия (24) приходим в этом приближении к следующему уравнению на толщину пленки:

$$h_{t_0} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h^2 h_x + \text{Re} \tau_0 h h_x = 0. \quad (27)$$

Для первого порядка разложения по параметру ε из системы (14)–(17) имеем систему:

$$\text{Re} \left(\frac{\partial(u^0 h)}{\partial t_0} + \frac{\partial((u^0)^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(u^0 v^0 h)}{\partial \eta} \right) = \varepsilon \text{Re} W h h_{xxx} + \frac{u_{\eta\eta}^1}{h}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial(u^1 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v^1 h)}{\partial \eta} = 0 \quad (29)$$

с граничными условиями

$$u^1(x, 0, t_0, t_1) = 0, \quad (30)$$

$$v^1(x, 0, t_0, t_1) = 0;$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial \eta}(x, 1, t_0, t_1) = h \text{Re} \tau_0 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk, \quad (31)$$

$$v^1(x, 1, t_0, t_1) = 0.$$

Используя выражения (25), (26) для u^0 и v^0 , перепишем (28) в следующем виде:

$$u_{\eta\eta}^1 = \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} \eta h^3 h_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} \eta^2 h^5 h_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}} \eta^2 h^4 \tau_0 h_x - \varepsilon \text{Re} W h^2 h_{xxx}. \quad (32)$$

Решая (32) и используя граничные условия (30), (31), для u^1 получаем:

$$u^1 = -\varepsilon \text{Re} W h^2 h_{xxx} \left(\frac{\eta^2}{2} - \eta \right) + \frac{1}{2} \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} h^3 h_t \left(\frac{\eta^3}{3} - \eta \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h^5 h_x \left(\frac{\eta^4}{4} - \eta \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}} \tau_0 h^4 h_x \left(\frac{\eta^4}{4} - \eta \right) + \text{Re} \tau_0 h \eta \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk. \quad (33)$$

Подставляя решение (33) в уравнение (29) и учитывая граничное условие (30), приходим к следующему выражению для v^1 :

$$v^1 = -\frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\varepsilon \text{Re} W h^3 h_{xxx} \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} h^4 h_{t_0} \left(\frac{\eta^4}{12} - \frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h^5 h_x \left(\frac{\eta^5}{20} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right) (h + \tau_0 \text{Fr}) + \text{Re} \tau_0 h^2 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk \frac{\eta^2}{2} \right) - \eta \frac{\partial h}{\partial t_1}. \quad (34)$$

Исключая из (34) с помощью (27) h_{t_0} и используя для v^1 граничное условие (31), приходим в этом приближении еще к одному уравнению на толщину пленки h :

$$\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \varepsilon \text{Re} W h^3 h_{xxx} + \frac{2}{15} \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h^5 h_x (h + \tau_0 \text{Fr}) + \frac{1}{2} \text{Re} h^2 \tau_0 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right) = 0. \quad (35)$$

Складывая уравнения (27) и (35) и возвращаясь к общему времени t , получаем одно модельное уравнение на толщину пленки:

$$h_t + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h^2 h_x + \text{Re} \tau_0 h h_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \varepsilon \text{Re} W h^3 h_{xxx} + \frac{2}{15} \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} h^5 h_x (h + \tau_0 \text{Fr}) + \frac{1}{2} \text{Re} h^2 \tau_0 \int h_k k \tau(k) e^{ikx} dk \right) = 0. \quad (36)$$

Напомним, что при выводе уравнения (36) использовалось приближение малых чисел Рейнольдса ($\text{Re} \sim 1$), кроме того, при выводе системы (14)–(15) полагалось, что число Вебера велико — $W\varepsilon \sim 1$. Уравнение (36) с точностью до обозначений совпадает с уравнением, полученным в работе [10]. В случае, когда рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (36), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом.

Если ограничиться рассмотрением возмущений малой, но конечной амплитуды и снова ввести в рассмотрение медленное и быстрое времена, то с помощью преобразования $h = 1 + \varepsilon h_1$, $t_0 = t$, $t_1 = \varepsilon t$ из уравнения (36) получаем:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_0} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (1 + \text{Fr} \tau_0) \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} (2 + \text{Fr} \tau_0) h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\text{WeRe}\varepsilon}{3} \cdot \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} + \frac{2}{15} \cdot \frac{\text{Re}^3}{\text{Fr}^2} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} (1 + \tau_0 \text{Fr}) + \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \tau_0 \int i h_{1k} k^2 \tau(k) e^{ikx} dk = 0. \quad (38)$$

Из уравнения (37) следует, что в первом приближении (на быстрых временах) возмущения малой, но конечной амплитуды распространяются с характерной постоянной скоростью $c_0 = \text{Re}/\text{Fr}(1 + \text{Fr}\tau_0)$. В этом приближении движение происходит без изменения начальной формы возмущений.

Уравнение (38) описывает нелинейную эволюцию возмущений на больших временах. Уточним выбор характерного продольного масштаба l_0 следующим образом — потребуем, чтобы коэффициенты при второй и четвертой производных в уравнении (38) были одинаковы. Из этого следует, что соотношение для ε будет иметь вид: $\varepsilon = 2\text{Re}^2/5W\text{Fr}^2(1 + \text{Fr}\tau_0)$. С учетом этого выбора после замены $\tau = bt_1$, $h_1 = AH$, $b = \text{WeRe}\varepsilon/3$, $A = 2\text{Fr}b/(\text{Re}(2 - \text{Fr}\tau_0))$ уравнение (38) переписывается в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + 2H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B \int_{-\infty}^{\infty} ik^2 \tau(k) H_k(k, t) e^{ikx} dk = 0, \quad (39)$$

здесь $B = \text{Re}\tau_0/(2b) \equiv 3\tau_0/(2W\varepsilon)$.

Уравнение (39) является интересным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. За неустойчивость линейных возмущений отвечают его слагаемые со второй производной и член, содержащий интеграл (последний обусловлен учетом возмущений трения на границе раздела пленка–газ), а диссипацию обеспечивает четвертая производная, моделирующая капиллярные эффекты. Действительно, если пренебречь в (39) нелинейным членом и представить его решение в виде $H \sim \exp(ik(x - ct))$, то придем к следующему дисперсионному соотношению:

$$c = i(k - k^3) + Bk\tau(k). \quad (40)$$

Возмущения будут неустойчивы, если мнимая часть фазовой скорости c будет больше нуля. Используя то, что для нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости $c_i = 0$, из соотношения (40) для нейтрального волнового числа k_n имеем

$$1 - k_n^2 + B\tau_{im}(k_n) = 0. \quad (41)$$

Как видно из (41), описанный выше выбор характерного продольного масштаба l_0 сделан так, чтобы в случае свободно стекающей пленки ($B = 0$) нейтральное волновое число $k_n = 1$. Таким образом, в случае малых чисел Рейнольдса задача исследования возмущений на поверхности горизонтальной пленки жидкости, увлекаемой потоком газа, сводится к рассмотрению решений одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Для нахождения периодических по x решений уравнения (39) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, \tau) = \sum_n H_n(\tau) \exp(iknx). \quad (42)$$

Так как H — вещественная функция, то $\bar{H}_{-n} = H_n$. Верхняя черта означает операцию комплексного сопряжения.

После подстановки (42) в уравнение (39) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $H_n(\tau)$. Полагая, что все $H_n(\tau)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу.

При исследовании эволюции периодических возмущений в качестве условия нормировки будем полагать, что среднее отклонение толщины пленки от невозмущенного уровня равно нулю.

Результаты расчетов нелинейных волн по модельному уравнению

Будем использовать данные по пульсациям трения, полученные по модели Бенджамина. Эти результаты представлены на рис. 1 кривыми 3, 4. Как видно, например, из рис. 2, 3 (см. кривые 4), область неустойчивых волновых чисел k лежит в интервале $0 \div k_n$. В этом смысле ситуация аналогична той, которая имеет место для широко известного уравнения Курамото–Сивашинского (К–С). У него есть счетное множество стационарно-бегущих решений. Известно, что эволюционное поведение периодических решений этого уравнения существенно зависит от того, сколько имеется стационарно-бегущих решений с данным волновым числом (см., например, [11]). Так как области неустойчивых волновых чисел линейных возмущений у уравнений К–С и (39) топологически подобны ($k \in 0 \div k_n$), то можно ожидать, что и у уравнения (39) структура стационарно-бегущих решений тоже будет нетривиальна. Понимание этого позволяет разобраться в поведении некоторых типичных сценариев эволюции решений уравнения (39).

В настоящей работе приведены результаты, полученные при одном значении параметра $B = 0,0287$. В этом случае нейтральное волновое число $k_n = 1,1$.

Для всех представленных ниже результатов рассматривалась эволюция периодического возмущения, у которого в начальный момент ненулевой задавалась только первая гармоника: $H_{1r} = 0,01$, $H_{1i} = 0$. Цель проведенных расчетов — продемонстрировать, как при фиксированном значении параметра B и одинаковых начальных данных по мере продвижения вглубь области линейной неустойчивости у уравнения (39) меняется решение.

Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно-бегущее семейство решений. В этом случае все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему стационарно-бегущему решению. Пример такого развития возмущений при $k = 0,9$ показан на рис. 4. Здесь представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени. Как видно из рисунка, модули всех трех гармоник быстро выходят на стационарные значения, причем первая гармоника является преобладающей. Поэтому установившийся стационарно-бегущий режим представляет собой практически чистую синусоиду. Такое поведение гармоник обусловлено тем, что только первая из них лежит в области неустойчивости. Вторая гармоника расположена уже достаточно далеко от границы этой области, поэтому у нее и более высоких гармоник линейное затухание велико. Нелинейные эффекты, обусловленные квадратичной нелинейностью (второе слагаемое в уравнении (39)), приводят к тому, что в результате между гармониками устанавливается такой баланс, когда модуль первой гармоники существенно больше, чем у всех остальных гармоник.

На рис. 5, 6 показан пример развития возмущения с волновым числом $k = 0,7$. Здесь решение также притягивается к стационарно-бегущей волне (рис. 5), но, в отличие от

первого примера, и вторая, и третья гармоники соизмеримы с первой. В этом случае также только первая гармоника лежит в области неустойчивости; вторая гармоника, хотя и лежит в области устойчивости, располагается к границе неустойчивости существенно ближе,

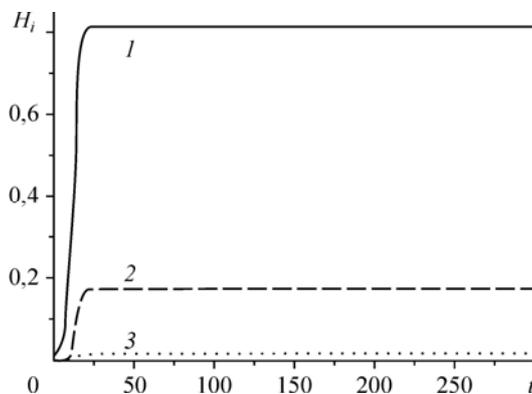


Рис. 4. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени при $k = 0,9$.

Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,01$;
1 — H_1 , 2 — H_2 , 3 — H_3 .

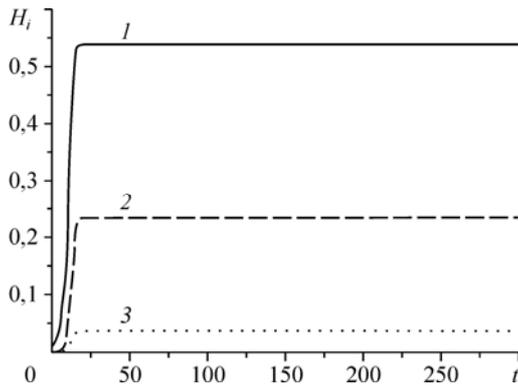


Рис. 5. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени при $k = 0,7$. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,01$; 1 — H_1 , 2 — H_2 , 3 — H_3 .

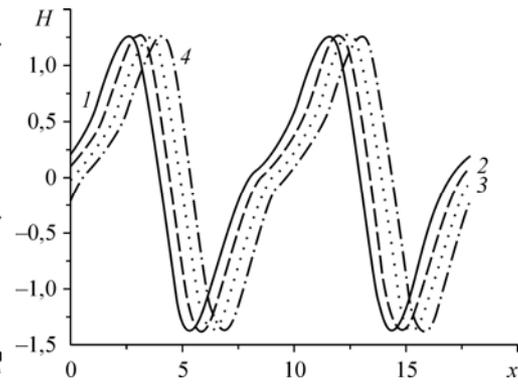


Рис. 6. Профили поверхности для четырех различных моментов времени при $k = 0,7$. $t = 50$ (1), 100 (2), 150 (3), 200 (4).

чем в первом случае, и нелинейные эффекты при выходе на стационар обеспечивают ее модулю достаточно большую величину. В свою очередь, это приводит к тому, что и более высокие гармоники также достигают больших установившихся значений. Поэтому, как видно из рис. 6, установившаяся волна заметно отличается от чистой синусоиды. Также на рисунке для трех различных моментов времени показаны профили волн. По оси абсцисс отложены две длины волны — 2λ ($\lambda = 2\pi/k$).

Пример развития возмущения с волновым числом $k = 0,3$ представлен на рис. 7, 8. На них видно, что решение также проэволюционировало к некоторому стационарно-бегущему решению, но этот пример существенно отличается от приведенных выше. В этом случае (рис. 7) на больших временах доминирует 2-я гармоника, поэтому на этих временах на длине волны наблюдается два основных экстремума (см. рис. 8).

Представленными примерами не исчерпывается многообразие различных сценариев развития возмущений. Для того, чтобы выявить среди них основные, требуется провести существенно большее количество расчетов для нескольких различных значений параметра B , варьируя с достаточно мелким шагом как волновое число рассматриваемых решений, так и начальные значения гармоник. Такая работа планируется позже.

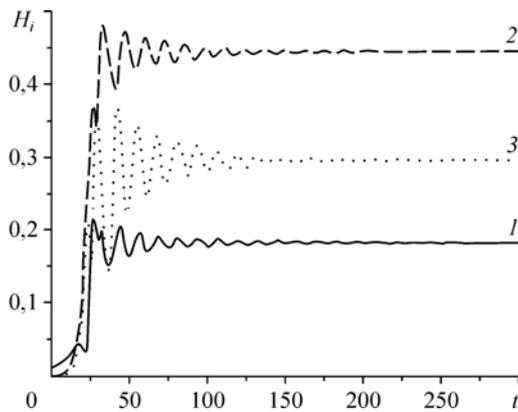


Рис. 7. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени при $k = 0,3$. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,01$; 1 — H_1 , 2 — H_2 , 3 — H_3 .

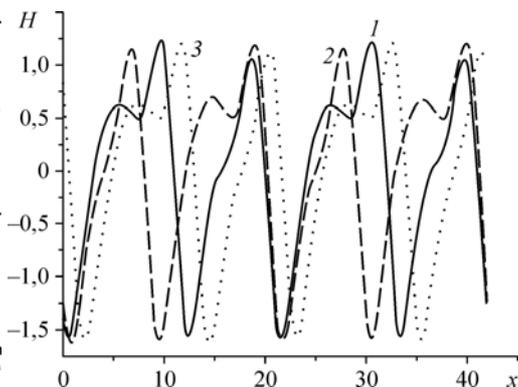


Рис. 8. Профили поверхности для трех различных моментов времени при $k = 0,3$. $t = 50$ (1), 150 (2), 300 (3).

Список литературы

1. **Гешев П.И., Ездин Б.С.** Расчет профиля скорости и формы волны на стекающей пленке жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск, 1985. С. 49–57.
2. **Алексеенко С.В., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю.** Дивергентная система уравнений для пленки жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Доклады РАН. 2011. Т. 436, № 1. С. 43–46.
3. **Tselodub O.Yu., Arkhipov D.G.** Nonlinear wave simulation on a surface of liquid film entrained by turbulent gas flow at weightlessness // Microgravity Sci. and Technology. 2013. Vol. 25, No. 3. P. 179–186.
4. **Alekseenko S.V., Arkhipov D.G., Tselodub O.Yu.** Modelling of the stresses produced by the turbulent gas flow over the wavy liquid film // Transport Phenomena with Moving Boundaries. Berlin, 2007. P. 51–62.
5. **Демѣхин Е.А.** Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 37–42.
6. **Benjamin T.B.** Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. Vol. 6, No. 2. P. 161–205.
7. **Гешев П.И.** Линейная модель пристенного турбулентного переноса. Новосибирск. Препр. Института теплофизики СО АН СССР. 1981. № 73–81. 40 с.
8. **Alekseenko S.V., Aktershev S.P., Cherdantsev A.V., Kharlamov S.M., Markovich D.M.** Primary instabilities of liquid film flow sheared by turbulent gas stream // Intern. J. of Multiphase Flow. 2009. Vol. 35. P. 617–627.
9. **Aktershev S.P., Alekseenko S.V.** Interfacial instabilities in an annular two-phase flow // Russian J. of Engng Thermophysics. 1996. Vol. 6, No. 4. P. 307–320.
10. **Tseluiko D., Kalliadasis S.** Nonlinear waves in counter-current gas–liquid film flow // J. of Fluid Mech. 2011. Vol. 673. P. 19–59.
11. **Цвелодуб О.Ю.** Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 2. С. 183–192.

*Статья поступила в редакцию 20 мая 2014 г.,
после доработки — 17 июля 2014 г.*