

УДК 532.517.4

## Асимптотическое вырождение дальнего безымпульсного турбулентного следа за сферой в изотропном турбулентном потоке\*

А.Г. Деменков<sup>1,2</sup>, Г.Г. Черных<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр информационных  
и вычислительных технологий, Новосибирск

E-mails: demenkov@itp.nsc.ru; chernykh@ict.nsc.ru

С применением модифицированной  $e \sim \varepsilon$  модели турбулентности выполнено численное моделирование заключительной вязкой стадии вырождения безымпульсного турбулентного следа за сферой в изотропном турбулентном потоке. Законы вырождения согласуются с законами вырождения безымпульсного турбулентного следа в отсутствие турбулентного фона.

**Ключевые слова:** дальний безымпульсный турбулентный след за сферой, изотропный турбулентный фон, математическое моделирование, заключительная стадия вырождения.

### Введение

Струйные турбулентные течения представляют интерес в связи с решением задач энергетики, созданием и усовершенствованием различных технических устройств, изучением обтекания тел. Интересным примером турбулентного струйного течения является течение в следах за телами вращения. Изучению турбулентных следов в отсутствие турбулентного фона посвящено большое количество работ. В значительно меньшем числе работ исследуется спутное турбулентное течение в условиях ненулевого турбулентного фона. Среди таких работ отметим прежде всего [1–3], в которых выполнено численное моделирование турбулентного течения в следах за телами вращения в турбулизованной среде. Работы [1, 3] посвящены турбулентному следу за буксируемым телом; безымпульсный след за телом вращения в условиях изотропного турбулентного фона рассмотрен в [2]. В [2] использовалось приближение плоской нестационарной

\* Результаты получены в рамках работы по теме «Разработка и исследование вычислительных технологий решения фундаментальных и прикладных задач аэро-, гидро- и волновой динамики» государственного задания ФИЦ ИВТ. Численные эксперименты проведены в ИТ им. С.С. Кутателадзе СО РАН по госзаказу № 122041400020-6. Постановка задачи и обсуждение результатов расчетов выполнены авторами совместно.

задачи о динамике локализованной зоны турбулентного смешения в изотропном турбулентном потоке. Из результатов [1–3] следует, что динамика турбулентных следов за телами в турбулизованной среде существенно зависит и от типа фона (стационарный, нестационарный), и от соотношения масштабов энергонесущих турбулентных вихрей в следе и фоне. Первоначально на небольших расстояниях от тела значения энергии турбулентности в следе превышают значения энергии в фоне. При определенном соотношении масштабов энергонесущих вихрей следа и фона возможна ситуация, когда турбулентность в следе на некотором интервале расстояний характеризуется меньшими, чем в фоне, значениями энергии турбулентности. В [1, 3] выполнено также численное моделирование асимптотического вырождения турбулентных следов за буксируемыми телами в условиях турбулентного фона. Уникальные экспериментальные данные о динамике безымпульсного следа за сферой в изотропном турбулентном потоке получены в [4]. В работе [5] выполнено детальное лабораторное исследование безымпульсного спутного струйного течения за сферой в отсутствие турбулентного фона. Результаты [5] представляют интерес также и при сопоставлении характеристик турбулентных следов в условиях турбулентного фона и при его отсутствии. Численное моделирование исследованного в [4, 5] течения с применением ряда математических моделей выполнено в [6–9].

Экспериментальное исследование турбулентного следа за буксируемой сферой в турбулизованном потоке осуществлено в [10, 11]. Прямое численное моделирование (DNS) динамики турбулентных следов в турбулизованной среде выполнено в [12]. В [13] рассмотрен также вариант стратифицированной среды. Отмечается существенное влияние фоновой турбулентности на динамику турбулентных следов. Изотропный турбулентный фон препятствует формированию присущего турбулентным следам за буксируемыми телами автомодельного режима течения. Вопрос об автомодельности вырождения обсуждался также в [1–3].

Анализ работ по численному моделированию динамики турбулентных следов в турбулизованной среде показывает, что вопрос об асимптотическом поведении дальних безымпульсных турбулентных следов в изотропном турбулентном потоке практически не изучен. Рассмотрению этого вопроса посвящена настоящая работа.

## 1. Постановка задачи

Для описания динамики дальнего безымпульсного турбулентного следа за телом вращения в турбулизованном внешнем потоке привлекается следующая математическая модель (приближение дальнего следа):

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\nu + \nu_{tu}) \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad (1)$$

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\nu + \nu_{te}) \frac{\partial e}{\partial r} + P - \varepsilon, \quad (2)$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(\nu + \nu_{te}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (3)$$

Здесь  $(x, r, \varphi)$  — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела; ось  $x$  направлена противоположно направлению движения тела; течение обладает осевой

симметрией;  $U_1 = U - U_0$  — дефект продольной компоненты скорости;  $U_0$  — скорость невозмущенного потока;  $e$  — энергия турбулентности;  $\varepsilon$  — скорость ее диссипации;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $P = \nu_{tu} \left( \frac{\partial U_1}{\partial r} \right)^2$  — порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения;  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ;  $C_{\varepsilon 2} = \frac{11}{6} - \frac{13}{30} d_u$ ;

$d_u = 1 - \exp(-8,5\sqrt{5}/R_{\lambda}^*)$ ;  $R_{\lambda}^* = \sqrt{\frac{20e^2}{\varepsilon\nu}}$  — турбулентное число Рейнольдса по тейлоровскому микромасштабу  $\lambda = \sqrt{10\nu e/\varepsilon}$  [14]. Коэффициенты турбулентной вязкости определяются следующим образом:

$$\nu_{tu} = \frac{2\gamma e^2}{S_u \varepsilon}, \quad \gamma = 0,35 + 0,2d_u, \quad S_u = d_u + 2,8(1-d_u); \quad \nu_{te} = C_{\mu} \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad C_{\mu} = 0,25;$$

$$\nu_{te} = \nu_{tu}/\sigma, \quad \sigma = 1,3.$$

Представленная выше математическая модель турбулентного следа ни в коей мере не претендует на универсальность; она базируется на результатах исследований [1, 3, 14]; выражение для  $d_u$  заимствовано в [14] из [15]; в [14] рассматривались и другие представления этой величины. Выбор эмпирической постоянной  $C_{\mu} = 0,25$  основан на опыте численного моделирования динамики безымпульсных турбулентных следов [7] с использованием алгебраической модели Роди рейнольдсовых напряжений [16]. Математическая модель (1)–(3) учитывает вырождение турбулентного числа Рейнольдса  $R_{\lambda}^*$  с ростом расстояния от тела и позволяет рассчитывать турбулентность в следе и фоне от состояния сильной ( $R_{\lambda}^* \gg 1$ ) до состояния слабой ( $R_{\lambda}^* \ll 1$ ).

В системе уравнений (1)–(3) переменная  $x$  играет роль времени. В качестве начальных условий на некотором расстоянии от тела  $x = x_0$  задаются согласующиеся с экспериментальными данными [4, 5] начальные поперечные распределения  $U_1, e, \varepsilon$ ; в одном из вариантов расчетов начальные условия будут заданы ниже путем варьирования экспериментальных данных [5]. При  $r = 0$  и  $r \rightarrow \infty$  ставились нулевые краевые условия Неймана для искомых величин:

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0.$$

Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием характерных масштабов скорости  $U_0$  и длины  $D$  (диаметра тела); в дальнейшем часто обозначения у обезразмеренных величин остаются такими же, как и у размерных.

Численное решение задачи осуществляется с применением консервативной по отношению к суммарному избыточному импульсу (безымпульсный след) конечно-разностной схемы [7, 8]:

$$J(x) = 2\pi\rho_0 \int_0^{+\infty} U_0 U_1 r dr = 0.$$

Краевые условия, соответствующие  $r \rightarrow \infty$ , сносились на достаточно удаленную границу  $r = R_m$ ; при этом граничные значения  $e(x, R_m)$ ,  $\varepsilon(x, R_m)$  практически совпадали с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся следствием системы уравнений (2), (3) в пренебрежении слагаемыми диффузии и порождения. В таком случае система уравнений (2), (3) описывает вырождение однородной изотропной турбулентности.

## 2. Результаты расчетов

Первая серия расчетов с применением модели (1)–(3) выполнена для сопоставления с экспериментальными данными [4]. Начальные условия при этом задавались при  $x_0 = 20D$ , число Рейнольдса  $Re_D = \frac{U_0 D}{\nu} = 25000$ . На рис. 1a приведены экспериментальные и рассчитанные осевые значения дефекта продольной компоненты скорости, энергии турбулентности, скорости диссипации и характерный размер следа  $L$ :  $e(x, L) = (e(x, 0) + e(x, R_m)) / 2$  для расстояний, исследованных в [4]. Наблюдается их достаточно хорошее согласие.

Изменения рассчитанных и измеренных радиальных распределений дефекта продольной компоненты скорости и энергии турбулентности, соответствующие  $x/D = 60$ , приведены на рис. 1b. Более детальное сопоставление результатов расчетов динамики безымпульсного турбулентного следа за сферой с применением различных моделей турбулентности как в случае изотропного турбулентного фона [4], так и в случае его отсутствия [5], осуществлено в [6–9], поэтому авторы ограничились лишь результатами, представленными на рис. 1a, 1b. Отметим, что динамика безымпульсного турбулентного следа за сферой в изотропном турбулентном потоке с применением модели (1)–(3) рассматривается в настоящей работе впервые.

С целью изучения асимптотического (вязкой заключительной стадии) вырождения течения эволюция безымпульсного турбулентного следа за сферой в условиях изотропного турбулентного фона рассматривалась для двух вариантов параметров фона и следа.

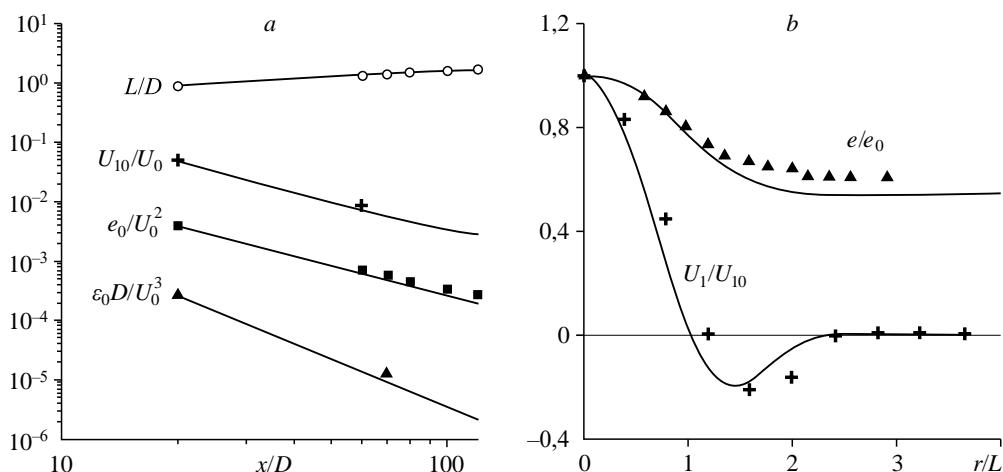


Рис. 1. Сопоставление рассчитанных (сплошные линии) и экспериментально измеренных (символы) основных характерных масштабов турбулентности в безымпульсном турбулентном следе в зависимости от расстояния от тела (a) и поперечных нормализованных распределений дефекта продольной компоненты скорости и энергии турбулентности при  $x/d = 60$  (b).

Первый фон соответствует экспериментальным данным [4] ( $x_0 = 20D$ ,  $Re_D = \frac{U_0 D}{\nu} = 25000$ ) и задается обезразмеренными величинами энергии турбулентности и скорости диссипации  $e_{f1} = 0,11 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_{f1} = 0,59 \cdot 10^{-4}$ ; масштабом [15] энергосодержащих вихрей  $A_{f1} = \left( \frac{2e_{f1}}{3} \right)^{3/2} / \varepsilon_{f1} = 0,338$ ; при этом начальное сечение следа характеризуется обезразмеренными величинами  $e(x_0, 0) = e_0(x) = 0,39 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon(x_0, 0) = \varepsilon_0(x) = 0,28 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_{01} = \left( \frac{2e(x_0, 0)}{3} \right)^{3/2} / \varepsilon(x_0, 0) = 0,474$ . Второй фон создавался искусственно:  $e_{f2} = 0,36 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_{f2} = 0,61 \cdot 10^{-7}$ ,  $A_{f2} = 1,926$ ; в начальном сечении  $e(x_0, 0) = 0,42 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varepsilon(x_0, 0) = 0,53 \cdot 10^{-3}$ ,  $A_{02} = \left( \frac{2e(x_0, 0)}{3} \right)^{3/2} / \varepsilon(x_0, 0) = 0,277$ . Эти значения получены из экспериментальных данных [5] следующим образом: при  $x_0 = 11D$  ( $Re_D = 25000$ ) начальные условия для энергии турбулентности при  $r/D \leq 1,5$  задаются исходя из [5]; при  $r/D > 1,5$  обезразмеренные значения  $e(x_0, r) = e_{f2}$ . Аналогично ставились начальные условия для  $\varepsilon$ ; дефект продольной компоненты скорости  $U_1$  задавался исходя из экспериментальных данных [5]. В первом варианте фона [4] значения  $A_{f1}$ ,  $A_{01}$  различаются несущественно; в искусственном фоне различие этих величин весьма значительное.

На рис. 2 представлены осевые значения энергии турбулентности в безымпульсном турбулентном следе в случае нулевого и ненулевого фонов.

Можно видеть, что асимптотическое убывание осевых значений энергии турбулентности (след за сферой без фона) и модуля разности  $|e_0(x) - e_f(x)|$  происходит по закону  $x^{-7/2}$ . Такой закон убывания для безымпульсного следа в отсутствие фона отмечался в [17–19] и в [3, 17–19] для следа за буксируемым телом (также без фона); асимптотическое поведение  $|e_0(x) - e_f(x)|$  исследовано, по-видимому, впервые в настоящей работе. Асимптотическое вырождение скорости диссипации на оси следа в отсутствие фона происходит по степенному закону с показателем, на единицу меньшим; величина  $|\varepsilon_0(x) - \varepsilon_f(x)|$  убывает аналогичным образом. Закон  $x^{-5/2}$  соответствует заключительной стадии вырождения однородной изотропной турбулентности [20] (асимптотика Миллионщикова – Лойцянского).

Изменение турбулентного числа Рейнольдса  $R_\lambda = \sqrt{\frac{20e^2}{3\nu}} = \frac{R_\lambda^*}{\sqrt{3}}$  на оси следа и в фоне

представлено на рис. 3. На небольших расстояниях от тела осевые и фоновые значения различаются; с ростом  $x$  они практически сливаются. Законы их асимптотического поведения согласуются с законами вырождения следа и фона. Здесь также представлено изменение с расстоянием от тела и в зависимости от начальных данных размера турбулентного следа  $L$ .

В отсутствие фона [5] и с фоном [4] асимптотики  $L$  согласуются с асимптотикой [17]. Асимптотическое поведение тейлоровского микромасштаба  $\lambda$ , масштаба энергонесущих

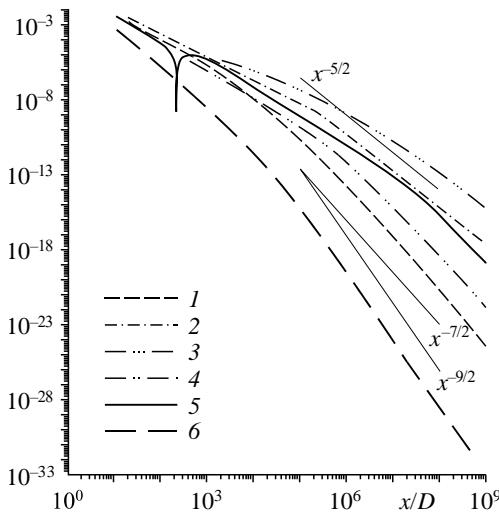


Рис. 2. Осевые значения энергии турбулентности в следе без фона (1) [5], в следе с фоном (2) [4], в следе с искусственным фоном (3), абсолютные значения разностей  $|e_0(x) - e_f(x)|$  для следа (4) [4] и следа с искусственным фоном (5), осевые значения скорости диссипации энергии турбулентности в следе без фона (6) [5]. Прямые сплошные линии — степенные законы  $x^{-5/2}$ ,  $x^{-7/2}$ ,  $x^{-9/2}$ .

вихрей в фоне и следе  $A$  и аналогичного масштаба для разности  $e - e_f$  также согласуются с законами вырождения фона и следа (рис. 4).

Осевые значения дефекта продольной компоненты скорости характеризуются кривыми на рис. 5. Можно видеть, что в отсутствие турбулентного фона асимптотическое вырождение дефекта продольной компоненты скорости согласуется с результатами [17–19, 21, 22]. В условиях ненулевого турбулентного фона можно говорить о тенденции выхода закона вырождения  $U_1(x, 0)$  на асимптотику  $x^{-2}$ . Особенно это касается искусственного фона (кривая 3). Роль дефекта продольной компоненты скорости в динамике

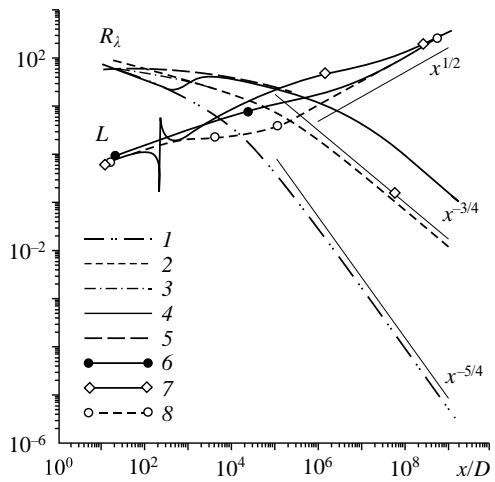
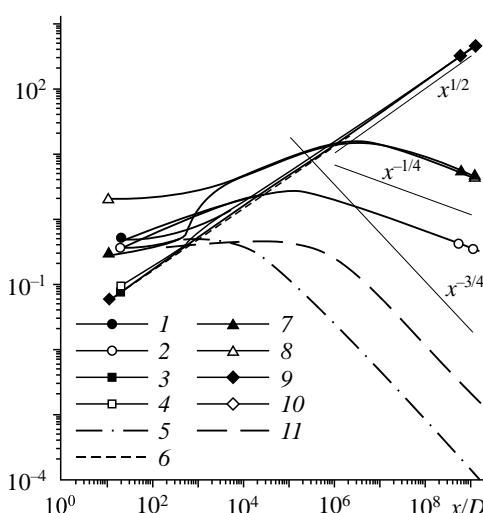


Рис. 3. Осевые и фоновые значения турбулентного числа Рейнольдса и характерные геометрические размеры следа.

Кривая 1 — осевые величины  $R_\lambda$  в следе без фона [5], кривые 2, 3 — осевые и фоновые значения  $R_\lambda$  в следе с фоном [4], кривые 4, 5 — осевые и фоновые значения  $R_\lambda$  в следе с искусственным фоном; кривые 6–8 — характерная полуширина  $L$  соответственно для следа [4], следа с искусственным фоном и следа без фона [5]; сплошные прямые линии — степенные законы  $x^{-3/4}$ ,  $x^{-5/4}$ ,  $x^{1/2}$ .

Рис. 4. Осевые и фоновые значения тейлоровского микромасштаба  $\lambda$  и масштаб энергонесущих вихрей  $A$  в фоне и следе.

Кривые 1–4 — величины  $A_0$ ,  $A_f$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_f$  соответственно в следе с фоном [4]; кривые 5, 6 — величины  $A_0$ ,  $\lambda_0$  в следе без фона [5]; кривые 7–10 — величины  $A_0$ ,  $A_f$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_f$  в следе с искусственным фоном; кривая 11 — масштаб энергонесущих вихрей для разности  $e - e_f$  в следе с фоном [4]; сплошные прямые линии — степенные законы  $x^{-3/4}$ ,  $x^{-1/4}$ ,  $x^{1/2}$ .

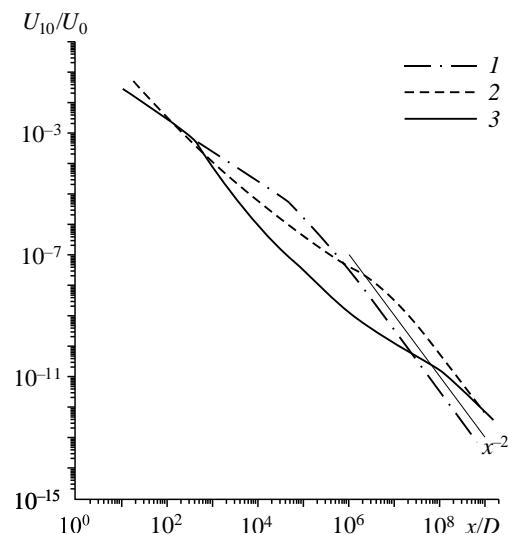
Рис. 5. Осевые значения дефекта продольной компоненты скорости в следе без фона (1) [5], в следе с фоном (2) [4] и в следе с искусственным фоном (3).

Прямая сплошная линия — степенной закон  $x^{-2}$ .

безымпульсного турбулентного следа в условиях изотропного турбулентного фона [4] оценивалась путем численного анализа поведения обезразмеренных величин

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{U_1^2}{2} r dr, \quad E(x) = \int_0^{+\infty} |e - e_f| r dr.$$

Получено, что при  $x > 100D$  первая величина как минимум на два порядка меньше второй. В отсутствие фоновой турбулентности на это обстоятельство указывалось неоднократно (см., например, [7]).



### Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Выполнено численное моделирование безымпульсного турбулентного следа за сферой в турбулизованном потоке. Привлекается численная модель, основанная на модифицированной  $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности, позволяющей рассчитывать параметры турбулентного следа в широком диапазоне турбулентных чисел Рейнольдса  $R_\lambda$  по тейлоровскому микромасштабу. В области небольших расстояний от тела результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными ИГиЛ СО РАН для безымпульсного следа за сферой в изотропном турбулентном потоке. Рассмотрен также вариант искусственного фона, в котором масштаб энергосодержащих вихрей существенно превосходит аналогичный масштаб на оси следа. На относительно небольших расстояниях от тела  $x/D \leq 2 \cdot 10^3$  динамика турбулентных следов отличается существенно (что согласуется с результатами [1–3]). В варианте искусственного фона на интервале  $80 \leq x/D \leq 2000$  значения энергии турбулентности в следе меньше значений энергии в фоне. На заключительной вязкой стадии  $|e(x, 0) - e_f| \sim x^{-7/2}$ ,  $|\varepsilon(x, 0) - \varepsilon_f| \sim x^{-9/2}$  ( $e_f = e_f(x) = e(x, R_M)$ ,  $\varepsilon_f = \varepsilon_f(x) = \varepsilon(x, R_M)$  — фоновые значения энергии турбулентности и скорости ее диссипации); при этом  $e_f \sim x^{-5/2}$ ,  $\varepsilon_f \sim x^{-7/2}$  [20].

### Список литературы

1. Коловандин Б.А., Лучко Н.Н., Дмитренко Ю.М., Жданов В.Л. Турбулентный след за осесимметричным телом и его взаимодействие с внешней турбулентностью. Минск, 1982. 55 с. (Препр. / АН Беларуси. Ин-т тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова; № 10).
2. Франк А.М. Эволюция турбулентного пятна в однородно турбулизованной среде // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. ИТПМ, ВЦ СО АН СССР. Новосибирск, 1982. Т. 13, № 4. С. 163–169.
3. Коловандин Б.А., Лучко Н.Н. Влияние внешней турбулентности на поле скорости в следе за эллипсоидом вращения // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 48, № 4. С. 538–546.

4. Алексенко Н.В., Костомаха В.А. Экспериментальное исследование динамики безымпульсного турбулентного следа в турбулизованном внешнем потоке // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1988. Вып. 81. С. 14–24.
5. Алексенко Н.В., Костомаха В.А. Экспериментальное исследование осесимметричного безымпульсного турбулентного струйного течения // Прикл. механика и техн. физика. 1987. Т. 28, № 1. С. 65–69.
6. Леснова Н.В. Взаимодействие изотропных турбулентных потоков в отсутствие сдвига средней скорости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1988. 152 с.
7. Федорова Н.Н., Черных Г.Г. О численном моделировании безымпульсного турбулентного следа за сферой // Моделирование в механике. 1992. Т. 6 (23), № 1. С. 129–140.
8. Chernykh G.G., Demenkov A.G. On numerical simulation of jet flows of viscous incompressible fluids // Rus. J. Numer. Analys. and Mathemat. Modelling. 1997. Vol. 12, No. 2. P. 111–125.
9. Воропаева О.Ф. Численное исследование безымпульсных турбулентных следов за сферой на основе полуэмпирических моделей турбулентности второго порядка // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 2. С. 11–23.
10. Wu J.-S., Faeth G.M. Sphere wakes at moderate Reynolds numbers in a turbulent environment // AIAA J. 1994. Vol. 32, No. 3. P. 535–541.
11. Rind E., Castro I.P. On the effects of free-stream turbulence on axisymmetric disc wakes // Exp. Fluids, 2012. Vol. 53. P. 301–318.
12. Rind E., Castro I.P. Direct numerical simulation of axisymmetric wakes embedded in turbulence // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 710. P. 482–504.
13. Pal A., Sarkar S. Effect of external turbulence on the evolution of a wake in stratified and unstratified environments // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 772. P. 361–385.
14. Коловандин Б.А., Ватутин И.А., Бондарчук В.У. Моделирование однородной турбулентности. Минск: Белорусская наука, 1998. 240 с.
15. Lumley J.L., Newman G.R. The return to isotropy of homogeneous turbulence // J. Fluid Mech. 1977. Vol. 82, Iss. 1. P. 161–178.
16. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Vol. 56. P. 219–221.
17. Phillips O.M. The final period of decay of non-homogeneous turbulence // Mathemat. Proc. of the Cambridge Philosoph. Soc. 1956. Vol. 52, Iss. 1. P. 135–151.
18. Demenkov A.G., Fomina A.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of the final stage of axisymmetric turbulent wake decay // J. Engng Thermophys. 2017. Vol. 26, No. 1. P. 107–112.
19. Ковалев И.И., Коловандин Б.А., Лучко Н.Н. Конечная стадия вырождения турбулентного поля скорости в спутном потоке // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 49, № 2. С. 209–214.
20. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. Механика турбулентности. М.: Наука, 1967. 720 с.
21. Сеницкий В.Л. Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1984. № 4. С. 31–36.
22. Пухначев В.В. Асимптотика поля скоростей на больших расстояниях от самодвижущегося тела // Прикл. механика и техн. физика. 1989. № 2. С. 52–60.

Статья поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.,  
после доработки — 3 ноября 2023 г.,  
принята к публикации 21 ноября 2023 г.