УДК 532.13+517.958
DOI: 10.15372/PMTF202415512

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ РЕЛАКСАЦИИ

А. Г. Петрова

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: annapetrova07@mail.ru

Исследуется асимптотическое поведение решений начально-краевых задач, возникающих при моделировании движения несжимаемых вязкоупругих жидкостей при различных комбинациях малых параметров релаксации (времени релаксации напряжения при постоянной деформации и времени релаксации деформации при постоянном напряжении), один из которых может быть равен нулю.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, слабые растворы полимеров, малый параметр, асимптотическое поведение

Введение. Течения многих жидкостей, таких как растворы полимеров, битумы, кровь, вязкие пищевые продукты и т. д., не могут быть адекватно описаны в рамках классической модели ньютоновской жидкости. Реологические соотношения в наиболее известных моделях вязкоупругих жидкостей (модель Олдройда или Джеффриса, модель Павловского водных растворов полимеров, модель жидкости второго порядка, максвелловская жидкость) описываются следующим двухпараметрическим семейством уравнений состояния [1–4]:

$$S + \lambda_1 \frac{D}{Dt} S = 2\mu D(\boldsymbol{v}) + 2\mu\lambda_2 \frac{D}{Dt} (D(\boldsymbol{v})), \qquad S\big|_{t=0} = S_0, \qquad \lambda_1 \neq 0. \tag{1}$$

Здесь S — девиатор тензора напряжений $P = -pI + S$; λ_1 — время релаксации напряжения при постоянной деформации; λ_2 — время ретардации, т. е. время релаксации деформации при постоянном напряжении; μ — вязкость; тензор D определяется следующим образом:

$$D(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\text{т}}),$$

D/Dt — оператор дифференцирования по времени. В классической работе [1] и ряде других теоретических работ [5–11] D/Dt — объективная производная. Однако это может быть как полная (конвективная) производная [12–15], так и частная производная (модели Кельвина — Фойгта, Осколкова). В работе [16] рассматривается соотношение $\lambda_1 > \lambda_2$, однако при описании движения слабых растворов полимеров полагается, что $\lambda_1 = 0$ [10, 12–15]. Если при этом D/Dt — производная Яуманна, то уравнение (1) моделирует жидкость второго порядка (модель Ривлина — Эриксена [2]). Если $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 > 0$, то получаем модель жидкости максвелловского типа.

Уравнения движения несжимаемой жидкости с реологическим законом (1) имеют вид

$$\rho(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} S, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{2}$$

Модель (1), (2) содержит два малых параметра λ_1 и λ_2.

Постановке начально-краевых задач и исследованию их разрешимости для уравнения (2) с реологическим соотношением (1) посвящено большое количество работ (см., например, [5–17]). Доказательство разрешимости получено для моделей жидкости второго порядка, т. е. для модели (1), (2) с нулевым временем релаксации. В работе [7] исследуется начально-краевая задача Дирихле с условием прилипания на границе в трехмерном пространстве в целом по времени для малых начальных данных, а также устанавливается, что решение является классическим при достаточно гладких данных. В двумерном случае доказана глобальная разрешимость задачи. В работе [8] рассматривается стационарная задача с условиями непротекания и проскальзывания и доказывается разрешимость в гельдеровых классах при малых объемных силах. Для моделей с ненулевым временем релаксации имеются лишь данные о существовании слабого решения [9]. Математическому исследованию моделей движения водных растворов полимеров и построению их частных решений посвящен ряд работ В. В. Пухначева с соавторами [14, 15, 17]. Асимптотическое поведение псевдопараболических уравнений с малым параметром при старшей производной, к которым сводится линеаризованная задача в одномерном случае, исследовалось во многих работах. В [18] доказана сходимость к решению соответствующей задачи для уравнения теплопроводности в интегральной норме. В работах [19, 20] доказана равномерная сходимость для краевых задач на ограниченном интервале и на полупрямой. Также следует отметить работу [21], в которой методом сращивания асимптотических разложений построено асимптотическое решение задачи для модели вязкоупругой среды при наличии горения. Однако работы, в которых проводится исследование асимптотического поведения даже достаточно простой линейной двухпараметрической модели, автору неизвестны. Что касается нелинейной задачи, то ранее в [22] было построено решение в виде асимптотического ряда по малому параметру при старшей производной для случая движения раствора полимеров вблизи критической точки. В настоящей работе исследуется нелинейная задача с двумя равными малыми параметрами релаксации.

Актуальность изучения поведения решений задач с малым параметром при старшей производной обусловлена тем, что классические методы численного решения практически неприменимы для таких задач. Наличие малого параметра при старшей производной существенно затрудняет численное решение. Избежать таких трудностей позволяет явное выделение пограничных слоев.

Целями данной работы являются исследование асимптотического поведения решений начально-краевых задач с условиями прилипания на границах для двухпараметрических моделей вязкоупругих жидкостей при различных комбинациях малых параметров, установление регулярности вырождения задач с малым параметром в соответствующие задачи для вязкой несжимаемой жидкости, жидкости Максвелла или жидкости второго порядка и явное выделение пограничных слоев.

1. Линеаризованная задача. В случае линеаризации в состоянии, близком к состоянию покоя, уравнения (1), (2) принимают вид

$$S + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} S = 2\mu D(\boldsymbol{v}) + 2\mu\lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}(D(\boldsymbol{v})); \tag{1.1}$$

$$\rho\boldsymbol{v}_t = -\nabla p + \operatorname{div} S, \qquad \operatorname{div}\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{1.2}$$

Эти уравнения не зависят от вида объективной производной. Дополним систему (1.1), (1.2) следующими начальными условиями:

$$\boldsymbol{v}_t\big|_{t=0} = -\frac{\nabla p}{\rho}\Big|_{t=0} + \frac{\operatorname{div} S_0}{\rho} = \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = \operatorname{div}\boldsymbol{v}_1 = 0. \tag{1.3}$$

В качестве граничных условий выберем условие прилипания для скорости

$$\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0 \tag{1.4}$$

и условие второго рода для давления

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = h(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} h\,d\sigma - \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\operatorname{div} S_0\;dx\,dy\,dz = 0. \tag{1.5}$$

Следуя работе [23], в которой рассмотрена аналогичная задача в случае $\lambda_2 = 0$ (жидкость Максвелла), из (1.1), (1.2) выводим уравнения

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt} + \boldsymbol{v}_t = \nu\,\Delta\boldsymbol{v} + \lambda_2\nu\,\Delta\boldsymbol{v}_t, \qquad \nu = \mu/\rho; \tag{1.6}$$

$$\Delta p = (\operatorname{div}\operatorname{div} S_0)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}. \tag{1.7}$$

Задача решается в цилиндрической области $\Omega\times(0,T)$. Границу области $\partial\Omega$ считаем достаточно гладкой; $\partial/\partial n$ — оператор производной в направлении внешней нормали к поверхности $\partial\Omega\times(0,T)$.

Лемма 1. *Классическое решение задачи* (1.1)–(1.5) *единственно с точностью до постоянной в выражении для давления.*

Доказательство. Применим оператор дивергенции к обеим частям равенства (1.1), умножим это равенство почленно на $\operatorname{div} S$ и проинтегрируем по области Ω_t. С учетом уравнения (1.2), а также однородных начальных и краевых условий для разности двух решений, для которой сохранены прежние обозначения, получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_t}(\lambda_1\,|\operatorname{div} S|^2 + \rho\mu\lambda_2\,|\nabla\boldsymbol{v}|^2)\,d\Omega + \int\limits_{\Omega_t}(|\operatorname{div} S|^2 + \rho\mu|\nabla\boldsymbol{v}|^2)\,d\Omega = 0.$$

Вследствие неотрицательности подынтегральных выражений в случае классического решения получаем $\boldsymbol{v}\equiv 0$. Давление определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Единственность решения позволяет считать условие $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ ограничением на начальные данные задачи, которая фактически распалась на отдельные уравнения для компонент скорости и уравнение для давления.

Решим задачу (1.3), (1.4), (1.6), затем восстановим давление из (1.5), (1.7). Сначала рассмотрим задачу с одной пространственной переменной, которая соответствует слоистому течению: $u = u(y,t)$, $v = w = 0$, $p = p(y,t)$.

Лемма 2. *Пусть* $u_0(y)$, $u_1(y) \in C^4(\bar\Omega)$; $u_0(0) = u_0(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0$,

$$\frac{d^2u_0}{dy^2}\Big|_{y=0} = \frac{d^2u_0}{dy^2}\Big|_{y=1} = \frac{d^4u_1}{dy^2}\Big|_{y=0} = \frac{d^4u_1}{dy^2}\Big|_{y=1} = 0.$$

Тогда для любых неотрицательных λ_1, λ_2 *задача* (1.3), (1.4), (1.6) *имеет единственное классическое решение* $u\in C^3([0,l]\times[0,T])$, $T>0$. *Это решение может быть найдено методом разделения переменных; при* $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\to 0$ *оно равномерно на* $[0,l]\times[0,T]$ *сходится вместе с производными к решению задачи о течении Максвелла, при* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2\to 0$ — *к начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности, при* $\lambda_1\to 0$ *решение* u *содержит функцию пограничного слоя первого порядка* [24], *имеющую вид* $\lambda_1\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}\,O(1)$.

Доказательство. Будем искать решение в виде ряда Фурье

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{n\pi}{l}\,y\Big)(C_{1n}\,\mathrm{e}^{k_{1n}t} + C_{2n}\,\mathrm{e}^{k_{2n}t}).$$

Здесь k_{1n}, k_{2n} — корни характеристического уравнения для функции, зависящей от времени, которое имеет вид

$$\lambda_1 k^2 + k(1 + \lambda_2\nu(\pi n/l)^2) + \nu(\pi n/l)^2 = 0.$$

При $\lambda_1 > 0$

$$k_{1n}, k_{2n} = \frac{-1 - \lambda_2\nu(n\pi/l)^2 \pm \sqrt{(1+\lambda_2\nu(n\pi/l)^2)^2 - 4\lambda_1\nu(n\pi/l)^2}}{2\lambda_1},$$

$$\lambda_2 \to 0: \qquad k_{1n}, k_{2n} \to \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_1\nu(n\pi/l)^2}}{2\lambda_1},$$

$$\lambda_1 \to 0: \qquad k_{1n} \sim \frac{-\nu(n\pi/l)^2}{1 + \lambda_2\nu(n\pi/l)^2}, \quad k_{2n} \sim -\frac{1}{\lambda_1},$$

$$\lambda_1 = 0: \quad k_n = -\frac{\nu(n\pi/l)^2}{1 + \lambda_2\nu(n\pi/l)^2},$$

$$\lambda_2 \to 0: \quad k_n \sim\approx -\nu\Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2 + \lambda_2\nu^2\Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^4 + O(\lambda_2^2).$$

Константы C_{1n}, C_{2n} находятся из системы двух линейных уравнений

$$C_{1n} + C_{2n} = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(y)\sin\Big(\frac{n\pi}{l}\,y\Big)\,dy,$$

$$k_{1n}C_{1n} + k_{2n}C_{2n} = \frac{2}{l\rho}\int_0^l \operatorname{div}(S_0(y))\sin\Big(\frac{n\pi}{l}\,y\Big)\,dy.$$

Утверждение об асимптотическом поведении решения проверяется при анализе приведенных выше формул. В частности, решая последнюю систему уравнений, нетрудно показать, что $C_{2n} = \lambda_1 O(1)$, $\lambda_1 \to 0$. Это означает, что решение u сходится равномерно на $[0,l] \times [0,T]$ к решению вырожденной задачи, для первой производной по времени это утверждение неверно, а вторая производная становится не ограниченной вблизи нуля.

Замечание. Лемма 1 обобщается на трехмерную задачу (1.3), (1.4), (1.6), в случае если расчетная область является параллелепипедом с ребрами, параллельными координатным осям.

Рассмотрим асимптотику решения при различных соотношениях параметров для произвольной области с достаточно гладкой границей.

Утверждение 1. *Пусть* $\boldsymbol{v}_0(x,y,z) \in (C^4(\bar\Omega))^3$, $\boldsymbol{v}_1(x,y,z) \in (C^4(\bar\Omega))^3$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1 = 0$, $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\boldsymbol{v}_0|_{\partial\Omega} = \Delta\boldsymbol{v}_1|_{\partial\Omega} = 0$. *Предположим, что граница области* Ω *достаточно гладкая, для того чтобы классическое решение задачи* (1.3), (1.4), (1.6) — *вектор-функция* $\boldsymbol{v}$ — *принадлежало* $(C^3(\bar\Omega\times[0,T]))^3$. *Тогда при* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \to 0$ *решение* $\boldsymbol{v}$ *равномерно сходится в* $\bar\Omega \times [0,T]$ *к решению* $\boldsymbol{v}^{(0)}$ *вырожденной задачи*

$$\begin{gathered}\rho\boldsymbol{v}_t^{(0)} = \mu\Delta\boldsymbol{v}^{(0)},\\ \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = 0, \quad \Delta\boldsymbol{v}_0^{(0)}\big|_{\partial\Omega} = 0.\end{gathered} \tag{1.8}$$

При $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 \to 0$ решение $\boldsymbol{v}$ равномерно сходится в $\bar\Omega \times [0,T]$ к решению $\boldsymbol{v}^{(0)}$ вырожденной задачи, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered}\rho(\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)} + \boldsymbol{v}_t^{(0)}) = \mu\Delta\boldsymbol{v}^{(0)},\\ \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = 0, \quad \boldsymbol{v}_t^{(0)}\big|_{t=0} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{v}_0^{(0)}\big|_{\partial\Omega} = 0.\end{gathered} \tag{1.9}$$

Доказательство. Условия для начальных функций и порядок согласования позволяют рассмотреть при $t = 0$ уравнение (1.6), которое в случае $\lambda_1 = 0$ имеет вид

$$\boldsymbol{v}_t(x,y,z,0) = \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0 + \lambda_2\nu\,\Delta(\boldsymbol{v}_t(x,y,z,0)), \tag{1.10}$$

в случае $\lambda_1 > 0$ — вид

$$\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}(x,y,z,0) + \boldsymbol{v}_1(x,y,z) = \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0 + \lambda_2\nu\,\Delta\boldsymbol{v}_1. \tag{1.11}$$

В первом случае в силу условий согласования решение $\boldsymbol{v}_t(x,y,z,0)$ уравнения (1.10) не содержит функцию пограничного слоя вблизи границы, во втором решение $\boldsymbol{v}_{tt}(x,y,z,0)$ уравнения (1.11) обращается в нуль.

Такая же аргументация применима к уравнению (1.6), записанному для граничных точек. Выполнение условий для начальных функций также приводит к отсутствию функций типа функции пограничного слоя в окрестности начального момента времени. Таким образом, на боковой поверхности цилиндра и на его нижнем основании входящие в уравнение производные равномерно ограничены, более того, они имеют вид $\lambda_2 O(1)$.

Следствие. Согласно утверждению 1 решение задачи (1.3), (1.4), (1.6) может быть представлено в виде асимптотического ряда

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_2^k \boldsymbol{v}^{(k)} + O(\lambda_2^{n+1}), \qquad \lambda_2 \to 0, \tag{1.12}$$

где $\boldsymbol{v}^{(k)}$ ($k \geqslant 1$) — решения задач

$$\begin{gathered}\rho(\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}^{(k)} + \boldsymbol{v}_t^{(k)}) = \mu\Delta\boldsymbol{v}^{(k)} + \mu\Delta\boldsymbol{v}_t^{(k-1)},\\ \boldsymbol{v}^{(k)}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \boldsymbol{v}^{(k)}\big|_{t=0} = 0, \quad \boldsymbol{v}_t^{(k)}\big|_{t=0} = 0,\end{gathered} \tag{1.13}$$

$\boldsymbol{v}^{(0)}$ — решение задачи (1.9).

Справедливость данного следствия можно показать используя утверждение 1 и метод математической индукции.

Рассмотрим случай лишнего начального условия при обращении в нуль малого параметра.

Через $C^{k+\alpha}$, $k \in N$, $\alpha \in (0,1)$ будем обозначать гельдеровы классы функций.

Утверждение 2. *Пусть $\boldsymbol{v}_0(x,y,z) \in (C^{4+\alpha}(\bar\Omega))^3$, $\boldsymbol{v}_1(x,y,z) \in (C^{2+\alpha}(\bar\Omega))^3$; $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_0 = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1 = 0$, $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\boldsymbol{v}_0|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta^2\boldsymbol{v}_0|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\boldsymbol{v}_1|_{\partial\Omega} = 0$. В случае равных времен релаксации $0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \to 0$ задача* (1.3), (1.4), (1.6) *регулярно вырождается в задачу*

$$\boldsymbol{v}_t^{(0)} = \nu\,\Delta\boldsymbol{v}^{(0)}, \qquad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0,$$

решение которой может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(0)} + \lambda(\boldsymbol{v}_1 - \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0)(1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}) + \boldsymbol{z},$$

где функция $\boldsymbol{z}$ *равномерно в замкнутой области* $\bar\Omega \times [0,T]$ *стремится к нулю при* $\lambda \to 0$ *вместе с производными* $\boldsymbol{z}_t$, $\Delta\boldsymbol{z}$.

Доказательство. Записывая уравнение (1.6) в виде

$$\lambda(\boldsymbol{v}_t - \nu\Delta\boldsymbol{v})_t + \boldsymbol{v}_t - \nu\,\Delta\boldsymbol{v} = 0,$$

получаем

$$\boldsymbol{v}_t - \nu\,\Delta\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1 - \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}. \tag{1.14}$$

В случае если нарушено условие $\boldsymbol{v}_1 - \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0 = 0$, запишем задачу для $\boldsymbol{z}$, используя (1.3), (1.4), (1.14):

$$\boldsymbol{z}_t - \nu\,\Delta\boldsymbol{z} = \lambda\,\Delta(\boldsymbol{v}_1 - \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0)(1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}), \qquad \boldsymbol{z}\big|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{z}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0.$$

С учетом нулевых начальных и граничных условий для $\boldsymbol{z}$ и вида правой части получаем

$$|\boldsymbol{z}|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega\times[0,T])} \to 0, \qquad \lambda \to 0.$$

Утверждение 3. *В условиях утверждения* 1 *для начальных данных задача* (1.3), (1.4), (1.6) *при* $\lambda_1 \to 0$ *регулярно вырождается в задачу для жидкости второго порядка*

$$\boldsymbol{v}_t^{(0)} = \nu\,\Delta\boldsymbol{v}^{(0)} + \lambda_2\nu\,\Delta\boldsymbol{v}_t^{(0)}, \qquad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \qquad \boldsymbol{v}^{(0)}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \boldsymbol{v}_0^{(0)}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{1.15}$$

При этом решение $\boldsymbol{v}$ *исходной задачи в случае* $\lambda_2 = 0$ *может быть представлено в виде*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(0)} + \lambda_1\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}(-\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}\big|_{t=0} + \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_1) + \lambda_1\boldsymbol{z}, \tag{1.16}$$

а в случае $\lambda_2 \ne 0$ — *в виде*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(0)} + \lambda_1 \int\limits_0^{t/\lambda_1} \boldsymbol{g}(x,y,z,\tau)\,\mathrm{e}^{-\tau}\,d\tau + \lambda_1\boldsymbol{z}, \tag{1.17}$$

где

$$\boldsymbol{g}_\tau = \nu\lambda_2\,\Delta\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \qquad \boldsymbol{g}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_t^{(0)}\big|_{t=0} + \lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}\big|_{t=0}.$$

В обоих случаях $\boldsymbol{z}$ *равномерно по* λ_1 *ограничено вместе с производной по времени в замкнутой области* $\bar\Omega \times [0,T]$.

Доказательство. Решение вырожденной задачи (1.13) в общем случае не удовлетворяет второму начальному условию $\boldsymbol{v}_t|_{t=0} = \boldsymbol{v}_1$. Следуя [24], с учетом (1.6) запишем уравнение для главной части второго итерационного процесса в случае $\lambda_2 = 0$:

$$\boldsymbol{w}_{\tau\tau} + \boldsymbol{w}_\tau = 0, \qquad \tau = t/\lambda_1.$$

Выберем решение в виде

$$\boldsymbol{w}(-t/\lambda_1, x, y, z) = \lambda_1\boldsymbol{f}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}.$$

В этом случае задача для $\boldsymbol{z}$ в представлении (1.16) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\lambda_1\boldsymbol{z}_{tt} + \boldsymbol{z}_t - \nu\,\Delta\boldsymbol{z} = (\nu\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}\ \Delta\boldsymbol{f} - \boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}),\\ \boldsymbol{z}\big|_{t=0} = -\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{z}\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad \boldsymbol{z}_t\big|_{t=0} = -\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}\big|_{t=0},\\ \boldsymbol{f} = -\lambda_1\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}\big|_{t=0} + \nu\,\Delta\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_1.\end{gathered} \tag{1.18}$$

В силу того, что начальное условие для $\boldsymbol{z}_t$ выполняется для уравнения (1.18) при $\lambda_1 = 0$, решение $\boldsymbol{z}$ вместе с производной по времени равномерно ограничено относительно малого параметра.

Пусть $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение для главной части второго итерационного процесса имеет вид

$$\boldsymbol{w}_{\tau\tau} + \boldsymbol{w}_\tau = \nu\,\Delta \boldsymbol{w}_\tau, \qquad \tau = t/\lambda_1. \tag{1.19}$$

Выполняя подстановку

$$\boldsymbol{w}_\tau = \lambda_1\,\mathrm{e}^{-\tau}\,\boldsymbol{g}(\tau, x, y, z),$$

получаем следующую задачу для $\boldsymbol{g}$:

$$\boldsymbol{g}_\tau = \nu\lambda_2\,\Delta\boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{g}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_t^{(0)} + \lambda_1 \boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}\big|_{t=0}.$$

Решение $\boldsymbol{w}$ уравнения (1.19) имеет вид

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \int\limits_0^\tau \boldsymbol{g}(x, y, z, \tau)\,\mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau + \boldsymbol{w}(x, y, z, 0).$$

Для функции $\boldsymbol{z}$ получаем следующую задачу:

$$\begin{gathered}\lambda_1 \boldsymbol{z}_{tt} + \boldsymbol{z}_t - \nu\,\Delta\boldsymbol{z} - \nu\lambda_2\,\Delta\boldsymbol{z}_t = \nu \int\limits_0^{t/\lambda_1} \Delta\boldsymbol{g}\,\mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau - \boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}, \\ \boldsymbol{z}\big|_{t=0} = \boldsymbol{z}\big|_{\partial\Omega}, \qquad \boldsymbol{z}_t\big|_{t=0} = -\boldsymbol{v}_{tt}^{(0)}.\end{gathered} \tag{1.20}$$

В левой части уравнения (1.20) имеется дополнительное слагаемое, не зависящее от λ_1, в правой части функция пограничного слоя принимает другой вид, но остальная аргументация для обоснования представления (1.17), основанная на выполнении вырожденного уравнения при $t = 0$, остается прежней.

2. Нелинейная задача: слоистые течения с производной Яуманна. Рассмотрим простейшую нелинейную задачу с двумя параметрами. Для случая слоистого течения имеем

$$u = u(y, t), \quad v = w = 0, \quad p = p(y, t), \quad S = \begin{pmatrix} a(y,t) & b(y,t) \\ b(y,t) & c(y,t) \end{pmatrix}.$$

Задача со свободной границей для случая слоистого течения растворов полимеров ($\lambda_1 = 0$) исследовалась в [25].

В случаях верхней и нижней конвективных производных задача остается линейной. В реологическом соотношении (1) будем использовать производную Яуманна. В этом случае для модели с $\lambda_1 \neq 0$ имеет место нелинейная задача. В силу (1) получаем систему

$$\begin{gathered} a + \lambda_1 \dot a - \lambda_1 b u_y = -\lambda_2 \mu u_y^2, \\ b + \lambda_1 \dot b + \lambda_1 (a/2 - c/2) u_y = \mu u_y + \lambda_2 \mu u_{yt}, \\ c + \lambda_1 \dot c + \lambda_1 b u_y = \lambda_2 \mu u_y^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $c = -a$ [23]. Выполняя подстановку $b = d + \mu u_y$, получаем систему

$$\begin{gathered} a + \lambda_1 \dot a - \lambda_1 d u_y = (\lambda_1 - \lambda_2)\mu u_y^2, \\ d + \lambda_1 \dot d + \lambda_1 a u_y = (\lambda_2 - \lambda_1)\mu u_{yt}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Решение задачи Коши для (2.2) можно найти методом вариации постоянных, используя общее решение однородной системы (2.2) с нулевыми правыми частями, имеющее вид

$$a = \mathrm{e}^{-t/\lambda_1} \Big(D \sin\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big) + A\cos\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big)\Big),$$

$$d = \mathrm{e}^{-t/\lambda_1} \Big(D \cos\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big) - A\sin\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big)\Big).$$

В результате получаем весьма сложное нелинейное интегродифференциальное уравнение. Рассмотрим частный (менее громоздкий) случай равных времен релаксации и ретардации ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). В этом случае решение (2.2) с начальными данными $a(0) = a_0$, $d(0) = d_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{e}^{-t/\lambda} \Big(d_0 \sin\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big) + a_0\cos\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big)\Big),\\ d &= \mathrm{e}^{-t/\lambda} \Big(d_0 \cos\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big) - a_0\sin\Big(\int\limits_0^t u_y(y,\tau)\,d\tau\Big)\Big). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Утверждение 4. *Задача* (1), (2) *с производной Яуманна в операторе* D/Dt *для слоистого течения с условием прилипания на границах в случае равных времен релаксации имеет классическое решение* $u \in C^{2+\alpha}([0,l]\times[0,t^*])$ *на достаточно малом интервале времени, если* $u_0, a_0, b_0 \in C^{2+\alpha}([0,l]\times[0,T])$ *и выполнены необходимые условия согласования.*

Доказательство. Действительно, в данном случае система (2.2) является однородной, решение задачи Коши имеет вид (2.3), уравнения (1.2) принимают форму

$$\rho u_t = \mu u_{yy} + \mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big(-a_0'(y)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) + (b_0'(y) - \mu u_0'')\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big) +$$

$$+ \mathrm{e}^{-t/\lambda}\int\limits_0^t u_{yy}(y,\tau)\,d\tau\Big(-a_0(y)\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) + (\mu u_0' - b_0(y))\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big),$$

$$p_y = \mathrm{e}^{-t/\lambda_1}\int\limits_0^t u_{yy}\,d\tau\Big(a_0(y)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) - \Big(\frac{b_0(y)}{\rho} - \nu u_0'\Big)\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big) +$$

$$+ \mathrm{e}^{-t/\lambda_1}\Big(a_0'(y)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) + \Big(\frac{b_0'(y)}{\rho} - \nu u_0''\Big)\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big).$$

Для упрощения преобразований положим $a_0 = 0$ и запишем последние два уравнения:

$$\rho u_t - \mu u_{yy} = \mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big((b_0' - \mu u'')\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) + \int\limits_0^t u_{yy}\,d\tau\ (\mu u_0' - b_0)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big); \tag{2.4}$$

$$p_y = \mathrm{e}^{-t/\lambda_1} \int\limits_0^t u_{yy}\,d\tau \,\Big(\nu u_0' - \frac{b_0}{\rho}\Big)\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) +$$

$$+\,\mathrm{e}^{-t/\lambda_1}\Big(\frac{b_0'}{\rho} - \nu u_0''\Big)\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big). \qquad (2.5)$$

Введем обозначение

$$\rho u_t - \mu u_{yy} = w. \qquad (2.6)$$

Выражая из (2.6) u_{yy} и подставляя в (2.4) при $a_0 = 0$, получаем уравнение

$$w = \mathrm{e}^{-t/\lambda}(b_0'(y) - \mu u_0'')\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) + \mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big(u_0' - \frac{b_0(y)}{\mu}\Big)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\int\limits_0^t(\rho u_t - w)\,d\tau.$$

Для

$$W = \int\limits_0^t w(y,\tau)\,d\tau$$

имеем следующую задачу Коши:

$$W_t + W\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big(u_0' - \frac{b_0(y)}{\mu}\Big)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}(b_0'(y) - \mu u_0'')\cos\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big) +$$

$$+\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big(u_0' - \frac{b_0(y)}{\mu}\Big)\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\rho(u - u_0), \qquad W(0) = 0. \qquad (2.7)$$

Если считать известной функцию $u \in C^{1+\alpha}([0,l]\times[0,T])$, то задача (2.7) имеет единственное классическое решение $W \in C^{\alpha,2+\alpha}_{y,t}([0,l]\times[0,T])$, следовательно, $w \in C^{\alpha,1+\alpha}_{y,t}([0,l]\times[0,T])$. Наконец, решая начально-краевую задачу для уравнения (2.6) с условиями

$$u(y,0) = u_0, \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad (2.8)$$

восстановим функцию $u \in C^{2+\alpha}([0,l]\times[0,t^*])$ для некоторого $t^* < T$. Оценки, необходимые для применения теоремы Шаудера, следуют из структуры уравнений (2.6)–(2.8) при подходящем выборе t^*. Давление восстанавливается из уравнения (2.5).

Утверждение 5. *Задача* (2.4), (2.8) *при начальных данных* u_0, a_0, $b_0 \in C^{4+\alpha}([0,l]\times[0,T])$ *и выполнении условий согласования в области существования классического решения регулярно вырождается в задачу*

$$u_t^{(0)} = \nu\,\Delta u^{(0)}, \qquad u^{(0)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(0)}\big|_{t=0} = u_0.$$

При этом решение задачи (2.4), (2.8) *может быть представлено в виде*

$$u = u^{(0)} - \lambda(u_1 - \nu\,\Delta u_0)(\mathrm{e}^{-t/\lambda} - 1) + \lambda z, \qquad (2.9)$$

где z *— равномерно по* λ *ограниченная в норме* $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega\times[0,T])$ *функция.*

Доказательство. Подставляя (2.9) в (2.4), получаем следующую задачу для z:

$$z_t - \nu z_{yy} + \mathrm{e}^{-t/\lambda} \sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big(\frac{b_0}{\rho} - \nu(u_0)_y\Big) \int\limits_0^t z_{yy}\,d\tau = (1-\mathrm{e}^{-t/\lambda})(u_1'' - \nu u_0^{\mathrm{IV}}) -$$

$$- \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-t/\lambda} \cdot 2\sin^2\Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big(\frac{b_0'}{\rho} - \nu u_0''\Big) - \frac{1}{\lambda}\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big(\frac{b_0}{\rho} - \nu u_0'\Big)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda} \times$$

$$\times \Big(\Big(\int\limits_0^t u_t^0\,d\tau\Big)\,\frac{\rho}{\nu} + (u_1'' - \nu u_0^{\mathrm{IV}})(\lambda - \lambda\,\mathrm{e}^{-t/\lambda} - t)\Big), \qquad (2.10)$$

$$z(y,0) = 0, \qquad z(0,t) = z(l,t) = 0.$$

Интегродифференциальное уравнение (2.10) отличается от (2.4) тем, что после явного выделения функции пограничного слоя $\lambda\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}(u_1 - \nu\,\Delta u_0)$ правая часть параболического уравнения (2.10) допускает равномерную по λ оценку нормы в пространстве $C^\alpha([0,l]\times[0,T])$. Это утверждение справедливо для коэффициента при $\int\limits_0^t z_{yy}\,d\tau$. В правой части (2.10) имеются слагаемые, содержащие коэффициент λ^{-1}, в частности слагаемое

$$\frac{1}{\lambda}\sin\Big(\int\limits_0^t u_y\,d\tau\Big)\Big(\frac{b_0}{\rho} - \nu(u_0)_y\Big)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}\Big(\int\limits_0^t u_t^0\,d\tau\Big)\,\frac{\rho}{\nu},$$

для которого сложно получить оценку. Однако, учитывая, что $u^0 \in C^{4+\alpha}([0,l]\times[0,T])$, можно сделать вывод, что это слагаемое также может быть оценено по норме C^α независимо от λ. Таким образом, функция z равномерно по λ ограничена в норме $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega\times[0,T])$.

Заключение. Проведено исследование асимптотического поведения решения линеаризованной задачи о движении вязкоупругой жидкости с условиями прилипания на границе течения при различных соотношениях двух малых параметров релаксации. При достаточной гладкости начальных данных в случае фиксированного времени релаксации напряжения при постоянной деформации λ_1 и при стремлении к нулю времени релаксации деформации при постоянном напряжении λ_2 решение может быть представлено в виде асимптотического ряда по целым положительным степеням λ_2. Для параметра λ_1 при $t \approx 0$ всегда возникает пограничный слой, который явно выделен в изученных решениях в виде функции пограничного слоя первого порядка. Также рассмотрена нелинейная задача с производной Яуманна для слоистого течения в случае равных значений параметров. Доказано утверждение о локальной по времени разрешимости задачи и выделен пограничный слой в окрестности начального момента времени.

Для нелинейных задач большей размерности наиболее простым является случай двух пространственных переменных при $\lambda_1 = 0$, поскольку в этом случае имеет место классическая разрешимость как задачи о движении жидкости второго порядка, так и задачи для вязкой несжимаемой жидкости, в которую она вырождается. В данном случае решение также может быть представлено в виде асимптотического ряда по целым положительным степеням λ_2. Для малого параметра λ_1 в общем случае будет возникать пограничный слой вблизи начального значения времени, поскольку в вырожденной задаче отсутствует одно начальное условие. Однако строгому обоснованию асимптотик препятствует отсутствие теоремы существования классического решения для задач о движении вязкоупругих сред в общем случае.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Олдройд Дж. Г.** Неньютоновское течение жидкостей и твердых тел // Реология: теория и приложения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 757–793.
2. **Rivlin R. S., Ericksen J. L.** Stress-deformation relations for isotropic materials // Arch. Ration. Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 323–425.
3. **Астарита Дж.** Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Маруччи. М.: Мир, 1978.
4. **Звягин В. Г.** Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В. Г. Звягин, М. В. Турбин. М.: URSS, 2012.
5. **Le Roux C.** Existence and uniqueness of the flow of second-grade fluids with slip boundary conditions // Arch. Ration. Mech. Anal. 1979. V. 148, N 4. P. 309–356.
6. **Galdi G. P.** Mathematical theory of second-grade fluids // Stability and wave propagation in fluids and solids. Wien: Springer, 1995. P. 67–104.
7. **Cioranescu D., Girault V.** Weak and classical solutions of a family of second grade fluids // Intern. J. Non-Linear Mech. 1997. V. 32, N 2. P. 317–335.
8. **Tani A., Le Roux C.** Steady-state solutions to the equations of motion of second-grade fluids with general Navier type slip boundary conditions in Hölder spaces // J. Math. Sci. 2005. V. 130, N 4. P. 4899–4909.
9. **Lions P. L., Masmoudi N.** Global solutions for some Oldroyd models of non-Newtonian flows // Chinese Ann. Math. Ser. B. 2000. V. 21. P. 131–146.
10. **Zvyagin A. V.** Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 2013. V. 90. P. 70–85.
11. **Звягин А. В.** Исследование разрешимости термовязкоупругой модели движения растворов полимеров, удовлетворяющей принципу объективности // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 6. С. 839–856.
12. **Павловский В. А.** К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 6. С. 809–812.
13. **Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. В., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. С.** Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та. 1975. Т. 96. С. 3–9.
14. **Frolovskaya O. A., Pukhnachev V. V.** Analysis of the models of motion of aqueous solutions of polymers on the basis of their exact solutions // Polymers. 2018. V. 10, N 6. 684.
15. **Burmistrova O. A., Meleshko S. V., Pukhnachev V. V.** Exact solutions of boundary layer equations in polymer solutions // Symmetry. 2021. V. 13, N 11. 2101.
16. **Пухначев В. В., Фроловская О. А.** О модели Войткунского — Амфилохиева — Павловского движения водных растворов полимеров // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 176–189.
17. **Петрова А. Г., Пухначев В. В., Фроловская О. А.** Точные решения уравнений жидкости второго порядка // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2023. Т. 322. С. 180–194.
18. **Showalter R. E., Ting T. W.** Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM. J. Math. Anal. 1970. V. 1, N 1. P. 1–26.

19. **Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т.** Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евраз. науч. об-ние. 2019. Т. 1, № 4. С. 1–5.

20. **Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т.** Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Вестн. Камчат. регион. ассоц. Учеб.-науч. центр. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32, № 3. С. 29–41.

21. **Князева А. Г., Сорокова С. Н.** Асимптотический анализ задачи о распространении безгазового горения в вязкоупругой среде // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7. Спецвыпуск. Ч. 1. С. 62–65.

22. **Петрова А. Г.** Обоснование асимптотического разложения решения задачи течения водного раствора полимеров вблизи критической точки // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 313–317.

23. **Мелешко С. В., Петрова А. Г., Пухначев В. В.** Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 5. С. 44–50.

24. **Вишик И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

25. **Фроловская О. А.** Движение водного раствора полимера со свободной границей // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 1. С. 42–49.

Поступила в редакцию 15/V 2024 г.,
после доработки — 29/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.