Теплофизика и аэромеханика, 2015, том 22, № 2

УДК 532.517.4

О подобии по плотностному числу Фруда течения в турбулентном следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде*

Н.П. Мошкин [1], **А.В. Фомина** [2], **Г.Г. Черных** [3,4,5]

[1]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

[2]*Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета*

[3]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*

[4]*Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск*

[5]*Новосибирский государственный университет*

E-mails: chernykh@ict.nsc.ru, moshkin@gmail.com, fav@rtdc.ru

Выполнено моделирование по плотностному числу Фруда течения в дальнем турбулентном следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Показано, что при достаточно больших значениях плотностного числа Фруда имеет место подобие параметров следа и генерируемых им внутренних волн.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, турбулентный след, плотностное число Фруда, численное моделирование.

Введение

Интересным примером пространственного свободного турбулентного течения является турбулентный след за телом вращения в устойчиво стратифицированной среде. Течение, возникающее в турбулентном следе за телом, движущимся в стратифицированной жидкости, весьма своеобразно. При сравнительно слабой стратификации след вначале развивается почти так же, как и в однородной жидкости, и расширяется симметрично. Однако турбулентной диффузии в вертикальном направлении препятствуют архимедовы силы, поэтому на больших расстояниях от тела след приобретает сплющенную форму и наконец совсем перестает расти в вертикальном направлении. Поскольку вследствие турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его, архимедовы силы стремятся восстановить прежнее состояние устойчивой стратификации. В результате в плоскости, перпендикулярной оси следа, возникают конвективные течения, приводящие к интенсивной генерации внутренних волн в окружающей жидкости.

---

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00246).

Экспериментальные данные о динамике турбулентного следа за буксируемым телом вращения в линейно стратифицированной среде получены Линем и Пао и представлены в работе [1]. Достаточно подробный обзор современного состояния вопроса о моделировании турбулентных следов за телами, движущимися в стратифицированной жидкости, приведен в работах [2–5]. Как и всякое стратифицированное течение, течение в турбулентном следе и генерируемые им внутренние волны существенно зависят от плотностного числа Фруда. Подход к анализу подобия свободных турбулентных течений в линейно стратифицированной жидкости по числу Фруда предложен в [6]. Для течения в безымпульсном следе он реализован в работах [6, 7]. В настоящей работе с применением этого подхода рассмотрен вопрос о подобии течения в следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде.

1. Математическая модель турбулентного следа

Для описания течения в дальнем турбулентном следе за телом вращения в стратифицированной среде используется параболизованная система осредненных уравнений гидродинамики в приближении Обербека–Буссинеска:

$$U_0\frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial x}+V\frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial y}+W\frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle+\frac{\partial}{\partial z}\langle u'w'\rangle, \tag{1}$$

$$U_0\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left\langle v'^2\right\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle v'w'\rangle, \tag{2}$$

$$U_0\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'w'\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\left\langle w'^2\right\rangle-g\frac{\langle\rho_1\rangle}{\rho_0}, \tag{3}$$

$$U_0\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle\rho_1\rangle}{\partial z}+W\frac{d\rho_s}{dz}=-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'\rho'\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'\rho'\rangle, \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial x}. \tag{5}$$

В уравнениях (1)–(5) величина U_0 — скорость набегающего невозмущенного потока, $U_\mathrm{d}=U_0-U$ — дефект осредненной продольной компоненты скорости, U, V, W — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y, z; $\langle p_1\rangle$ — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией ρ_s, g — ускорение силы тяжести, $\langle\rho_1\rangle$ — осредненный дефект плотности: $\rho_1=\rho-\rho_\mathrm{s}$, $\rho_\mathrm{s}=\rho_\mathrm{s}(z)$ $=$ $=\rho_0(1-az)$ — плотность невозмущенной жидкости ($d\rho_\mathrm{s}/dz\le 0$ — устойчивая стратификация), $\rho_0=\rho_\mathrm{s}(0)$, штрихом обозначены пульсационные компоненты, символ $\langle\cdot\rangle$ означает осреднение. Плотность жидкости является линейной функцией температуры и стратификация предполагается слабой. В уравнениях (1)–(4) отброшены в предположении малости производные по переменной x и члены с молекулярной вязкостью и диффузией в правых частях. Система уравнений (1)–(5) незамкнута, ниже рассмотрена математическая модель, которая вместе с этими уравнениями образует замкнутую модель течения.

В рассматриваемой модели неизвестные значения рейнольдсовых напряжений $\left\langle u_i' u_j' \right\rangle$ (кроме $\left\langle u_2' u_3' \right\rangle = \left\langle v' w' \right\rangle$), турбулентных потоков $\left\langle u_i' \rho' \right\rangle$ и дисперсии флуктуаций плотности $\left\langle \rho'^2 \right\rangle$ определяются из известных алгебраических соотношений [8, 9]:

$$\frac{\left\langle u_i' u_j' \right\rangle}{e} = \frac{2}{3}\delta_{ij} + \frac{1-c_2}{c_1}\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{P}{\varepsilon}\right) + \frac{1-c_3}{c_1}\left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{G}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

$$-\left\langle u_i' \rho' \right\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon}\left[\left\langle u_i' u_k' \right\rangle \frac{\partial \left\langle \rho \right\rangle}{\partial x_k} + (1-c_{2T})\left\langle u_k' \rho' \right\rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0}\left\langle \rho'^2 \right\rangle\right], \tag{7}$$

$$\left\langle \rho'^2 \right\rangle = -\frac{2}{c_T}\frac{e}{\varepsilon}\left\langle u_k' \rho' \right\rangle \frac{\partial \left\langle \rho \right\rangle}{\partial x_k}, \tag{8}$$

$$P_{ij} = -\left\{\left\langle u_i' u_k' \right\rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left\langle u_j' u_k' \right\rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right\}, G_{ij} = \frac{1}{\rho_0}\left(\left\langle u_i' \rho' \right\rangle g_j + \left\langle u_j' \rho' \right\rangle g_i\right), \ i, j, k = 1, 2, 3; \tag{9}$$

$$\vec{g} = (g_1, g_2, g_3) = (0, 0, -g), \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii}, \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \ U_3 = W.$$

Упростим выражения (6)–(9) с учетом физических особенностей рассматриваемого течения — спутного струйного турбулентного течения в поле силы тяжести на больших расстояниях от тела [1, 3, 7]. При этом представляющие интерес слагаемые порождения и работы сил плавучести (9) заменяются соотношениями:

$$P_{11} = 2\left(\left\langle u'v' \right\rangle \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial y} + \left\langle u'w' \right\rangle \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial z}\right), \ P_{22} = P_{33} = 0, \ P_{12} = \left\langle v'^2 \right\rangle \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial y}, \ P_{13} = \left\langle w'^2 \right\rangle \frac{\partial U_d}{\partial z};$$

$$P = P_{11}/2; \ G_{11} = G_{22} = 0, \ G_{33} = -2\frac{g}{\rho_0}\left\langle w'\rho' \right\rangle, \ G_{12} = 0, \ G_{13} = -\frac{g}{\rho_0}\left\langle u'\rho' \right\rangle, \ G = \frac{G_{33}}{2}.$$

Выражения (6)–(8) упрощаются следующим образом:

$$\left\langle u'v' \right\rangle = \frac{1-c_2}{c_1} \cdot \frac{e\left\langle v'^2 \right\rangle}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial y} = K_y \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial y}, \tag{10}$$

$$\left\langle u'w' \right\rangle = \frac{\left[(1-c_2)e\left\langle w'^2 \right\rangle - \dfrac{(1-c_3)(1-c_{2T})}{c_{1T}} \cdot \dfrac{e^2}{\varepsilon} \cdot \dfrac{g}{\rho_0}\left\langle w'\rho' \right\rangle\right]}{c_1\varepsilon\left(1 - \dfrac{(1-c_3)}{c_1 c_{1T}} \cdot \dfrac{g}{\rho_0} \cdot \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \cdot \dfrac{\partial \left\langle \rho \right\rangle}{\partial z}\right)} \cdot \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial z} = K_z \frac{\partial U_\mathrm{d}}{\partial z}, \tag{11}$$

$$\left\langle v'^2 \right\rangle = \frac{2}{3}e\left[1 - \frac{1-c_2}{c_1} \cdot \frac{P}{\varepsilon} - \frac{1-c_2}{c_1} \cdot \frac{G}{\varepsilon}\right], \tag{12}$$

$$\left\langle w'^2 \right\rangle = \frac{2}{3}e\left[1 - \frac{1-c_2}{c_1} \cdot \frac{P}{\varepsilon} + 2\frac{1-c_2}{c_1} \cdot \frac{G}{\varepsilon}\right], \tag{13}$$

$$\left\langle \rho'^2 \right\rangle = -\frac{2}{c_T} \cdot \frac{e}{\varepsilon} \left\langle w'\rho' \right\rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}, \tag{14}$$

$$-\left\langle u'\rho' \right\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \left[\left\langle u'w' \right\rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \left\langle w'\rho' \right\rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right], \tag{15}$$

$$-\left\langle v'\rho' \right\rangle = \frac{\left\langle v'^2 \right\rangle}{c_{1T}} \cdot \frac{e}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \tag{16}$$

$$-\left\langle w'\rho' \right\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon} \left[\left\langle w'^2 \right\rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - c_{2T}) \frac{g}{\rho_0} \left\langle \rho'^2 \right\rangle \right] =$$

$$= \frac{e \left\langle w'^2 \right\rangle}{c_{1T}\varepsilon \left(1 - 2 \dfrac{1 - c_{2T}}{c_{1T} c_T} \cdot \dfrac{g}{\rho_0} \cdot \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \cdot \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)} \cdot \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \tag{17}$$

Для определения значений энергии турбулентности e, скорости диссипации ε и касательного рейнольдсова напряжения $\langle v'w' \rangle$ используются дифференциальные уравнения:

$$U_0 \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} + W \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon, \tag{18}$$

$$U_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} U_0 \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} + (1 - c_2) P_{23} + (1 - c_3) G_{23} - c_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v'w' \rangle&, \end{aligned} \tag{20}$$

$$P_{23} = -\left(\left\langle v'^2 \right\rangle \frac{\partial W}{\partial y} + \left\langle w'^2 \right\rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad G_{23} = -\frac{g}{\rho_0} \left\langle v'\rho' \right\rangle.$$

Коэффициенты турбулентной вязкости в уравнениях (18)–(20) равны: $K_{ey} = K_y$, $K_{ez} = K_z$, $K_{\varepsilon y} = K_{ey} / \sigma$, $K_{\varepsilon z} = K_{ez} / \sigma$. Величины $c_1 = 2{,}2$, $c_2 = 0{,}55$, $c_3 = 0{,}55$, $c_{1T} = 3{,}2$, $c_{2T} = 0{,}5$, $c_T = 1{,}25$, $c_{\varepsilon 1} = 1{,}44$, $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$, $\sigma = 1{,}3$ относятся к общепринятым эмпирическим константам [8, 9]. Представленная математическая модель является одной из рассмотренных в работах [3, 7].

Маршевая переменная x в уравнениях (1)–(5), (18)–(20) играет роль времени. На расстоянии $x = x_0$ от тела задаются следующие начальные условия:

$$U_{\mathrm{d}}(x_0, y, z) = \Theta_1(r), \; e(x_0, y, z) = \Theta_2(r), \; \varepsilon(x_0, y, z) = \Theta_3(r), \quad r^2 = y^2 + z^2, \quad 0 \le r < \infty,$$

$\langle \rho_1 \rangle = V = W = \langle v'w' \rangle = 0$, $-\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty$, $x = x_0$, здесь $\Theta_1(r)$, $\Theta_2(r)$ и $\Theta_3(r)$ — функции, согласующиеся с экспериментальными данными Линя и Пао [1] в однородной жидкости:

$$\Theta_1(r) = U_{\rm d}(x_0,\, y,\, z) = U_{\rm d0}^0 \exp\ (-r^2/(A_0 \cdot D^2)),$$
$$\Theta_2(r) = e(x_0,\, y,\, z) = E_0 \cdot \exp\ (-r^2/(D^2 \cdot A_0)),$$
$$\Theta_3(r) = \varepsilon\ (x_0,\, y,\, z)\ = \sqrt{3/A_0} \cdot E_0^{3/2} \cdot \exp(-3 \cdot r^2/(2\ A_0 \cdot D^2)),$$
$$A_0 = c_{\rm d} \cdot U_0/(8 \cdot U_{\rm d0}^0), U_{\rm d0}^0 = U_{\rm d}(x_0, 0, 0),$$

где $c_{\rm d}$ — коэффициент сопротивления тела. Величины E_0, U_{d0}^0, A_0 выбираются из условий согласования при $x = x_0$ с экспериментальными данными. При $r \to \infty$ ставились условия невозмущенного потока

$$U_{\rm d} = e = \varepsilon = \langle v'w' \rangle = \langle \rho_1 \rangle = V = W = 0, \quad x \ge x_0. \tag{21}$$

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие $r \to \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника. Из соображений симметрии решение отыскивается в первом квадранте плоскости (y, z). Граничные условия на осях симметрии принимаются следующими:

$$\langle v'w' \rangle = \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = V = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_{\rm d}}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0,\ \ y = 0,\ \ z \ge 0;$$

$$\langle v'w' \rangle = \langle \rho_1 \rangle = W = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_{\rm d}}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0,\ \ z = 0,\ \ y \ge 0.$$

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением масштаба длины D — диаметра тела — и масштаба скорости U_0; использовалось также представление $\langle \rho_1 \rangle^* = \langle \rho_1 \rangle / (aD\rho_0)$. При этом в обезразмеренных уравнениях вместо g появляется величина $4\pi^2/\mathrm{F}_{\rm d}^2$, где $\mathrm{F}_{\rm d}$ — плотностное число Фруда, определяемое равенством $\mathrm{F}_{\rm d} = U_0 T/D$, $T = 2\pi/\sqrt{ag} = 1/N$, T, N — период и частота Брента–Вяйсяля, $a = -(1/\rho_0)(d\rho_{\rm s}/dz)$. Для удобства интерпретации результатов расчетов вводится время t, связанное с расстоянием от тела соотношением:

$$t = x/U_0\,;\ \ t^* = t/T = xD/(U_0 DT) = x^*/\mathrm{F}_{\rm d}\,.$$

Символ * здесь обозначает обезразмеренные переменные; в дальнейшем он по возможности будет опущен.

Алгоритм решения задачи основан на применении конечно-разностных методов расщепления по физическим процессам и пространственным переменным. Подробное его изложение и тестирование, основанное на сопоставлении с экспериментальными данными [1], приведено в работе [3]. Там же представлены результаты численного моделирования динамики турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн в линейно стратифицированной среде.

2. Соображения подобия по плотностному числу Фруда

Отметим, что дальний турбулентный след в однородной (см., например, [10]) или пассивно стратифицированной жидкости [11] характеризуется известными законами автомодельного вырождения:

$$e = e_m \cdot f_1(r/L),\quad U_{\rm d} = U_{\rm d0} \cdot f_2(r/L),\quad L = D \cdot \alpha_L\,((x - x_0)/D)^{n_L}\,,$$
$$e_m = U_0^2 \cdot \alpha_e\,((x - x_0)/D)^{n_e}\,,\ U_{\rm d0} = U_0 \cdot \alpha_u\,((x - x_0)/D)^{n_u}\,,\ \langle \rho_1 \rangle = \rho_0 aL \cdot H(y/L, z/L), \tag{22}$$

$e_m = e(x,0,0)$, $U_{d0} = U_d(x,0,0)$, $r = \sqrt{y^2+z^2}$, $n_u = -2/3$, $n_L = 1/3$, $n_e = 2n_u$; x_0 — виртуальное начало, L — характерный размер следа. В случае активно стратифицированной среды $x/D = xU_0T/(DU_0T) = t/T\,\mathrm{F_d}$ и при достаточно больших значениях плотностного числа Фруда у турбулентного следа существует участок автомодельного вырождения, соответствующий пассивной стратификации. На этом участке

$$\frac{e_m}{U_0^2} = \alpha_e \left(\frac{t-t_0}{T}\right)^{-4/3} \mathrm{F_d^{-4/3}}, \quad \frac{U_{d0}}{U_0} = \alpha_u \left(\frac{t-t_0}{T}\right)^{-2/3} \mathrm{F_d^{-2/3}}, \quad \frac{L}{D} = \alpha_L \left(\frac{t-t_0}{T}\right)^{1/3} \mathrm{F_d^{1/3}}. \tag{23}$$

Используя опыт работы [6], в случае активно стратифицированной жидкости при $\mathrm{F_d} \gg 1$ при достаточно больших значениях t с учетом приведенных выше соотношений (22) решение следует искать в виде (другие функции — аналогично):

$$\frac{e}{U_0^2}\mathrm{F_d^{4/3}} = \mathrm{F}_e\left(\frac{t}{T}, \frac{y}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}, \frac{z}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}\right), \quad \frac{U_d}{U_0}\mathrm{F_d^{2/3}} = \mathrm{F}_u\left(\frac{t}{T}, \frac{y}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}, \frac{z}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}\right),$$

$$\frac{\rho_1}{a\rho_0 D}\mathrm{F_d^{-1/3}} = \mathrm{F}_\rho\left(\frac{t}{T}, \frac{y}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}, \frac{z}{D\mathrm{F_d^{1/3}}}\right), \quad \frac{e_m}{U_0^2}\cdot F_\mathrm{d}^{4/3} = \varphi_e\left(\frac{t}{T}\right), \tag{24}$$

$$\frac{U_{d0}}{U_0}\cdot F_\mathrm{d}^{2/3} = \varphi_u\left(\frac{t}{T}\right), \quad \frac{L}{D}F_\mathrm{d}^{-1/3} = \varphi_L\left(\frac{t}{T}\right).$$

Приведенные в (24) представления на участке автомодельного вырождения (о котором упоминалось выше) должны перейти в функции (22), (23).

Выполнены численные эксперименты, подтвердившие приближенное подобие течения по плотностному числу Фруда при достаточно больших его значениях — $\mathrm{F_d} \ge 280$. На рис. 1 представлены осевые значения дефекта продольной компоненты скорости в зависимости от времени после прохода тела и числа Фруда. Значения числа Фруда соответствуют экспериментальным данным [12] для турбулентного следа за самодвижущимся телом. Известные результаты экспериментальных данных Линя и Пао для буксируемого тела [1] получены только для $\mathrm{F_d} = 31$. Можно видеть, что для трех последних значений плотностного числа Фруда на начальном этапе развития следа имеются участки, близкие к автомодельному вырождению. В настоящих расчетах начальные условия задавались при $x_0 = 10D$ для всех значений $\mathrm{F_d}$ в соответствии с аппроксимациями [1] (специальной подгонки начальных данных не проводилось). Два последних значения плотностного числа Фруда приводят к близким результатам.

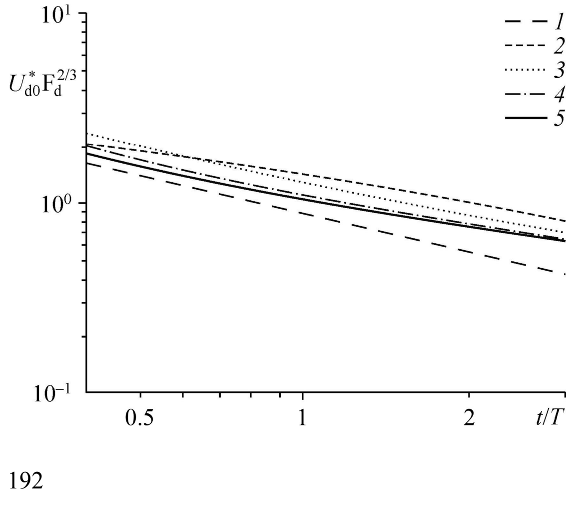

Рис. 1. Изменение осевого значения дефекта продольной компоненты скорости в зависимости от времени. $t/T^{-2/3}$ (*1*), $\mathrm{F_d} = 31$ (*2*), 103 (*3*), 280 (*4*), 565 (*5*).

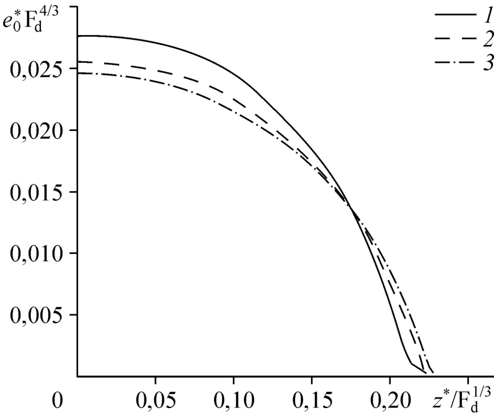

Рис. 2. Графики функции $e_0^* F_d^{4/3}$.
$t/T = 3$; $F_d = 103$ (*1*), 280 (*2*), 565 (*3*).

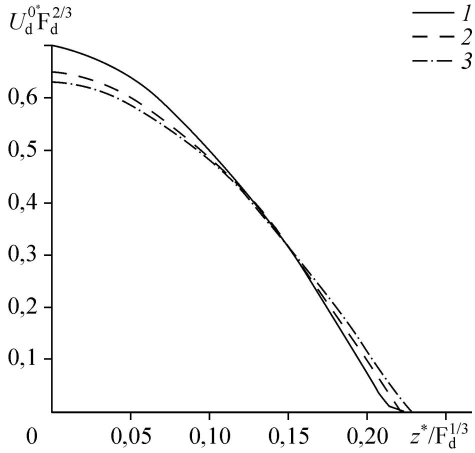

Рис. 3. Графики функции $U_d^{0^*} F_d^{2/3}$.
$t/T = 3$; $F_d = 103$ (*1*), 280 (*2*), 565 (*3*).

На рис. 2, 3 приведены распределения энергии турбулентности $e_0^* F_d^{4/3} = e_0 F_d^{4/3} \big/ U_0^2 = e\left(t/T,\, 0,\, z\big/\left(D \cdot F_d^{1/3}\right)\right) \cdot F_d^{4/3} \big/ U_0^2$ и дефекта продольной компоненты скорости $U_d^{0^*} F_d^{2/3} = \dfrac{U_d^0 F_d^{2/3}}{U_0} = U_d\left(t/T,\, 0,\, z\big/\left(D \cdot F_d^{1/3}\right)\right) \cdot F_d^{2/3} \big/ U_0$ для одного значения времени $t/T = 3$ и ряда значений плотностного числа Фруда. Можно видеть, что с ростом числа Фруда F_d соответствующие кривые становятся близкими, что свидетельствует о приближенном подобии течения по числу Фруда. Аналогичная ситуация прослеживается и с распределением дефекта плотности (рис. 4) и других функций, характеризующих течение. Таким образом, соотношения (24) при больших значениях плотностного числа Фруда дают практически универсальное представление параметров турбулентного следа и генерируемых им внутренних волн в следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде. Последнее позволяет провести расчет для одного из больших значений F_d и пересчитывать его на другие значения плотностного числа Фруда. Как уже отмечалось выше, подход к моделированию по плотностному числу Фруда и его расчетно-теоретическое обоснование были предложены в работе [6].

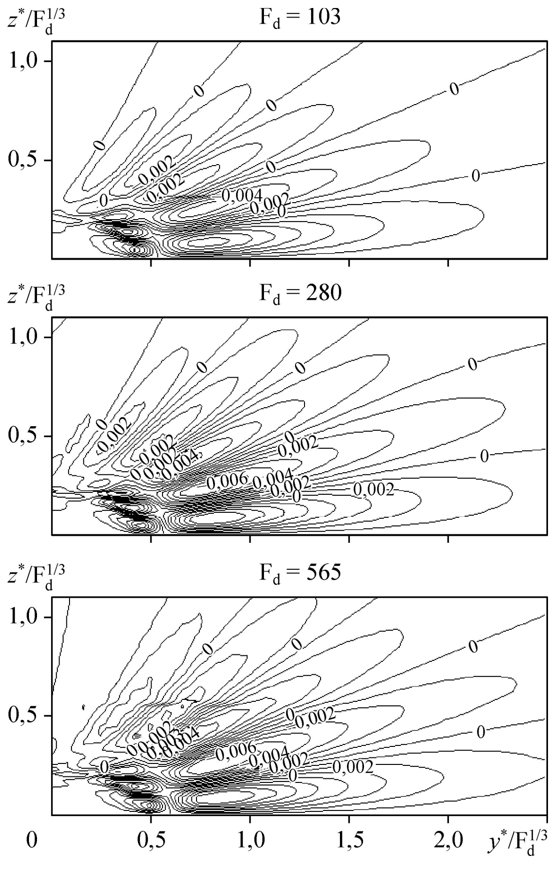

Рис. 4. Линии равного дефицита плотности.
$F_\rho = \text{const}$ для момента времени $t/T = 3$.

Для течения в безымпульсном турбулентном следе он был реализован в работах [6, 7]. Некоторые из соотношений подобия (23) применялись при обработке результатов лабораторных и численных экспериментов по турбулентным следам за буксируемыми телами в линейно стратифицированной среде [1, 3, 5].

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему. Выполнено численное моделирование турбулентного следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде при различных значениях плотностного числа Фруда. Показано, что при больших значениях числа Фруда имеет место подобие течения по плотностному числу Фруда.

Список литературы

1. **Hassid S.** Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 25–32.
2. **Meunier P., Diamessis P.J., Spedding G.R.** Self-preservation in stratified momentum wakes // Phys. Fluids. 2006. Vol. 18, No. 10. P. 106601–1–9.
3. **Chernykh G.G., Fomina A.V., Moshkin N.P.** Numerical models of turbulent wake dynamics behind towed body in linearly stratified fluid // J. Eng. Thermophysics. 2009. Vol. 18, No. 4. P. 279–305.
4. **Brucker K.A., Sarkar S.** A comparatitive study of self-propelled and towed wakes in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 652, P. 373–404.
5. **Chernykh G.G., Druzhinin O.A., Fomina A.V., Moshkin N.P.** On numerical modelling of the dynamics of turbulent wake behind a towed body in linearly stratified medium // J. Eng. Thermophysics. 2012. Vol. 21, No. 3. P. 155–166.
6. **Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.** Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Математические проблемы механики сплошных сред: сб. научн. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1980. Вып. 47. С. 70–89.
7. **Chernykh G.G., Voropayeva O.F.** Numerical modelling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28, No. 3. P. 281–306.
8. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics. University of Karlsruhe. 1980. 104 p.
9. **Rodi W.** Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, No. C5. P. 5305–5328.
10. **Гиневский А.С.** Теория турбулентных струй и следов. М.:Машиностроение. 1969. 400 с.
11. **Капцов О.В., Фомина А.В., Черных Г.Г., Шмидт А.В.** Автомодельное вырождение турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 47–54.
12. **Lin J.T., Pao Y.H.** Wakes in stratified fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–338.

Статья поступила в редакцию 31 марта 2014 г.,
после доработки — 21 мая 2014 г.