

УДК 532.51

Волновая пленка жидкости при наличии спутного или противоточного турбулентного потока газа*

Ю.Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Проведен теоретический анализ волнового стекания вязкой пленки жидкости при наличии турбулентного газового потока. В широком диапазоне чисел Рейнольдса жидкости и скорости газа рассчитаны двумерные стационарно бегущие волны. Гидродинамика жидкости рассчитана на основе полных уравнений Навье–Стокса. Волновая поверхность раздела рассматривается как малое возмущение и уравнения в газе линеаризуются около основного турбулентного течения. Начиная с ветвления от плоскопараллельного течения найдены различные оптимальные режимы стекания и проведено детальное сравнение основных волновых характеристик при наличии спутного/противоточного течения газа. Показано, что при больших скоростях спутного газового потока рассчитанные волны соответствуют волнам ряби, наблюдаемым в экспериментах.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, нелинейные волны, спутное и противоточное течение, захлебывание.

Введение и постановка задачи

Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе Нуссельта [1], где получено точное решение уравнений Навье–Стокса для гравитационного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке. Работы [2, 3] заложили основы экспериментального и теоретического исследования различных волновых режимов стекающей пленки.

Большое количество работ посвящено как линейному, так и нелинейному анализу процесса волнообразования при свободном стекании пленки. Отметим, например, работы [4–9], где была выявлена сложная и многообразная картина волновых явлений при таком течении. Упомянем некоторые из них: это пространственно-временная эволюция волновой структуры пленочных течений, переход двумерных волн в трехмерные, существование качественно различных режимов стекания.

Противоточное течение газовой фазы и тонкого слоя вязкой жидкости дает новое интересное и практически важное явление — “захлебывание”. Впервые оно исследовалось в работе [10]. В дальнейшем большое количество работ было посвящено исследованию начала захлебывания для течения различных жидкостей и газов в различных каналах

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-08-00259).

(см., например, [11–17]). Отмечено существенное влияние размера канала и физических свойств жидкости и газа на начало захлебывания. Предложено большое количество эмпирических зависимостей для предсказания начала захлебывания при противотоке. Общая проблема заключается в том, что предложенные уравнения для начала захлебывания не работают при существенном удалении от условий экспериментов, на базе которых они были получены [14, 18], и требуются более фундаментальные подходы для анализа такого течения.

Спутное течение газовой фазы и тонкого слоя вязкой жидкости представляет собой частный случай дисперсно-кольцевого течения, сопровождаемого, как правило, наличием дисперсной фазы — капель, уносимых с поверхности пленки в ядро газового потока и осаждающихся обратно [19, 20]. Поверхность пленки в таких течениях имеет сложную структуру волн, разделяющихся на капиллярную рябь и волны возмущения, амплитуда которых в несколько раз превосходит толщину остаточного слоя [5, 21–23]. Экспериментально показано, что существует критический расход жидкости, ниже которого не наблюдается ни уноса капель, ни крупных волн даже при очень больших скоростях газа (см., например, [24]). Волновая картина в этих режимах представлена только мелкой капиллярной рябью, которая неизменно присутствует на обдуваемой газом поверхности пленки даже при очень малых числах Рейнольдса жидкости. Таким образом, задача о спутном волновом течении пленки жидкости и газа также имеет ряд новых качественных особенностей по сравнению с гравитационной пленкой и для их осмысления требуется развитие фундаментального подхода.

Авторы работы [25], используя интегральные уравнения для жидкой фазы, рассматривали противоточное течение газа для расчета реакции турбулентного газа на волновую поверхность раздела как “псевдо-ламинарное” ([26, 27]). Рассчитывалась временная эволюция периодических возмущений при различных значениях безразмерного касательного напряжения. При такой постановке средняя толщина пленки оставалась неизменной во времени, а расход жидкости менялся. В работах [28, 29] данный подход получил дальнейшее развитие. Для расчета гидродинамики пленки жидкости использовались полные уравнения Навье–Стокса. Основное внимание уделялось анализу структуры волновых решений в области параметров, соответствующих началу захлебывания. При этом использовалось условие заданного расхода жидкости, что соответствует экспериментальной ситуации. Отметим работы [30, 31], где гипотеза Бенжамин–Майлса использовалась для случая увлечения пленки жидкости турбулентным газовым потоком в горизонтальном канале. Был проведен детальный анализ применимости данной гипотезы для описания воздействия газа на волновую поверхность пленки.

Основная цель настоящей работы — систематическое исследование стационарно бегущих нелинейных волн при спутном и противоточном течении тонкого слоя вязкой жидкости и турбулентного потока газа. Предполагается исследование волновых режимов в широком диапазоне чисел Рейнольдса и скорости газа, начиная с ветвления от плоскопараллельного решения и вплоть до длинных волн.

1. Основные уравнения

Совместное течение жидкой волновой пленки и газа между двумя гладкими вертикальными плоскостями описывается системой уравнений Навье–Стокса с соответствующими граничными условиями (рис. 1). В дальнейшем поверхность раздела будет рассматриваться как малое возмущение для турбулентного потока, тогда поля скоростей и давления в газе представляются в виде: $u^g = u_b^g + \hat{u}^g$, $v^g = \hat{v}^g$, $P^g = P_b^g + \hat{P}^g$. Здесь величины $u_b^g(y)$, $P_b^g(x)$ соответствуют основному решению для турбулентного течения

Рис. 1. Схема совместного течения газа и жидкости.

между гладкими плоскостями, а возмущения $\hat{u}^g(x, t, y)$, $\hat{v}^g(x, t, y)$, $\hat{P}^g(x, t, y)$ представляют собой реакцию газовой фазы на волновую поверхность раздела. Основные уравнения для жидкости с граничными условиями на стенке и на поверхности раздела, а также линеаризация уравнений для газовой фазы с условием симметрии вдоль оси канала могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon \rho n^2 \frac{dP_b^g}{dx} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(3 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$u = v = 0, \quad y = 0, \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x}, \quad y = H(x, t), \quad (5)$$

$$\left(\sigma_{ik}^g - \sigma_{ik} \right) n_k \tau_i = 0 \Rightarrow \varepsilon \mu n \left[\frac{du_b^g}{dy} + \frac{d^2 u_b^g}{dy^2} H + \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2} \right]_{y=0} - \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 4\varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2} \right]_{y=H(x,t)} = 0, \quad (6)$$

$$\left(\sigma_{ik}^g - \sigma_{ik} \right) n_k n_i - \frac{\sigma}{R} = 0 \Rightarrow \left[-\varepsilon \rho n^2 \hat{P}^g + \frac{2\varepsilon \varepsilon \mu n}{\text{Re}} \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \frac{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2} \right]_{y=0} + \left[P - \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2} \right]_{y=H(x,t)} + \frac{(3Fi)^{1/3}}{\text{Re}^{5/3}} \frac{\varepsilon^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}}{\left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}} = 0, \quad (7)$$



$$\left. \left(\frac{du_b^g}{dy} H + \hat{u}^g \right) \right|_{y=0} = \frac{1}{n} u \Big|_{y=H(x,t)}, \quad \hat{v}^g \Big|_{y=0} = \frac{1}{n} v \Big|_{y=H(x,t)}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial t} + u_b^g \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial x} + \hat{v}^g \frac{du_b^g}{dy} = - \frac{\partial \hat{P}^g}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_2 \text{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}^g}{\partial x^2} \right), \quad (9)$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial t} + u_b^g \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \hat{P}^g}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}^g}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}^g}{\partial x^2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} = 0, \quad \hat{v}^g = 0, \quad y = \frac{1}{2\varepsilon_2}. \quad (12)$$

Здесь u, v — компоненты скорости жидкости вдоль направления силы тяжести и оси y соответственно, P — давление в жидкости, σ_{ik} и σ_{ik}^g — компоненты тензора вязких напряжений в жидкости и газе соответственно, $H(x, t)$ — мгновенная толщина пленки, n_k и τ_i — компоненты нормального и касательного к поверхности раздела векторов. Радиус кривизны обозначен как R , и по повторяющимся индексам в граничных условиях (6, 7) подразумевается суммирование.

Уравнения (1)–(12) представлены в безразмерном виде, где использовались следующие масштабы (величины со звездочками являются размерными):

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad t = \frac{u_0 t^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{\varepsilon u_0}, \quad P = \frac{P^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0}, \quad u^g = \frac{(u^g)^*}{u_0^g},$$

$$v^g = \frac{(v^g)^*}{\varepsilon u_0^g}, \quad P^g = \frac{(P^g)^*}{\rho_g (u_0^g)^2}, \quad \text{Re} \equiv \frac{u_0 H_0}{\nu} \equiv \frac{g(1-\varepsilon_\rho) H_0^3}{3\nu^2}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L}, \quad \varepsilon_2 = \frac{H_0}{D},$$

$$\varepsilon_\mu = \frac{\mu_g}{\mu}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{\rho_g}{\rho}, \quad n = \frac{u_0^g}{u_0}, \quad \text{Re}^g = \frac{u_0^g D}{\nu_g}, \quad \text{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g(1-\varepsilon_\rho)\nu^4}.$$

Здесь ν, μ — кинематическая и динамическая вязкости, ρ — плотность жидкости, σ — поверхностное натяжение, L — период волны, Fi — пленочное число, H_0 и u_0 — Нуссельтовская толщина и скорость пленки. Число Рейнольдса в жидкости $\text{Re} = U_{LS} D_e / 4\nu$, где $U_{LS} = Q_L / S$ — среднерасходная скорость, $D_e = 4S / p$ — эквивалентный гидравлический диаметр канала $D_e = 2D$, p — смоченный периметр канала, Q_L — объемный расход жидкости на весь канал с поперечной площадью S , D — расстояние между плоскостями. Кинематическая и динамическая вязкости газа обозначены как ν_g, μ_g соответственно, ρ_g — плотность газа, Re^g — число Рейнольдса для газа, u_0^g — это половина от среднерасходной скорости газа U_{GS} ($u_0^g = 0,5U_{GS} = 0,5Q_G / S$, где Q_G — объемный расход газа на весь канал).

Течение газа предполагается турбулентным, и профили как основного решения, так и возмущенного $u_b^g(y)$, $\hat{u}^g(x, t, y)$ являются осредненными по характерному времени пульсаций. Соответствующие пульсационные члены, порождаемые волновой поверхностью раздела, в осредненных уравнениях для газа предполагаются малыми и в уравнениях (9–10) опущены. Такой квазиламинарный подход для описания турбулентного течения газа вдоль слабоволнистой стенки впервые был предложен в работах [26, 27]. Уравнения (4) и (8) — это условия прилипания на стенке и на межфазной поверхности раздела, соответственно. Уравнение (5) — кинематическое условие на поверхности раздела, а уравнения (6) и (7) являются условиями равенства касательных и нормальных сил соответственно, действующих на малый элемент поверхности раздела со стороны газа и жидкости. Как уже отмечалось, волновая поверхность раздела представляет собой малое возмущение для турбулентного течения газа и условия на поверхности раздела со стороны газовой фазы могут быть разложены в ряд около невозмущенной границы. В уравнениях (6–8) оставляем только первые члены такого разложения. Уравнения (12) представляют собой условия симметрии в середине канала.

Представляют интерес стационарно бегущие решения уравнений (1–12): $[H(x_1), u(x_1, y), v(x_1, y), P(x_1, y), \hat{u}^g(x_1, y), \hat{v}^g(x_1, y), \hat{P}^g(x_1, y)]$, $x_1 \equiv x - ct$, c — фазовая скорость. Предположим, что скорость газа много выше характерной скорости жидкости $n \gg 1$. В этом случае мы опускаем нестационарные члены $\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{u}^g}{\partial t}$ и $\frac{1}{n} \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial t}$ в уравнениях

(9–10), а также отбрасываем правые части $\frac{1}{n} u|_{y=H}$ и $\frac{1}{n} v|_{y=H}$ в условиях прилипания (8), как это впервые было сделано в работах [30, 31]. Условия малости отброшенных членов в уравнениях (9)–(10) и левой части уравнения (8) сводятся к $|\hat{u}^g| \ll u_b^g$ и

$$\left| \frac{\partial^k \hat{u}^g}{k! \partial y^k} \right|_{y=0} H^{k-1} \ll \left. \frac{du_b^g}{dy} \right|_{y=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

соответственно и должны проверяться после решения задачи. В приведенных расчетах волновая толщина пленки не выходила за пределы вязкого подслоя. Интуитивно ясно, что этого достаточно для применимости уравнений (1)–(12). Более детальный анализ справедливости сделанных допущений не являлся целью настоящей работы. Отметим только, что аналогичные упрощения уравнений в газовой фазе с успехом использовались ранее для задачи противотока [25, 28, 29] и для задачи о горизонтальном слое жидкости, увлекаемом турбулентным газовым потоком [30, 31].

Уравнения (8–12) для газовой фазы решаются независимо от уравнений для жидкости (детали даны в Приложении) и представляют собой линейную систему, где каждая из гармоник толщины пленки генерирует соответствующие поля скоростей и давления в газовой фазе. Учитывая уравнение неразрывности (11), эти возмущения \hat{u}^g , \hat{v}^g , \hat{P}^g могут быть представлены в следующем виде:

$$\hat{u}^g(x_1, y) = - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{dF^k}{dy} H^k \exp(2\pi i k x_1), \quad (F^{-k})^* = F^k, \quad (13)$$

$$\hat{v}^g(x_1, y) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} 2\pi i k F^k(y) H^k \exp(2\pi i k x_1), \quad (14)$$

$$\hat{P}^g(x_1, y) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} P_g^k(y) H^k \exp(2\pi i k x_1), \quad (P_g^{-k})^* = P_g^k. \quad (15)$$

Таким образом, двухфазная задача свелась к решению уравнений (1–5) для течения жидкой пленки с модифицированными граничными условиями (6), (7) (см. Приложение). Здесь учтено действие касательного и нормального напряжений со стороны турбулентной газовой фазы, вызванное возмущенной поверхностью раздела. Форма свободной поверхности заранее неизвестна, поэтому используем преобразование координат $x_1 = x - ct$, $\eta = y/H$, определяющее область течения: $x_1 \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$. Для построения стационарных решений уравнений (1–7) использовался спектральный метод. Детали численного алгоритма приведены в Приложении.

Уравнения (1)–(12) включают восемь параметров: ε , ε_2 , ε_μ , ε_ρ , n , Fi , Re , Re^g . Семь из них являются независимыми. Параметр n связан с остальными соотношением

$$n = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_\mu}{\varepsilon_\rho} \frac{Re^g}{Re}. \quad \text{Мы будем использовать } \lambda_{\text{neut}}/L, \sqrt{\sigma/\rho g(1-\varepsilon_\rho)}/D, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho, Ka, Re, Re^g$$

в качестве независимых параметров для дальнейших расчетов, здесь λ_{neut} — длина волны нейтрального возмущения и $Ka \equiv Fi^{1/11}$ — число Капицы. Длина волны нейтрального возмущения $\lambda_{\text{neut}} = H_0 f(\sqrt{\sigma/\rho g(1-\varepsilon_\rho)}/D, \varepsilon_\mu, \varepsilon_\rho, Ka, Re, Re^g)$ определяется из задачи линейной устойчивости течения с плоской поверхностью раздела, и критерии в уравнениях (1)–(12) легко рассчитываются через параметры $\varepsilon = (H_0/\lambda_{\text{neut}})(\lambda_{\text{neut}}/L)$, $\varepsilon_2 = (3Re/Ka)^{1/3}(\sqrt{\sigma/\rho g(1-\varepsilon_\rho)}/D)/Ka^{3/2}$.

Такой выбор независимых параметров имеет ряд преимуществ. Параметры Ka , $\sqrt{\sigma/\rho g(1-\varepsilon_\rho)}/D$, ε_μ , ε_ρ зависят только от физических свойств жидкости и газа и от размера канала. Параметры Re и Re^g меняются в зависимости от расходов фаз. Выбор параметра λ_{neut}/L в качестве независимого позволяет корректно сравнивать результаты расчетов различных интегральных и асимптотических моделей с расчетами по уравнениям Навье–Стокса.

Отметим, что в настоящих расчетах стационарных решений используется условие постоянного расхода $\langle q \rangle = 1$. Учитывая кинематическое условие (5) и прилипание (4), интегрирование уравнения неразрывности (3) дает:

$$q(x_1) - cH(x_1) = \text{const} = \langle q \rangle - c \langle H \rangle = 1 - c \langle H \rangle, \quad q(x_1) \equiv H(x_1) \int_0^1 u d\eta.$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ означает среднее по длине волны. Условие постоянства расхода соответствует экспериментальной ситуации, где в процессе пространственно-временной эволюции масса втекаемой в некоторый объем жидкости и вытекаемой из него сохраняется.

2. Результаты расчетов

Ввиду большого количества параметров мы ограничимся рассмотрением совместного течения вязкой пленки воды и воздуха в канале с $D = 7,5$ мм, что соответствует экспериментам [32, 33]. Безразмерные критерии в этом случае имеют следующие значения: $Ka = 9,2615$, $\varepsilon_\mu = 0,0182$, $\varepsilon_\rho = 0,0012$, $\sqrt{\sigma/\rho g}/D = 0,3612$. Рисунки 2 и 3 демонстрируют результаты расчетов линейной устойчивости течения с плоской межфазной границей

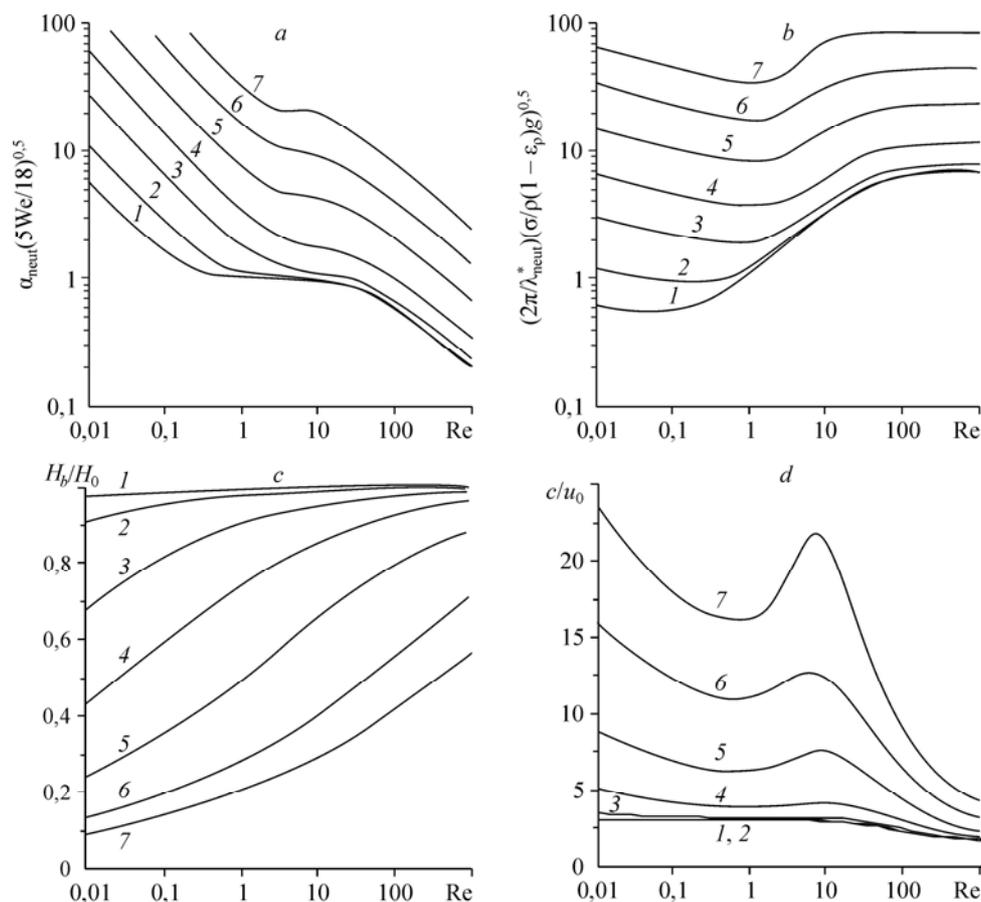


Рис. 2. Устойчивость течения с плоской границей раздела для случая спутного течения газа и жидкости.

Волновое число (*a*, *b*), толщина пленки (*c*), фазовая скорость (*d*) нейтрального возмущения; $U_{GS} = 1$ (1), 2 (2), 5 (3), 10 (4), 20 (5), 40 (6), 60 (7) м/с.

раздела при различных значениях скорости спутного и противоточного газового потока. Здесь $\alpha_{\text{neut}} = 2\pi H_0 / \lambda_{\text{neut}}^*$, $We = (3Fi)^{1/3} / Re^{5/3}$, и для случая $U_{GS} = 0$ и небольших чисел Re мы имеем широко известный результат асимптотического анализа — $\alpha_{\text{neut}} (5We/18)^{1/2} = 1$; на рисунках индекс *b* у величины H_b указывает на безволновое течение. Отметим, что при конечных значениях скорости газа мы имеем существенные отклонения от результатов асимптотической теории как для умеренных значений числа $Re > 20$, так и для малых его значений. Отметим, что в области больших чисел Re размерная длина волны пропорциональна капиллярной постоянной: $\lambda_{\text{neut}}^* = A\sqrt{\sigma/\rho g}$, $A = \text{const}$. Значение A существенно уменьшается с ростом U_{GS} для спутного потока газа и увеличивается для противотока. Размерная толщина безволновой пленки также уменьшается с ростом U_{GS} для спутного потока газа и сравнительно слабо увеличивается для противотока, особенно в области умеренных значений числа Re . Фазовая скорость нейтральных возмущений растет с увеличением U_{GS} для спутного течения и замедляется для противотока. Отметим также немонотонный характер зависимости $c(Re)$ при значениях $U_{GS} > 5$ для противотока. Линии 1–7 на рис. 2, *a*, *d* были рассчитаны в работе [35] и здесь приводятся для удобства сравнения с линиями на рис. 3.

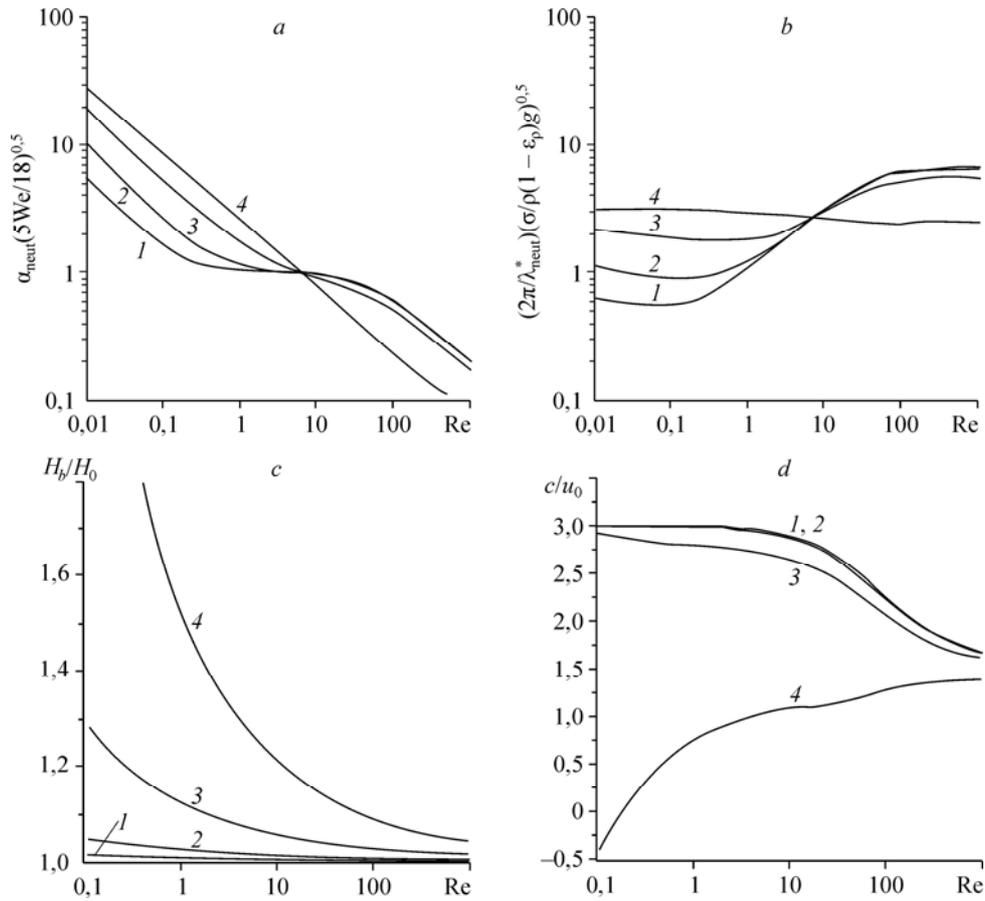


Рис. 3. Устойчивость течения с плоской границей раздела для случая противоточного течения газа и жидкости.

Волновое число (a, b), толщина пленки (c), фазовая скорость (d) нейтрального возмущения; $U_{GS} = 1$ (1), 2 (2), 5 (3), 10 (4) м/с.

На рис. 4 и 5 для спутного течения и противотока соответственно приведены основные характеристики нелинейных волн 1-го семейства, ответвляющихся от кривой нейтральной устойчивости. Для случая спутного течения при всех рассмотренных значениях Re и U_{GS} решения 1-го семейства переходят в длинные волны-вмятины.

На рис. 6 в размерных и безразмерных координатах представлены профили толщины для таких решений. Представлены также линии равного уровня для функции

$$\text{тока } \Psi(x, \eta) = \int_0^{\eta} (c - u) H d\eta' \text{ в системе координат, движущейся с фазовой скоростью}$$

волны. Отметим, что траектории жидких частиц в такой системе совпадают с построенными линиями. Для случая противотока (рис. 5 и 7) в зависимости от значений Re и U_{GS} решения 1-го семейства переходят либо в длинные волны-вмятины, либо в волны-возвышения, либо перестают существовать, когда, начиная с некоторых значений параметра $\lambda_{\text{neut}}^*/L$, происходит захлебывание. На рис. 5 линия 1 ($U_{GS} = 5$ м/с) имеет пределом волну-возвышение, а для значения $U_{GS} = 10$ м/с мы имеем захлебывание при всех значениях числа Re. При наступлении захлебывания максимальная толщина пленки резко нарастает (рис. 5), фазовая скорость уменьшается и минимальная толщина пленки

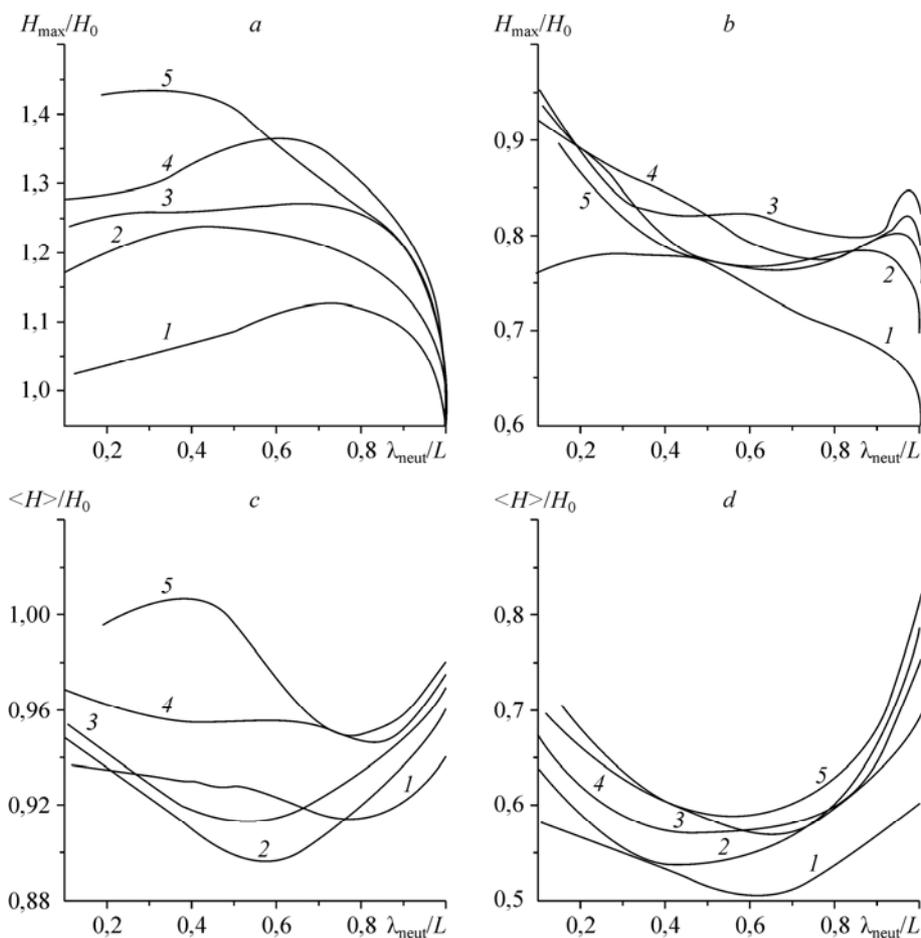


Рис. 4. Основные характеристики волн 1-го семейства для случая спутного течения газа и жидкости.

H_{\max} , $\langle H \rangle$ — максимальная и средняя толщины волновой пленки; $U_{GS} = 5$ (a, c), 20 (b, d) м/с; $Re = 5$ (1), 20 (2), 50 (3), 100 (4), 200 (5).

приближается к нулю. Как для случая спутного течения, так и для противотока при всех рассмотренных значениях Re и U_{GS} , где нет захлебывания, на зависимостях $\langle H \rangle (\lambda_{\text{neut}}/L)$ существует единственный минимум (рис. 4, 5) в области $\lambda_{\text{neut}}/L \geq 0,5$. Длина волны, соответствующая этому минимуму, определяет оптимальный режим 1-го семейства волн и соответствующие значения основных волновых характеристик. Для значений $U_{GS} \leq 5$ м/с, за исключением малых чисел Re при противотоке, характеристики волн на рис. 4–5 сравнительно слабо отличаются от соответствующих значений для гравитационного стекания. Рост скорости газового потока приводит к захлебыванию (в достаточно узком диапазоне изменений U_{GS}) при противотоке и к существенному уменьшению максимальной толщины пленки при спутном течении. Линии 1–5 на рис. 4, а, а также профили на рис. 6, а, b, были рассчитаны в работе [35] и здесь приводятся для удобства сравнения с линиями на рис. 5, а и профилями на рис. 7–11.

Известно, что в случае стекания пленки без газа возникают различные типы волн. Линейный анализ устойчивости относительно периодических возмущений с тем же, что и у нелинейной волны, периодом L позволил построить бифуркационные линии (рис. 8)

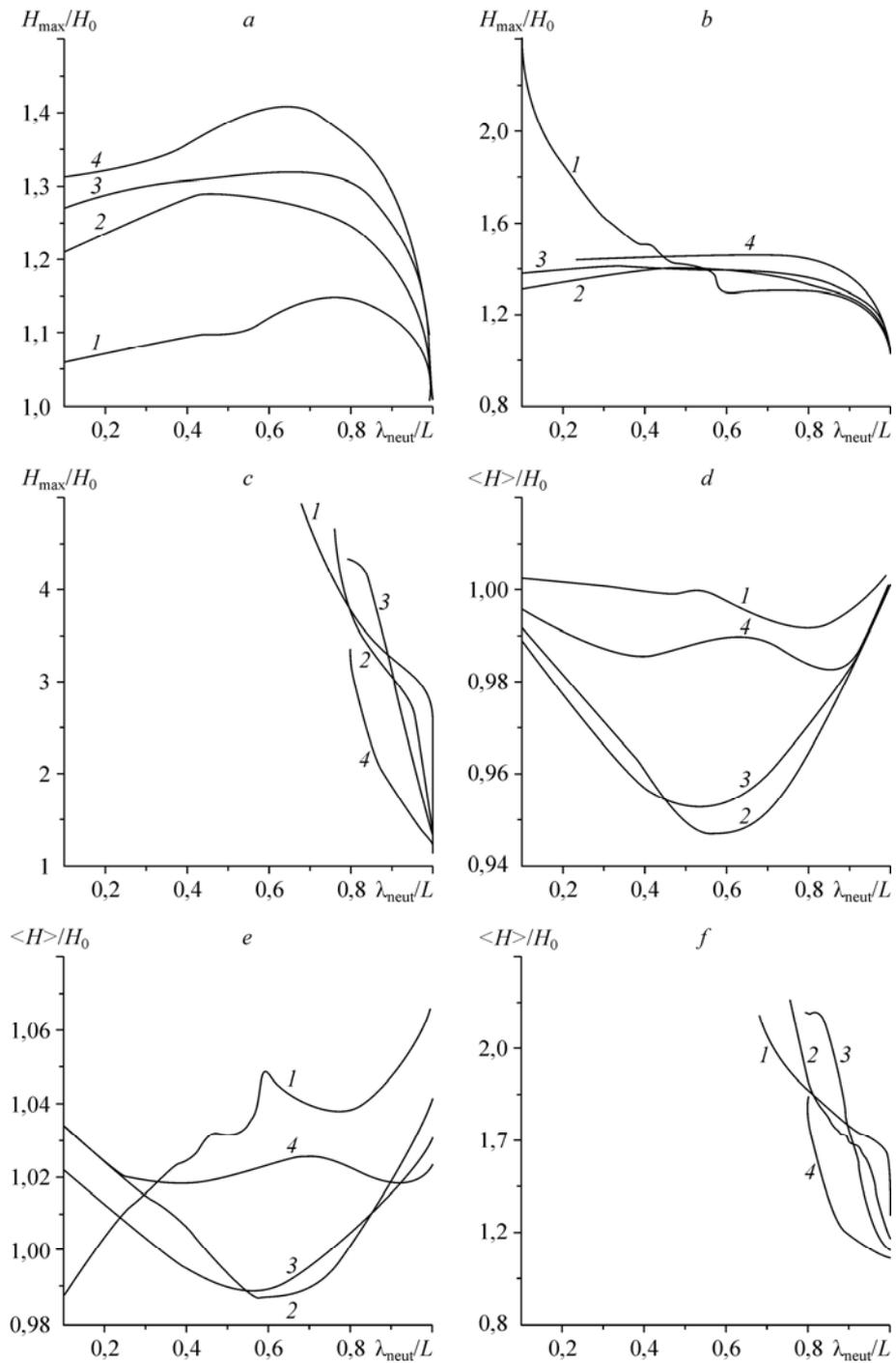


Рис. 5. Основные характеристики волн 1-го семейства для случая противоточного течения газа и жидкости.

$U_{GS} = 1$ (a, d), 5 (b, e), 10 (c, f) м/с; $Re = 5$ (1), 20 (2), 50 (3), 100 (4).

на плоскости двух параметров — λ_{neut}/L и Re/Ka при различных значениях числа Ka . Эти линии образуют сложную многоскладчатую и многолиственную поверхность (рис. 8).

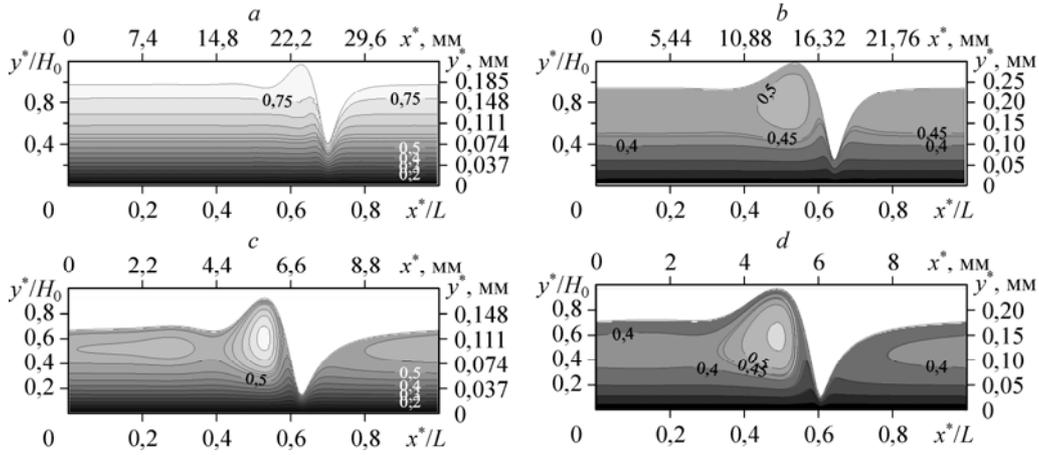


Рис. 6. Профили толщины длинных волн 1-го семейства ($\lambda_{\text{неут}}/L = 0,1$) и линии равного уровня для функции тока (в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны), для случая спутного течения газа и жидкости.

$U_{GS} = 5$ (a, b), 20 (c, d) м/с; $Re = 20$ (a, c), 50 (b, d); $c = 0,205$ (a), 0,261 (b), 0,311 (c), 0,4 (d) м/с.

Для одного и того же набора параметров, двигаясь по непрерывности и стартуя с малых значений параметра Re/Ka , можно рассчитать различные типы волновых решений (меняя путь движения на плоскости двух параметров). Большинство из этих решений неустойчиво относительно возмущений с того же периода L . Существует “верхний” лист поверхности,

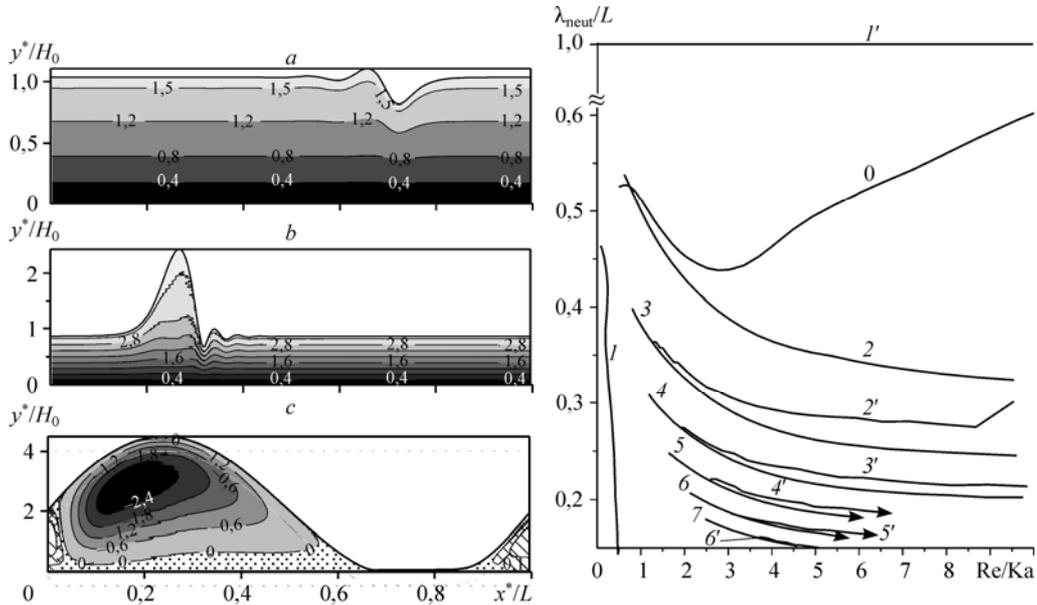


Рис. 7. Профили толщины длинных волн 1-го семейства и линии равного уровня для функции тока (в системе координат, движущейся с фазовой скоростью волны) для случая противоточного течения газа и жидкости.

$Re = 5$; $\lambda_{\text{неут}}/L = 0,12$ (a, b), 0,75 (c); $U_{GS} = 3$ (a), 6 (b), 10,6 (c) м/с.

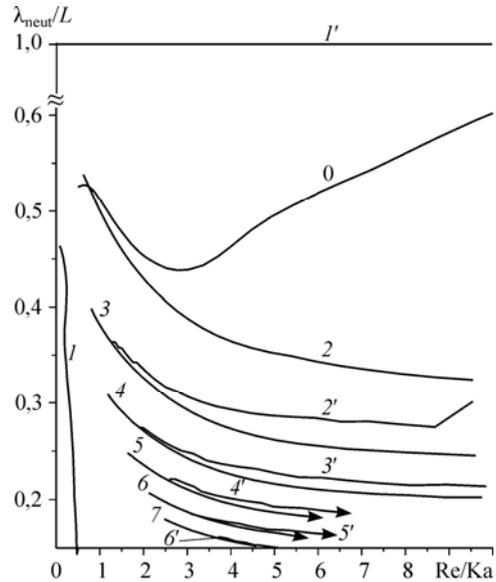


Рис. 8. Области устойчивости и бифуркационные линии стационарно бегущих нелинейных волновых режимов. Уравнения Навье–Стокса для $Ka = 10$ и $U_{GS} = 0$ м/с. Решения устойчивы между линиями 1' и 0, 2–2', 3–3', 4–4', 5–5', 6–6', образующими складки. Для каждой складки существует свой оптимальный волновой режим.

где мы имеем устойчивые волновые решения и где найдены оптимальные режимы. Решения “верхнего” листа получаются непрерывным продолжением решений 1-го семейства на плоскости параметров (λ_{neut}/L , Re/Ka) без пересечения бифуркационных линий 2–7 и θ , 1, 2’–6’. Таким образом, решения устойчивы между линиями (1’–0, 2–2’, 3–3’...), образующими складки. Линия 1’ определяется как $\lambda_{\text{neut}}/L = 1$. Найдено, что зависимость средней толщины пленки от длины волны имеет минимум в каждой из складок и определяет различные оптимальные волны. Зависимости максимальной толщины и фазовой скорости от числа Рейнольдса для оптимальных режимов из различных складок показаны на рис. 9 ($U_{GS} = 0$) [34]. Представлены также линии равного уровня продольной u -скорости для двух оптимальных режимов. Отметим, что при каждом из значений числа Рейнольдса $\text{Re} \geq 10$ диапазон изменений максимальной толщины между различными оптимальными волнами можно определить как $\approx 40 \div 45\%$. Для значений фазовой скорости такой диапазон примерно равен 35%.

При конечных значениях скорости спутного газового потока сложная многоскладчатая структура решений на плоскости параметров (λ_{neut}/L , Re) сохраняется в очень близком к случаю $U_{GS} = 0$ виде. Устойчивость стационарно бегущих решений при $U_{GS} \neq 0$ не исследовалась. О многоскладчатости поверхности можно судить, получая различные решения при одном и том же наборе параметров и рассчитывая различные слияния решений. Здесь также существуют складки, и в каждой из них существует свой оптимальный режим. На рис. 10 для четырех значений скорости газа представлены зависимости

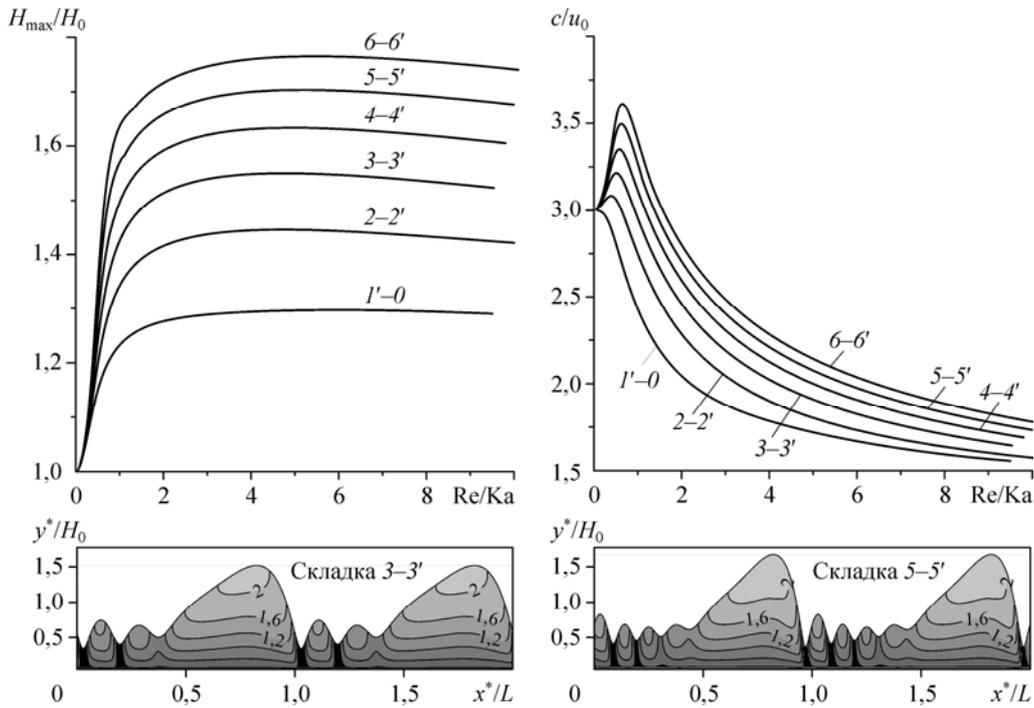


Рис. 9. Основные характеристики и линии равного уровня продольной u -скорости для различных оптимальных волн.

$\text{Ka} = 10$, $U_{GS} = 0$ м/с, H_{max} — максимальная толщина волновой пленки, c — фазовая скорость волны. Номера линий соответствуют складкам рис. 8. Профили оптимальных режимов построены при значении $\text{Re}/\text{Ka} = 5$.

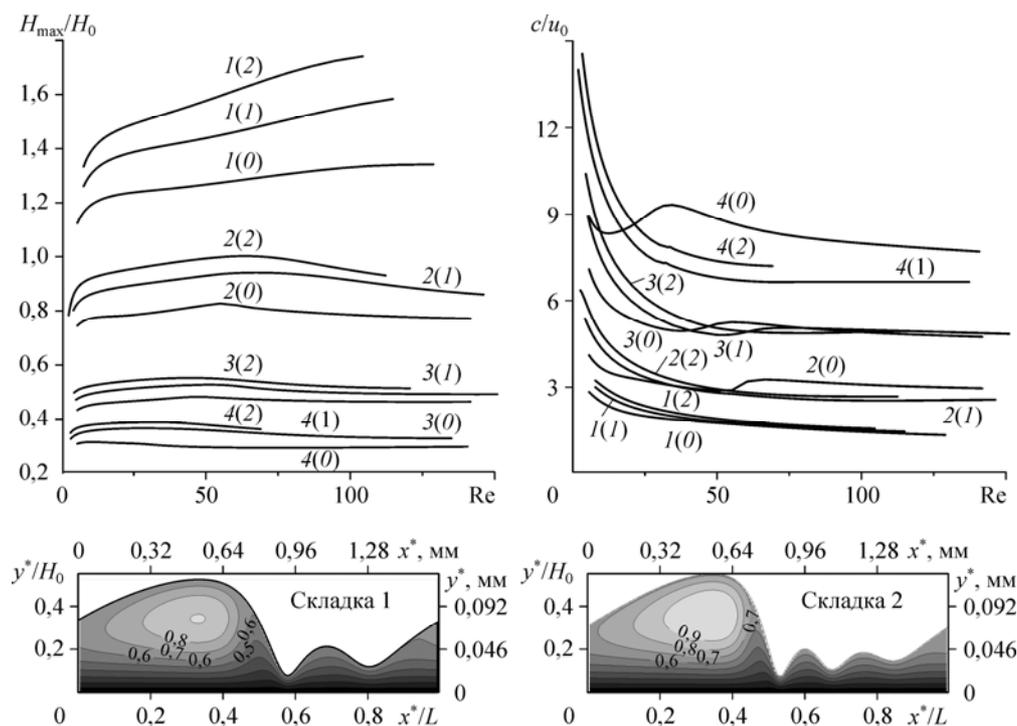


Рис. 10. Основные характеристики и линии равного уровня функции тока (в движущейся системе координат) для различных оптимальных волн при спутном течении газовой фазы.

$U_{GS} = 5$ 1(n), 20 2(n), 40 3(n), 60 4(n) м/с, $n = 0, 1$ или 2 и обозначает номер складки, для которой рассчитывались оптимальные режимы стекания. Функции тока построены при $Re = 40$, $U_{GS} = 40$ м/с для складок 1 и 2.

максимальной толщины между волнами и фазовой скорости от числа Рейнольдса для трех оптимальных типов волн. Линии $N(0)$, $N(1)$ и $N(2)$ соответствуют верхним складкам для различных значений $U_{GS} \neq 0$ и аналогичны оптимальным волнам между складками $1'-0$, $2-2'$ и $3-3'$ при значении $U_{GS} = 0$ (см. рис. 9). Здесь $N = 1, 2, 3$ или 4 — это номер линии, соответствующий разным значениям скорости газа. Значения максимальной толщины и диапазон ее изменений между различными оптимальными волнами резко падает с ростом скорости газа. Профили толщины пленки, представленные на рис. 10, качественно близки к случаю гравитационного стекания при существенном уменьшении амплитуды толщины пленки. Линии на рис. 10 были рассчитаны в работе [35] и здесь приводятся для удобства сравнения с соответствующими линиями при гравитационном стекании (рис. 9) и противотоке (рис. 11).

В случае противотока структура решений на плоскости параметров (λ_{neut}/L , Re) упрощается с ростом скорости газа. Ситуация напоминает случай гравитационной пленки, где при уменьшении числа Капицы бифуркационные линии исчезали [34] и оставался только один тип нелинейных волн, которые ответвлялись от плоскопараллельного решения. На рис. 11 приведены зависимости максимальной толщины и фазовой скорости (правая ось) от числа Рейнольдса жидкости. Расчеты проведены для длинных волн $\lambda_{\text{neut}}/L = 0,15$ при трех значениях скорости газа. Представлены также линии равного уровня продольной u -скорости для таких волн при значении $Re = 40$. Отметим, что при увеличении скорости газа амплитуда волн растет и исчезает капиллярная рябь на переднем фронте волны.

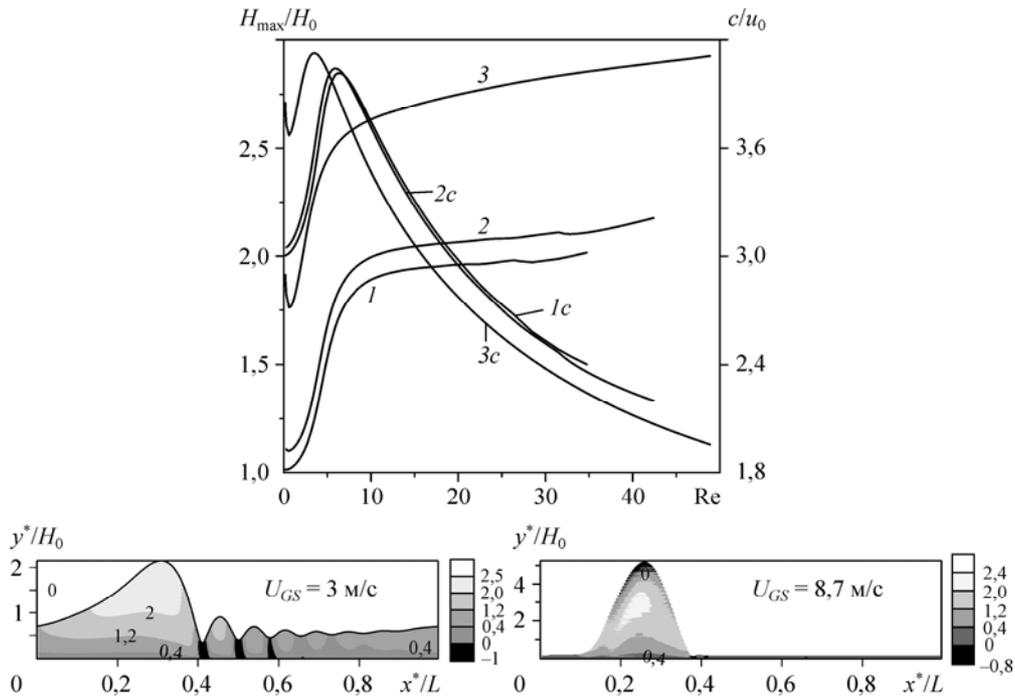


Рис. 11. Основные характеристики и линии равного уровня продольной u -скорости для длинных волн при противоточном течении газовой фазы.

$U_{GS} = 1$ (1, 1c), 3 (2, 2c), 6,2 (3, 3c) м/с (линии 1c, 2c, 3c соответствуют правой оси, c — фазовая скорость волны); профили толщины построены при $\lambda_{\text{нест}}/L = 0,15$, $Re = 40$.

Рисунок 12 демонстрирует сравнение результатов расчетов и экспериментальных данных [32, 33] по волнам при спутном течении газа и жидкости. Здесь три группы символов соответствуют расчетам при трех значениях числа $Re = 24, 40$ и 90 . В каждой из групп представлены расчеты для трех типов оптимальных волн. Треугольники, соединенные

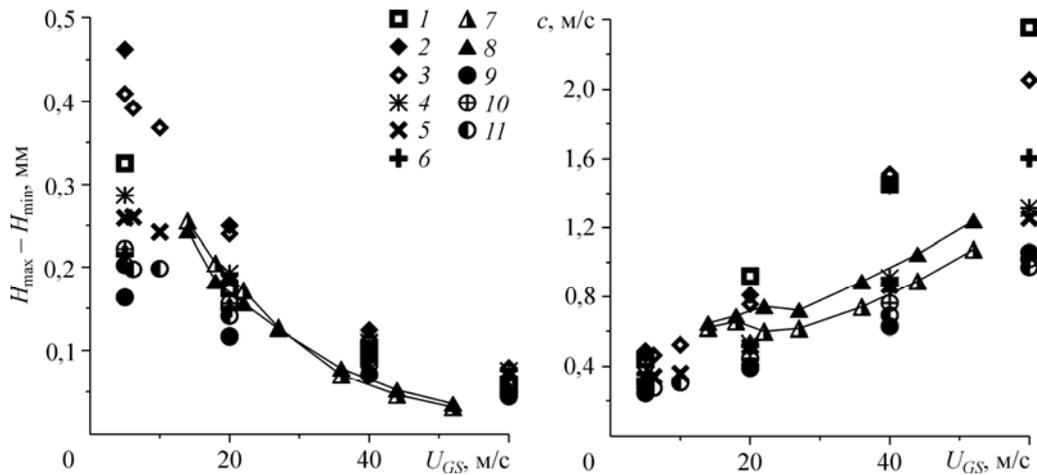


Рис. 12. Сравнение рассчитанных характеристик оптимальных волн (1, 6, 9 — волны 1-го семейства, 3, 5, 11 — 1-ая складка, 2, 4, 10 — 2-ая складка) с экспериментально измеренными характеристиками (7, 8) мелких волн подложки (или волн ряби).

Расчеты — $Re = 24$ (кружки), 40 (крестики), 90 (четырёхугольники), эксперименты — $Re = 20$ (7), 40 (8); H_{\max} , H_{\min} — максимальная и минимальная толщины волновой пленки, c — фазовая скорость волны.

сплошной линией, соответствуют экспериментам при $Re = 20$ и 40 и отвечают малым волнам ряби (ripples или the substrate waves), в соответствии с терминологией [5]). Начиная с определенных значений числа Рейнольдса $Re \geq 60 \div 70$ на пленке появляются волны-возвышения (the large waves), амплитуда которых в несколько раз превышает амплитуду волн ряби и которые переносят большую часть жидкой массы. Такие волны фиксируются во всех экспериментах в широком диапазоне изменений скорости спутного газового потока. Рассчитанные в настоящей работе волновые режимы, как показывает сопоставление на рис. 12, соответствуют волнам ряби.

Заключение

Проведен теоретический анализ волнового стекания вязких пленок жидкости совместно с турбулентным газовым потоком. Начиная с анализа линейной устойчивости плоскопараллельного течения, проведено систематическое исследование нелинейных волновых режимов. Газовый поток существенно влияет на характеристики волн, уменьшая или увеличивая амплитуду при спутном или противоточном течении. Показано, что сложная многоскладчатая и многолистная поверхность, найденная на плоскости параметров — длина волны, число Рейнольдса — для гравитационной пленки, существует при всех скоростях спутного газового потока. В случае противотока, начиная с некоторых значений скорости газа, остается только одно семейство волн и “многоскладчатость” поверхности исчезает. При дальнейшем увеличении скорости газа наступает захлебывание. При больших скоростях спутного газового потока рассчитанные волны соответствуют волнам ряби, наблюдаемым в экспериментах.

Приложение

Мы рассматриваем стационарно бегущие решения уравнений (1)–(12). Преобразование координат $x_1 = x - ct$, $\eta = y/H(x - ct)$ определяет область течения в интервале $x_1 \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$ и позволяет записать основные уравнения следующим образом (нижний индекс “1” далее опускаем):

$$c \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_x c \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon Re} \left[3 \mp \lambda^f \varepsilon_2 \varepsilon_p n^2 Re + \eta_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] - \eta_y \frac{\partial uv}{\partial \eta} - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial u^2}{\partial \eta} = 0, \quad (A1)$$

$$-\eta_y \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{Re} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] - \varepsilon^2 \left(-c \frac{\partial v}{\partial x} - \eta_x c \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial uv}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v^2}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (A2)$$

$$v(x, \eta) = -H(x)u(x, \eta)\eta_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(H \int_0^\eta u(x, \eta') d\eta' \right), \quad (A3)$$

$$H(x) \int_0^1 (u(x, \eta') - c) d\eta' = 1 - c < H, \quad (A4)$$

$$u(x, \eta) = 0, \quad \eta = 0, \quad (A5)$$

$$P - \varepsilon_\rho n^2 \hat{P}^g \Big|_{y=0} = \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} \left(\eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} - \varepsilon_\mu n \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) \frac{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2} - \varepsilon^2 \frac{(3\text{Fi})^{1/3}}{\text{Re}^{5/3}} \frac{\frac{d^2 H}{dx^2}}{\left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad \eta = 1, \quad (\text{A6})$$

$$\eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + 4\varepsilon^2 \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\frac{dH}{dx}}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2} = \mp \frac{\lambda^f}{2} \varepsilon_\rho n^2 \text{Re} +$$

$$+ \varepsilon_\mu n \left[\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{d^2 u_b^g}{dy^2} \Big|_{y=0} H + 4\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{\frac{dH}{dx}}{1 - \varepsilon^2 \left(\frac{dH}{dx} \right)^2} \right], \quad \eta = 1. \quad (\text{A7})$$

Здесь в уравнении (A1) для случая противотока вместо " \mp " берется верхний знак "-", а для спутного течения газа берется нижний знак "+"; $\langle \dots \rangle$ означает среднее по длине волны, $\eta_y = 1/H$, $\eta_x = -\eta(dH/dx)/H$, $\eta_{x\eta} \equiv (\eta_x)_\eta = -\eta_y dH/dx$, $\eta_{x\xi} \equiv (\eta_x)_x = -\eta_y (\eta_x dH/dx + \eta d^2 H/dx^2)$, λ^f — коэффициент сопротивления для турбулентного течения газа в гладком канале. Здесь учтено, что безразмерное давление в газе для гладкого канала $P_b^g = \pm \frac{\lambda^f \varepsilon_2 x}{\varepsilon}$, где " \pm " меняется на верхний знак для противотока и на нижний знак для спутного течения. Профиль скорости в газе связан с коэффициентом сопротивления: $\frac{du_b^g}{dy} \Big|_{y=0} = \mp 0,5 \lambda^f \varepsilon_2 \text{Re}^g$ и $n \varepsilon_\rho \text{Re} = \varepsilon_2 \varepsilon_\mu \text{Re}^g$.

Функции H , u , v , P в уравнениях (A1)–(A7) периодические по координате x и могут быть представлены следующим образом:

$$u(x, \eta) = \frac{1}{2} U_1(x) + \sum_{m=2}^M U_m(x) T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1,$$

$$U_m(x) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} U_m^k \exp(2\pi i k x), \quad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$H(x) = H^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} H^k \exp(2\pi i k x), \quad (H^{-k})^* = H^k.$$

Здесь $T_m(\eta_1)$ — полиномы Чебышева и верхний индекс "*" означает комплексное сопряжение.

Численный алгоритм стартует с задания начального приближения для гармоник U_m^k , H^k и значения фазовой скорости c . Отметим, что U_m^0 , H^0 являются вещественными величинами и общее число гармоник равно $(M+1)(N-1)$. В уравнения (A1)–(A7) координата x явно не входит, и они не меняются при замене $x \rightarrow x + \text{const}$. Благодаря

этому “произволу” фазу одной из гармоник можно считать заранее известной — например $\text{Real}(H^1) = 0$. Величина фазовой скорости c является неизвестной вместо $\text{Real}(H^1)$ и определяется из соответствующих уравнений для толщины пленки.

При известных $(M+1)(N-1)$ значениях U_m^k, c, H^k профиль скорости $v(x, \eta)$ однозначно рассчитывается из уравнения (A3), давление $P(x, \eta)$ — из уравнений (A2) и (A6). Используя итерационный метод Ньютона, уточняем начальное приближение для неизвестных (U_m^k, H^k, c) , исходя из невязок уравнений (A1) и (A4), преобразованных в (k, m) -пространство. Для численного расчета матрицы Якоби используется схема первого порядка. С учетом граничных условий (A5) и (A7) имеем $(M+3)(N-1)$ уравнений для определения $(M+1)(N-1)$ неизвестных, и система переопределена. Отбрасываем $2(N-1)$ уравнений, соответствующих двум последним полиномам Чебышева в спектральном разложении невязки уравнения (A1). Полученные результаты корректны при хорошей точности в аппроксимации функции $u(x, \eta)$: $|U_m^{N/2-1}|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ при любых m и $|U_M^k|/\sup|U_m^k| < 10^{-3}$ при любых k . В процессе вычислений указанные условия достигались увеличением значений N и M . Число N варьировались от 8 до 256 и M от 5 до 50 в зависимости от параметров.

Для расчета касательных и нормальных напряжений со стороны газовой фазы подставляем уравнения (13–15) в уравнения (8–12) и после простых преобразований получим:

$$2\pi k \varepsilon \varepsilon_2 \text{Re}^g \left[\frac{d^2 u_b^g}{dy^2} F^k + u_b^g \varepsilon^2 (2\pi k)^2 F^k - u_b^g \frac{d^2 F^k}{dy^2} \right] = -\frac{d^4 F^k}{dy^4} + 2\varepsilon^2 (2\pi k)^2 \frac{d^2 F^k}{dy^2} - \varepsilon^4 (2\pi k)^4 F^k, \quad (\text{A8})$$

$$\left. \frac{dF^k}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{du_b^g}{dy} \right|_{y=0}, \quad F^k \Big|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 F^k}{dy^2} \right|_{y=0,5/\varepsilon_2} = F^k \Big|_{y=0,5/\varepsilon_2} = 0, \quad (\text{A9})$$

$$P_g^k = u_b^g \frac{dF^k}{dy} - \frac{du_b^g}{dy} F^k - \frac{i}{2\pi k \varepsilon \varepsilon_2 \text{Re}^g} \left[-\frac{d^3 F^k}{dy^3} + (2\pi k \varepsilon)^2 \frac{dF^k}{dy} \right], \quad (\text{A10})$$

$$u_b^g = \begin{cases} \mp \eta \sqrt{\lambda^f / 2}, & \eta < 8,74^{7/6} \\ \mp 8,74 \eta^{1/7} \sqrt{\lambda^f / 2}, & \eta > 8,74^{7/6} \end{cases}, \quad \lambda^f = \frac{0,3164}{(4 \text{Re}^g)^{1/4}}, \quad \eta = \varepsilon_2 y \text{Re}^g \sqrt{\lambda^f / 2}. \quad (\text{A11})$$

Для расчета функций $F^k(y)$ уравнения (A1)–(A11) решались численно (сводились к краевой задаче для системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка) для значений $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$.

Уравнения (A11) представляют собой широко известные профиль турбулентного течения и формулу Блазиуса для коэффициента сопротивления — $(u_b^g)^* / v_* = 8,74 (y^* v_* / \nu_g)^{1/7}$, $v_* = \sqrt{\tau_g / \rho_g}$, $\eta = y^* v_* / \nu_g$. Размерные давление и касательное напряжение имеют следующий вид:

$$(P_b^g)^* = \pm \frac{\lambda^f}{2D} \frac{\rho_g U_{GS}^2}{2} x^* = \frac{2\tau_g}{D} x^*, \quad \tau_g = \mu_g \left. \frac{d(u_b^g)^*}{dy^*} \right|_{y^*=0} = \pm \lambda^f \frac{\rho_g U_{GS}^2}{8}. \quad (\text{A12})$$

Из уравнений (13), (14), (A9) и (A10) следует:

$$\frac{\partial \hat{v}^g}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{dH}{dx} \frac{du_b^g}{dy} \Big|_{y=0},$$

$$\frac{\partial \hat{u}^g}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{d^2 F^k}{dy^2} \Big|_{y=0} H^k \exp(2\pi i k x),$$

$$\hat{p}^g \Big|_{y=0} = - \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \frac{i}{2\pi k \varepsilon \varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left[- \frac{d^3 F^k}{dy^3} \Big|_{y=0} + (2\pi k \varepsilon)^2 \frac{du_b^g}{dy} \Big|_{y=0} \right] H^k \exp(2\pi i k x).$$

Эти уравнения используются в модифицированных граничных условиях (A6)–(A7) для расчета влияния газовой фазы на гидродинамику жидкой волновой пленки.

Список литературы

1. Nusselt W. Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes. Teil I, II // Z. VDI. 1916. Bd. 60, No. 27, 28. P. 541–546; 569–576.
2. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ч. I. Свободное течение. Ч. II. Течение в соприкосновении с потоком газа и теплопередача // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1948. Т. 18. С. 3–28.
3. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ч. III. Опытное изучение волнового режима течения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1949. Т. 19. С. 105–120.
4. Jones L.O., Whitaker S. An experimental study of falling liquid films // AIChE J. 1966. Vol. 12. P. 525–529.
5. Chu K.I., Dukler A.E. Statistical characteristics of thin, wavy films. Part II. Studies of the substrate and its wave structure // AIChE J. 1974. Vol. 20, No. 4. P. 695–706.
6. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G. Wave formation on a vertical falling liquid film // AIChE J. 1985. Vol. 31, No. 9. P. 1446–1460.
7. Joo S.W., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-wave instabilities of heated falling films: two-dimensional theory of uniform layers // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 230. P. 117–146.
8. Liu J., Paul J.D., Gollub J.P. Measurements of the primary instabilities of film flow // J. Fluid Mech. 1993. Vol. 250. P. 69–101.
9. Lee J.J., Mei C.C. Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 307. P. 191–229.
10. Семенов П.А. Течение жидкости в тонких слоях // Журнал технической физики. 1944. Т. 14, № 7–8. С. 427–437.
11. Lee S.C., Bankoff S.G. Parametric effects on the onset of flooding in flat-plate geometries // Int. J. Heat Mass Transf. 1984. Vol. 27, No. 12. P. 1691–1700.
12. Biage M., Delhaye J.M., Vernier P. The flooding transition: a detailed experimental investigation of the liquid film before the flooding point // ANS Proceedings, National Heat Transfer Conf., ANS, 1989. P. 53–60.
13. Zapke A., Kröger D.G. Counter-current gas-liquid flow in inclined and vertical ducts. Part I. Flow patterns, pressure drop characteristics and flooding // Int. J. Multiphase Flow. 2000. Vol. 26, No. 9. P. 1439–1455.
14. Zapke A., Kröger D.G. Counter-current gas-liquid flow in inclined and vertical ducts. Part II. The validity of the Froude-Ohnesorge number correlation for flooding // Int. J. Multiphase Flow. 2000. Vol. 26, No. 9. P. 1457–1468.
15. Vlachos N.A., Paras S.V., Mouza A.A., Karabelas A.J. Visual observations of flooding in narrow rectangular channels // Int. J. Multiphase Flow. 2001. Vol. 27, No. 8. P. 1415–1430.
16. Sudo Y. Mechanism and effects of predominant parameters regarding limitation of falling water in vertical counter-current two-phase flow // J. Heat Transf. (Transactions of the ASME). 1996. Vol. 118, No. 3. P. 715–724.
17. Drosos E.I.P., Paras S.V., Karabelas A.J. Counter-current gas-liquid flow in a vertical narrow channel — liquid film characteristics and flooding phenomena // Int. J. Multiphase Flow. 2006. Vol. 32, No. 1. P. 51–81.
18. Maron D.M., Dukler A.E. Flooding and upward film flow in vertical tubes. Part II. Speculations on film flow mechanisms // Int. J. Multiphase Flow. 1984. Vol. 10, No. 5. P. 599–621.
19. Hewitt G.F., Hall Taylor N.S. Annular two-phase flow. Oxford: Pergamon press, 1970. 310 p.
20. Azzopardi B.J. Gas-Liquid Flows. New York: Begell House, 2006. 331 p.
21. Woodmansee D.E., Hanratty T.J. Base film over which roll waves propagate // AIChE J. 1969. Vol. 15, No. 5. P. 712–715.
22. Chu K.I., Dukler A.E. Statistical characteristics of thin, wavy films. Part III. Structure of the large waves and their resistance to gas flow // AIChE J. 1975. Vol. 21, No. 3. P. 583–593.

23. **Asali J.C., Hanratty T.J.** Ripples generated on a liquid film at high gas velocities // *Int. J. Multiphase Flow*. 1993. Vol. 19, No. 2. P. 229–243.
24. **Azzopardi B.J., Whalley P.B.** Artificial waves in annular two-phase flow // *ASME Winter Annual Meeting, Chicago, 1980. Basic Mechanisms in Two-Phase Flow and Heat Transfer*. P. 1–8.
25. **Демехин Е.А., Токарев Г.Ю., Шкадов В.Я.** Неустойчивость и нелинейные волны в вертикальной пленке жидкости, текущей в противотоке с турбулентным газовым потоком // *Теоретические основы химической технологии*. 1989. Т. 23, № 1. С. 64–70.
26. **Benjamin T.B.** Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mech.* 1959. Vol. 6. P. 161–205.
27. **Miles J.W.** On the generation of surface waves by shear flows // *J. Fluid Mech.* 1957. Vol. 3. P. 185–204.
28. **Trifonov Yu.Ya.** Flooding in two-phase counter-current flows: numerical investigation of the gas-liquid wavy interface using the Navier-Stokes equations // *Int. J. Multiphase Flow*. 2010. Vol. 36, No. 7. P. 549–557.
29. **Trifonov Yu.Ya.** Counter-current gas-liquid wavy film flow between the vertical plates analyzed using the Navier-Stokes equations // *AIChE J.* 2010. Vol. 56, No. 8. P. 1975–1987.
30. **Гугучкин В.В., Демехин Е.А., Калугин Г.Н., Маркович Э.Э., Пикин В.Г.** О линейной и нелинейной устойчивости совместного плоско-параллельного течения пленки жидкости и газа // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1979. № 1. С. 36–42.
31. **Демехин Е.А.** Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1981. № 2. С. 37–42.
32. **Alekseenko S.V., Cherdantsev A.V., Heinz O.M., Kharlamov S.M., Markovich D.M.** An image analysis method as applied to study the space-temporal evolution of waves in an annular gas-liquid flow // *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2011. Vol. 21, No. 3. P. 441–445.
33. **Alekseenko S.V., Cherdantsev A.V., Heinz O.M., Kharlamov S.M., Markovich D.M.** Application of the image analysis method to studies of the space-time wave evolution in an annular gas-liquid flow // *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2013. Vol. 23, No. 1. P. 229–243.
34. **Trifonov Yu.Ya.** Stability and bifurcations of the wavy film flow down a vertical plate: the results of integral approaches and full-scale computations // *Fluid Dyn. Res.* 2012. Vol. 44, No. 3. P. 031418(19).
35. **Трифонов Ю.Я.** Волновое течение пленки жидкости при наличии спутного турбулентного потока газа // *Прикл. механ. и техн. физ.* 2013. Т. 54, № 5. С. 88–100.

*Статья поступила в редакцию 6 июня 2013 г.,
после доработки — 17 сентября 2013 г.*